

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ КАЗЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МИНИСТЕРСТВА ВНУТРЕННИХ ДЕЛ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ИМЕНИ В.Я. КИКОТЯ»

А. В. Пузарин
А. В. Соболев

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Учебное пособие

Москва
2015

ББК 3
Пу 88

Пузарин, А. В.

Основы электротехники и радиоэлектроники. : учебное пособие / А. В. Пузарин ; А. В. Соболев. – М. : Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя, 2015. – 155 с.

В учебном пособии изложены основные вопросы электротехники, методы анализа и синтеза электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами при постоянных и переменных электрических токах, рассматриваются устройство и принцип работы различных электротехнических устройств.

Основной целью учебного пособия является ознакомление с наукой электротехникой обучающихся неэлектротехнических и нерадиотехнических вузов.

ББК 3

Рецензенты: начальник кафедры информационных технологий управления ОВД Академии управления МВД Российской Федерации доктор технических наук, профессор *И. В. Горошко*; заместитель начальника НЦБ Интерпола МВД России полковник полиции *С. Н. Бородин*.

© Московский университет
МВД России имени В.Я. Кикотя, 2015
© Пузарин А. В., 2015
© Соболев А. В., 2015

Оглавление

| | |
|---|----|
| Введение | 7 |
| Глава I. Линейные электрические цепи постоянного тока | 13 |
| 1.1. Электрическая цепь и ее основные элементы..... | 13 |
| 1.1.1. Основные элементы электрической цепи..... | 13 |
| 1.1.2. Неразветвленная цепь постоянного тока..... | 15 |
| 1.2. Сложные (разветвленные) цепи..... | 18 |
| 1.2.1. Законы Кирхгофа и их применение для расчета цепей..... | 18 |
| 1.2.2. Преобразование схем электрических цепей..... | 20 |
| 1.2.3. Метод контурных токов | 24 |
| 1.2.4. Метод узловых потенциалов..... | 25 |
| 1.2.5. Принцип и метод наложения | 27 |
| 1.2.6. Метод эквивалентного генератора (активного двухполюсника) | 28 |
| Глава II. Линейные электрические цепи при гармонических воздействиях | 30 |
| 2.1. Основные понятия и определения | 30 |
| 2.2. Изображение гармонических величин с помощью векторов. Векторные диаграммы..... | 32 |
| 2.3. Основные элементы электрической цепи при гармонических воздействиях (резистор, индуктивная катушка, конденсатор) | 33 |
| 2.3.1. Резистор в цепи гармонического тока | 33 |
| 2.3.2. Индуктивная катушка в цепи гармонического тока..... | 34 |
| 2.3.3. Конденсатор в цепи гармонического тока..... | 36 |
| 2.4. Расчет цепей гармонического тока..... | 37 |
| 2.4.1. Комплексный метод расчета цепей гармонического тока | 37 |
| 2.4.2. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме | 39 |
| 2.4.3. Мощность в цепи гармонического тока | 41 |
| 2.4.4. Расчет цепей при гармонических воздействиях | 42 |
| 2.5. Частотные характеристики и частотные функции активно-реактивных цепей | 47 |
| 2.5.1. Входные частотные функции..... | 48 |
| 2.5.2. Передаточные частотные функции | 50 |

| | |
|--|-----------|
| 2.6. Интегрирующие и дифференцирующие цепи..... | 52 |
| 2.6.1. Интегрирующие цепи | 52 |
| 2.6.2. Дифференцирующие цепи..... | 53 |
| 2.7. Резонансы в электрических цепях | 53 |
| 2.7.1. Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений..... | 53 |
| 2.7.2. Параллельный колебательный контур. Резонанс токов | 57 |
| 2.8. Избирательные свойства колебательных контуров..... | 61 |
| Глава III. Индуктивно связанные цепи | 63 |
| 3.1. Взаимная индукция и взаимная индуктивность..... | 63 |
| 3.2. Расчет индуктивно связанных электрических цепей | 65 |
| 3.2.1. Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек | 65 |
| 3.2.2. Параллельное соединение двух индуктивно связанных катушек | 66 |
| 3.2.3. Независимые индуктивно связанные контуры | 67 |
| Глава IV. Электрические фильтры | 69 |
| 4.1. Типы фильтров и их характеристики | 69 |
| 4.2. Анализ фильтров..... | 72 |
| 4.2.1. Фильтр нижних частот..... | 72 |
| 4.2.2. Фильтр верхних частот | 73 |
| 4.2.3. Полосовой фильтр | 74 |
| 4.2.4. Заграждающий фильтр..... | 76 |
| 4.2.5. Многозвенные фильтры..... | 77 |
| 4.2.6. Фильтры типа « <i>m</i> »..... | 77 |
| Глава V. Электрические цепи при негармонических воздействиях | 79 |
| 5.1. Разложение негармонических периодических функций времени в тригонометрический ряд | 79 |
| 5.2. Мощность в цепи негармонического тока..... | 81 |
| 5.3. Расчет цепей с негармоническими токами | 82 |
| Глава VI. Электрические цепи с распределенными параметрами | 87 |
| 6.1. Длинные линии | 87 |
| 6.2. Уравнения длинных линий..... | 89 |
| 6.2.1. Уравнения длинной линии в комплексной форме..... | 89 |
| 6.2.2. Уравнения длинной линии с гиперболическими функциями | 93 |

| | |
|--|------------|
| 6.3. Основные характеристики и параметры длинных линий | 94 |
| 6.3.1. Волновое сопротивление | 94 |
| 6.3.2. Коэффициент затухания | 95 |
| 6.3.3. Коэффициент фазы..... | 97 |
| 6.3.4. Фазовая скорость и длина волны..... | 97 |
| 6.3.5. Коэффициент отражения | 98 |
| 6.4. Линии без искажений и линии без потерь..... | 100 |
| 6.4.1. Линии без искажений..... | 100 |
| 6.4.2. Линии без потерь..... | 101 |
| Глава VII. Нелинейные электрические цепи | 103 |
| 7.1. Общие сведения о нелинейных цепях..... | 103 |
| 7.2. Нелинейные электрические цепи постоянного тока и методы их расчета..... | 103 |
| 7.2.1. Графические методы расчета..... | 104 |
| 7.2.2. Аналитические методы расчета..... | 106 |
| 7.2.3. Графоаналитический метод | 110 |
| Глава VIII. Трехфазные цепи..... | 115 |
| 8.1. Схемы соединений цепи | 115 |
| 8.2. Трехфазный синхронный генератор..... | 116 |
| 8.3. Схемы соединения трехфазных цепей | 117 |
| 8.4. Векторные диаграммы трехфазной цепи | 119 |
| 8.5. Мощности трехфазной системы | 123 |
| Глава IX. Трансформаторы..... | 123 |
| 9.1. Магнитные материалы и магнитные цепи..... | 124 |
| 9.2. Устройство и принцип действия трансформатора | 127 |
| 9.3. Режимы трансформатора | 130 |
| 9.4. Внешняя характеристика и КПД трансформатора | 132 |
| Глава X. Машины постоянного тока | 132 |
| 10.1. Устройство и принцип действия машин постоянного тока | 133 |
| 10.2. Реакция якоря машины постоянного тока..... | 135 |
| 10.3. Схемы возбуждения машин постоянного тока | 137 |
| 10.4. Выходные (внешние) характеристики машин постоянного тока | 138 |
| 10.5. Пуск и регулирование скорости вращения двигателей | 140 |
| 10.6. Генераторы постоянного тока для систем электропитания автомобилей и тракторов | 141 |
| Глава XI. Асинхронные машины..... | 142 |
| 11.1. Устройство асинхронного двигателя | 142 |

| | |
|--|------------|
| 6 | |
| 11.2. Вращающееся магнитное поле..... | 143 |
| 11.3. Принцип действия асинхронного двигателя | 145 |
| 11.4. Энергетический баланс асинхронного двигателя..... | 146 |
| 11.5. Механическая характеристика асинхронного двигателя..... | 147 |
| 11.6. Пуск и регулирование скорости асинхронного двигателя..... | 148 |
| Глава XII. Синхронные машины | 150 |
| 12.1. Устройство синхронной машины | 150 |
| 12.2. Принцип действия синхронной машины | 151 |
| 12.3. Реакция якоря синхронной машины..... | 152 |
| 12.4. Внешняя характеристика синхронного генератора | 153 |
| 12.5. Параллельная работа синхронного генератора с сетью..... | 154 |

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальность проблемы обеспечения безопасности информации органов внутренних дел определяется рядом взаимосвязанных факторов, многие из которых являются следствием процесса бурной информатизации современного общества. Среди этих факторов отмечаются, с одной стороны, расширение применения современных информационных технологий в деятельности отрасли, совершенствование средств и методов защиты информации, с другой стороны, высокая уязвимость рождающейся инфраструктуры в силу сложности используемых систем, а также стремительный прогресс технических систем разведывательного назначения.

Известно, что важнейшими направлениями обеспечения безопасности информации являются правовая, организационная и техническая защита. Изучению средств и методов технической защиты информации посвящены следующие профессиональные дисциплины образовательного стандарта «Безопасность информационных технологий в правоохранительной сфере»: «Криптографическая защита информации», «Программно-аппаратная защита информации», «Инженерно-техническая защита информации». Упомянутым угрозам безопасности информации в значительной степени противостоит именно система технической защиты информации.

Основной задачей преподавания дисциплины выступает подготовка обучающихся к освоению перечисленных выше профессиональных дисциплин. В частности, дисциплина изучает основные способы представления информации с помощью электромагнитных сигналов, способы электронного преобразования сигналов, основы построения электронных систем обработки информации, методы и средства измерения сигналов и полей и т. д.

Поскольку дисциплина изучает понятия, принципы, методы, способы обработки информации с помощью технических средств и систем, она может быть позиционирована как техническая дисциплина. В связи с этим успешному усвоению материалов дисциплины способствует обладание обучаемым достаточным уровнем знания основных положений физики и математики.

Информация, сообщение, сигнал.

В последние десятилетия значительно увеличились масштабы и усложнилось содержание автоматизированной обработки информации. Сегодня соответствующие процедуры осуществляются практиче-

ски на всех этапах жизненного цикла информации: в ходе ее регистрации и создания, в процессе переработки, хранения и распространения. Основу автоматизированной обработки информации составляют разнообразные технические средства и системы. При этом в рамках этих средств и систем информация представляется в виде сигналов.

Утверждается, что термин «сигнал» происходит от латинского слова «*signum*», обозначающего знак или объект, которые несут информацию о каком-либо событии или явлении. Согласно этой трактовке в технических дисциплинах под сигналом обычно понимают физический процесс или явление, отображающие информацию и позволяющие ее обрабатывать с помощью технических средств и систем, в том числе передавать информацию во времени и пространстве. Таким образом, «технические» сигналы, с одной стороны, выступают одной из форм представления информации, с другой – являются «транспортными» средствами ее передачи.

Известно, что термин «информация» определяет субъективную категорию. В соответствии с рядом теорий информация является результатом мысленной интерпретации каких-либо сведений конкретным субъектом, вследствие чего этот результат субъективен, поскольку непосредственно зависит от целей деятельности субъекта, его образа жизни, уровня грамотности и образования, причастности к каким-либо событиям и т. д. Каким-то образом определить собственно результат мысленной интерпретации достаточно затруднительно, можно лишь отметить, что он может приводить к коррекции знаний субъекта. Недаром информацию нередко и определяют как знания об объектах и процессах окружающего мира, не известные ранее получателю. В этом контексте сегодня собственно информацию можно рассматривать как идеальную категорию.

подавляющую часть знаний люди получают опосредованно, через сложившиеся в человеческом общении правила представления информации. При этом формой представления информации выступают сообщения. Различными видами сообщений являются, например, текстовые, акустические, графические и т. п. В отличие от информации сообщения реальны и объективны. В значительной степени сообщения выражаются с помощью различных знаков. Знак можно определить как материальный предмет, выступающий в качестве представителя какого-либо объекта, свойства или отношения и используемый при формировании сообщений. Сообщения закрепляются на своих носителях, которые часто называют не носителями сообщений, а но-

сителями информации (рис. 1). Носителем информации может быть физический объект, физическое явление или процесс.

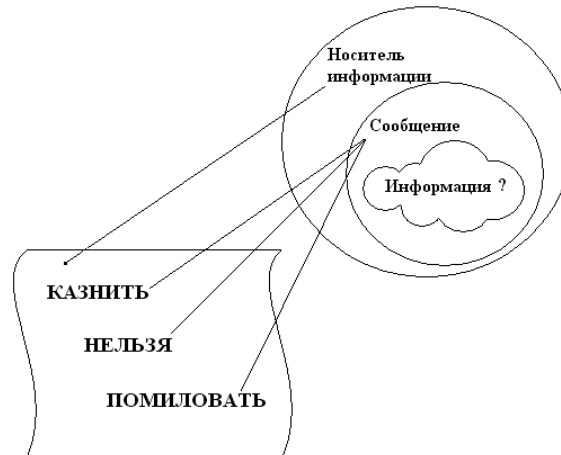


Рис. 1. Информация, сообщение и носитель информации

Таким образом, сигнал как физический процесс объективен, закономерности развития которого не зависят от идеальной деятельности субъекта. Сигнал может быть зарегистрирован, а его существенные параметры могут быть измерены.

Задачи электротехники, радиотехники.

Электротехника – техническая наука, объектом изучения которой является электрическая цепь. Все явления в электрической цепи описывают с помощью понятий об электродвижущей силе, напряжении, токе и сопротивлении.

Электротехника – это наука о практическом применении электрических и магнитных явлений. Все отрасли современного материального производства и социальная сфера немыслимы без применения различных электротехнических устройств.

Задачи электротехники в основном заключаются в изучении проблем производства и передачи на расстояние электрической энергии для промышленных и других целей.

Радиотехника – научно-техническая область, задачами которой являются изучение принципов генерации, усиления, передачи и приема электромагнитных колебаний волн, относящихся к радиодиапазону; практическое использование электромагнитных волн и колебаний для целей передачи, хранения и преобразования информации.

Из перечисленных задач радиотехники видно, что их решение связано с использованием таких важных понятий, как информация, сообщение и сигнал. Они лежат в основе процесса управления авиаци-

онными частями и подразделениями как в мирное время, так и при ведении боевых действий. По сути управление сводится к передаче и приему сообщений, поэтому знание понятий информация, сообщение и сигнал является необходимым в деятельности специалиста по радио или проводной связи.

Под *информацией* будем понимать совокупность сведений об интересующих нас предметах, явлениях или событиях.

Сообщение – форма представления информации, которая подлежит передаче. Сообщение может быть представлено в виде речи, текста, изображения, цифр, букв, условных знаков (например, код Морзе – последовательность точек и тире).

Различия в форме представления информации определяют выбор технических средств для их передачи. Например, для передачи текстовых сообщений используется телеграфная аппаратура, для передачи речевых сообщений (звука) – телефонная аппаратура, для передачи изображений – телевизионные устройства, для передачи результатов измерений – телеметрические устройства и т. д.

Для эффективной передачи информации сообщение необходимо преобразовать в *сигнал*. Сигналом называется физический процесс, однозначно отображающий сообщение. В радиотехнике для передачи сообщений служат свободные высокочастотные электромагнитные колебания или радиоволны, которые распространяются в пространстве со скоростью $C = 3 \times 10^8$ м/с. Применение высокочастотных колебаний обусловлено тем, что напряженность электромагнитного поля в пространстве тем больше, чем больше частота колебаний.

Основные понятия: информация, сообщение, сигнал; радиоволны.

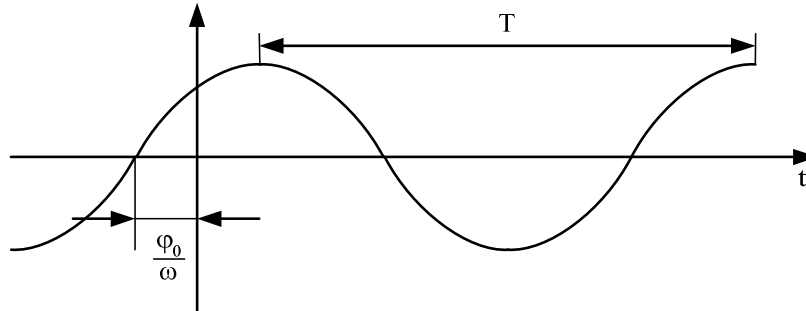
Передача сигналов на расстояние.

Основной задачей радиотехники является передача сообщения на расстояние. Передача сообщений осуществляется по проводным, кабельным, волноводным линиям или в свободном пространстве. Как мы уже отмечали выше, для передачи сообщений применяются радиоволны. Чтобы радиоволны могли переносить информацию, необходимо наделять их признаками передаваемого сообщения. Такой процесс получил название модуляция. В результате модуляции получают сигналы, несущие информацию и распространяющиеся в пространстве.

Высокочастотные колебания, используемые для переноски сообщений, или несущие колебания, изменяются по гармоническому закону

$$x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $x(t)$ – напряжение или ток, являющиеся функциями времени;
 A_m – амплитуда (максимальное значение) колебания, измеряемое в вольтах (В) или амперах (А);
 ω_0 – частота колебания, измеряемая в рад/с;
 φ_0 – начальная фаза, измеряемая в радианах или градусах.



T – период гармонического колебания, измеряемый в секундах (с).

Рис. 2. График гармонического колебания

Здесь A_m , ω_0 , φ_0 – параметры несущего колебания. В зависимости от того, какой из параметров изменяется в соответствии с передаваемым сообщением, различают амплитудную модуляцию (АМ) (изменяется амплитуда несущего колебания); частотную модуляцию (ЧМ) (изменяется частота несущего колебания) и фазовую модуляцию (ФМ) (изменяется начальная фаза несущего колебания). Существуют и другие, более сложные виды модуляции.

В процессе приема производится демодуляция, или детектирование, т. е. выделение передаваемого сообщения из высокочастотного колебания.

Одним из параметров электромагнитных волн является длина волны λ , определяемая как расстояние, проходимое волной за один период колебаний T .

$$\lambda = c \times T = \frac{c}{f}, \text{ (м)} \quad \lambda = \frac{300}{f \text{ (МГц)}},$$

где c – скорость распространения волн (37108 м/с);
 f – частота колебаний, измеряемая в герцах (Гц).

Выбор длины волны или частоты излучаемого колебания весьма существенен для обеспечения устойчивой и надежной связи. Выбор того или иного диапазона волн для каждой конкретной системы связи определяется следующими факторами:

- особенностью распространения радиоволн данного диапазона над земной поверхностью;

- характером помех в данном диапазоне;

- характером сообщения, т. е. шириной полосы частот, занимаемой сообщением (например, речевое сообщение занимает полосу частот от 30 до 15000 Гц);

- габаритными размерами антенной системы, которые должны быть соизмеримы с длиной волны излучаемого колебания.

Таблицы распределения радиоволн по диапазонам приведены в справочниках, а также некоторых учебниках по радиотехнике.

Типичные примеры использования частотных диапазонов в радиотехнических системах приведены в таблице.

Таблица

| Диапазоны | | Название | | Примеры использования |
|------------|--------------|--------------------------------------|-----------------------------|---|
| 100–10 км | 3–30 кГц | Мириаметровые (сверхдлинные) (СДВ) | Сверхнизкие частоты (СНЧ) | Дальняя навигация |
| 10–1 км | 30–300 кГц | Километровые (длинные) (ДВ) | Низкие частоты (НЧ) | Навигационные системы радиолинии |
| 1000–100 м | 300–3000 кГц | Гектометровые (средние) (СВ) | Средние частоты (СЧ) | Морские радиостанции, радиоконпасы, сигналы бедствия, АМ-радиовещание |
| 100–10 м | 3–30 МГц | Декаметровые (короткие) (КВ) | Высокие частоты (ВЧ) | Системы поиска и спасения, телеграфия, телефония, факсимильные системы |
| 10–1 м | 30–300 МГц | Метровые (МВ) | Очень высокие частоты (ОВЧ) | МВ-телевизионные каналы, ЧМ-радиовещание, наземная подвижная связь, управление воздушным движением, навигация, наземные РЛС |
| 100–10 см | 300–3000 МГц | Дециметровые (ДЦВ) | Ультравысокие частоты (УВЧ) | ДМВ-телевизионные каналы, навигация, спутниковая связь, радиовысотомеры |
| 10–1 см | 3–30 ГГц | Сантиметровые (СМВ) (ультракороткие) | Сверхвысокие частоты (СВЧ) | Самолетные и наземные РЛС, наземная подвижная связь, метео РЛС |
| 10–1 мм | 30–300 ГГц | Миллиметровые (ММВ) | Крайневысокие частоты (КВЧ) | РЛС посадки самолетов |

Глава I. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. Электрическая цепь и ее основные элементы

1.1.1. Основные элементы электрической цепи

Упорядоченное движение свободных носителей электрических зарядов в проводящей среде называется *током проводимости*, или *электрическим током*.

Постоянный ток – это неизменный во времени электрический ток. Значение силы тока равно скорости переноса заряда через поперечное сечение проводника: $I = dQ/dt$.

Единица измерения силы тока – ампер ($A = Кл/с$).

При своем движении носители зарядов испытывают противодействие проводящей среды (столкновение с другими частицами). Степень этого противодействия называется *электрическим сопротивлением R*, которое измеряется в омах (Ом).

Свойство среды проводить электрический ток называется *электрической проводимостью G*, которая количественно оценивается величиной, обратной сопротивлению, и измеряется в сименсах: $G = 1/R$ ($См = 1/Ом$).

Электрической цепью называют совокупность электротехнических устройств, предназначенных для производства, передачи, распределения и взаимного преобразования электрической энергии.

Простейшая цепь состоит из *источника* энергии, *приемника*, или *потребителя* энергии, и соединительных проводов. Для каждой цепи составляют *электрическую схему* из отдельных элементов, отражающих основные физические процессы в данном электротехническом устройстве (объекте).

В источниках электрической энергии неэлектрические ее виды (химическая, механическая, тепловая и др.) преобразуются в потенциальную энергию электрического поля W_{Π} за счет разделения положительных и отрицательных электрических зарядов внутри источника.

Отношение энергии W_{Π} к единице заряда называется *электродвижущей силой E* (ЭДС), которая характеризует способность этих зарядов выполнять некоторую работу: $E = W_{\Pi}/q$.

ЭДС измеряется в вольтах (В) и направлена внутри источника из области отрицательных зарядов в область положительных зарядов. Разность потенциальных энергий положительных φ^+ и отрицательных φ^- зарядов называют напряжением на клеммах источника: $U_{12} = \varphi^+ - \varphi^-$.

Напряжение U_{12} численно равно ЭДС ($U_{12} = E$) и направлено навстречу ЭДС (рис. 1.1, а).

Один и тот же источник электрической энергии может быть представлен одной из следующих эквивалентных схем.

Реальный источник ЭДС, или источник напряжения, характеризуется значением ЭДС E и внутренним сопротивлением $R_{вн}$ (рис. 1.1, а).

Идеальный источник ЭДС имеет внутреннее сопротивление, равное нулю ($R_{вн} = 0$) (рис. 1.1, б).

Реальный источник тока характеризуется значением тока J и внутренней проводимостью $G_{вн}$ (рис. 1.1, в).

Идеальный источник тока имеет внутреннюю проводимость $G_{вн} = 0$, или $R_{вн} = \infty$ (рис. 1.1, г).

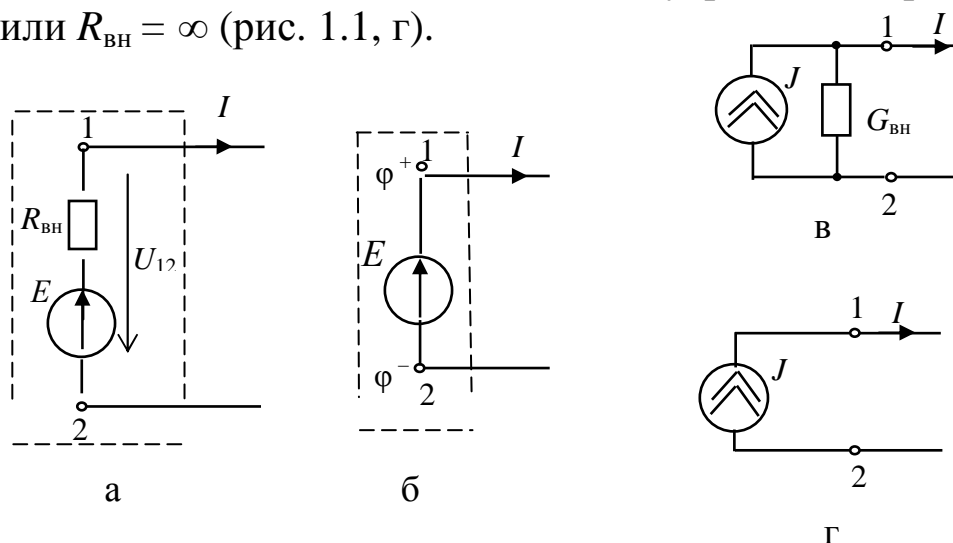


Рис. 1.1. Эквивалентные схемы источников электрической энергии

Внешние характеристики источников электрической энергии, отображаемых соответствующей схемой, представляют собой зависимость напряжения на клеммах источника U_{12} от тока (рис. 1.2).

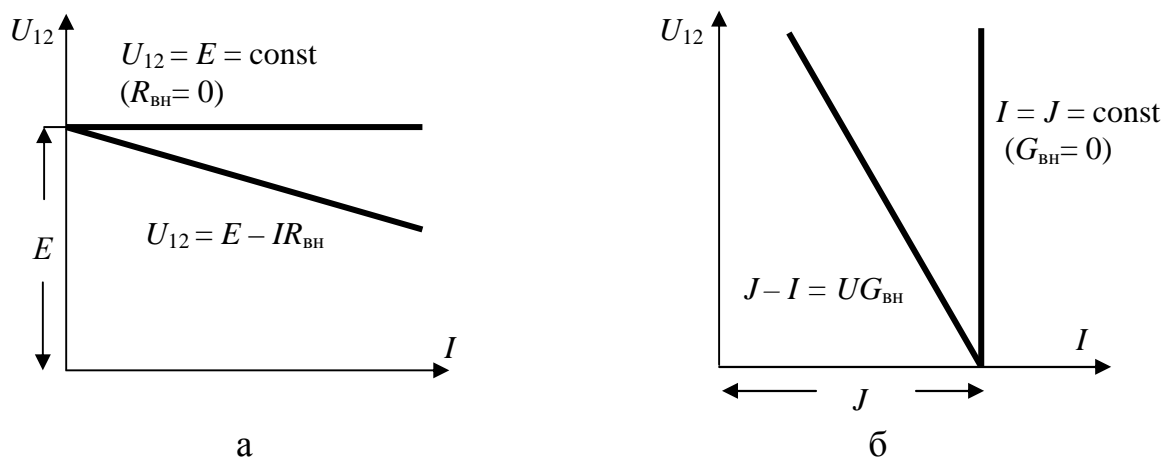


Рис. 1.2. Внешние характеристики источников электрической энергии

Эквивалентные преобразования схем источников электрической энергии:

- источника напряжения E в эквивалентный источник тока

$$J_{\mathcal{E}} = E / R_{\text{вн}}, G_{\mathcal{E}} = 1 / R_{\text{вн}};$$

- источника тока в эквивалентный источник ЭДС

$$E_{\mathcal{E}} = J / G_{\text{вн}}, R_{\mathcal{E}} = 1 / G_{\text{вн}}.$$

В качестве приемника в схемах цепей постоянного тока рассматривается резистор с сопротивлением R .

В таком приемнике электрической энергии происходят необратимые преобразования энергии электрических зарядов в полезные виды энергии (тепловую, механическую, световую и др.).

1.1.2. Неразветвленная цепь постоянного тока

Простой цепью является неразветвленная цепь, все элементы которой (источники и приемники) соединены последовательно друг за другом и через все элементы протекает один и тот же ток (рис. 1.3).

Задача расчета электрической цепи состоит в расчете токов в цепи и мощности, потребляемой приемниками.

Положительное направление токов в цепи выбирается **произвольно**.

В электрической цепи различают **пассивные** и **активные участки**.

Пассивные участки содержат только приемники электрической энергии. В цепи постоянного тока это резисторы (например, участки 1 – 2 – 3, 0 – 4 на рис. 1.3).

Активные участки включают в себя источники энергии (участки 0 – 1 – 2, 2 – 3 – 4 и др.).

На любом пассивном участке цепи ($a - b$) ток, протекающий из точки a в точку b , определяется **законом Ома для пассивного участка**:

$$I = \frac{U_{ab}}{R}.$$

Для некоторого активного участка цепи ($a - b$) записывается **обобщенный закон Ома**:

$$I = \frac{U_{ab} \pm \sum_k E_k}{\sum_n R_n},$$

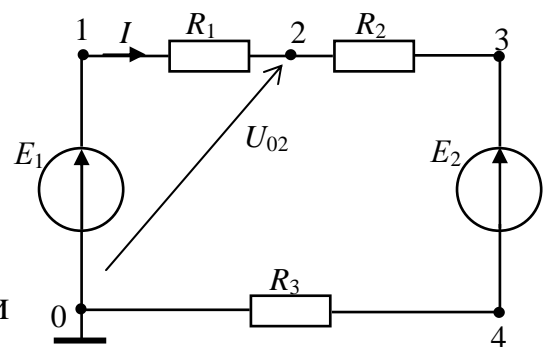


Рис. 1.3. Неразветвленная цепь постоянного тока

где U_{ab} – напряжение на данном участке, совпадающее по направлению с током; E_k – ЭДС источников участка, которые записываются со знаком плюс, если направление ЭДС совпадает с выбранным направлением тока в цепи, и со знаком минус в противном случае.

При выбранном направлении тока в цепи (рис. 1.3) ток на участке 0 – 1 – 2 – 3 – 4 определяется формулой:

$$I = \frac{U_{14} + E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \text{ А.}$$

В целом для замкнутой цепи ток по закону Ома будет равен:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ А.}$$

Мощность P , характеризующая интенсивность преобразования энергии в единицу времени в источнике и в приемнике, определяется **законом Джоуля–Ленца** и измеряется в **ваттах** (Вт):

- для источника ЭДС $P_E = EI$, Вт;
- для источника тока $P_J = UI$, Вт, где U – напряжение на клеммах источника;
- для приемника (нагрузки) $P_{пр} = UI = I^2R = U^2/R$, Вт.

Для любой электрической цепи должен соблюдаться **баланс мощностей**: мощность, развиваемая всеми источниками энергии P_E и P_J , должна быть равна мощности $P_{пр}$, потребляемой всеми приемниками цепи: $\sum P_{и} = \sum P_{пр}$.

При этом мощность источника может быть как положительной, так и отрицательной, тогда как мощность приемника **всегда положительна**.

По результатам расчета электрической цепи строится **потенциальная диаграмма** в виде графика распределения потенциалов различных точек цепи.

При ее построении по оси абсцисс в масштабе **последовательно** откладывают сопротивления резисторов вдоль выбранного направления обхода цепи, а по оси ординат наносятся потенциалы точек. Общий вид потенциальной диаграммы рассматриваемой цепи дан на рис. 1.4, где потенциал точки «0» принят равным нулю.

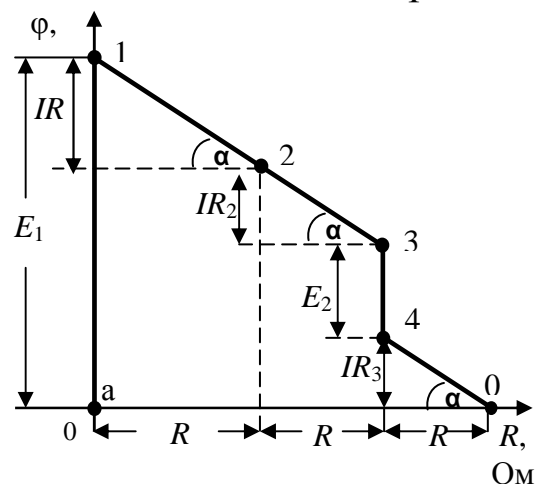


Рис. 1.4. Потенциальная диаграмма

Пример 1.1. В цепи (рис. 1.5) $E_1 = 50$ В, $E_2 = 22$ В, $E_3 = 20$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 1$ Ом. Определить ток цепи, напряжение между точками 2 – 0, проверить баланс мощностей, рассчитать и построить потенциальную диаграмму цепи.

Решение.

Выберем направление тока в цепи I по часовой стрелке. Тогда по обобщенному закону Ома для замкнутой цепи ток в цепи:

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{50 - 22 + 20}{2 + 4 + 5 + 1} = \frac{48}{12} = 4 \text{ А.}$$

Записав закон Ома для активного участка 0 – 1 – 2,

$$I = \frac{-U_{20} + E_1}{R_1} = \frac{-U_{20} + 50}{2}, \text{ найдем, что } U_{20} = 42 \text{ В}$$

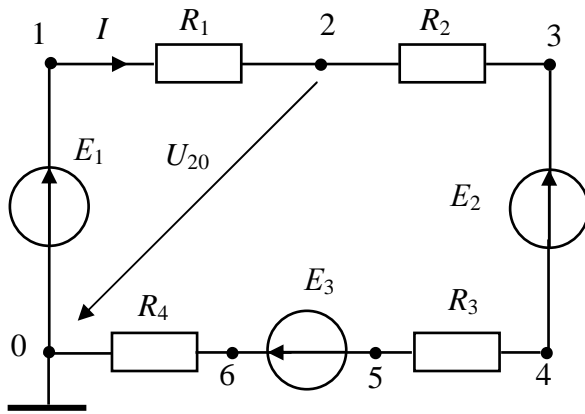


Рис. 1.5. Схема неразветвленной цепи постоянного тока

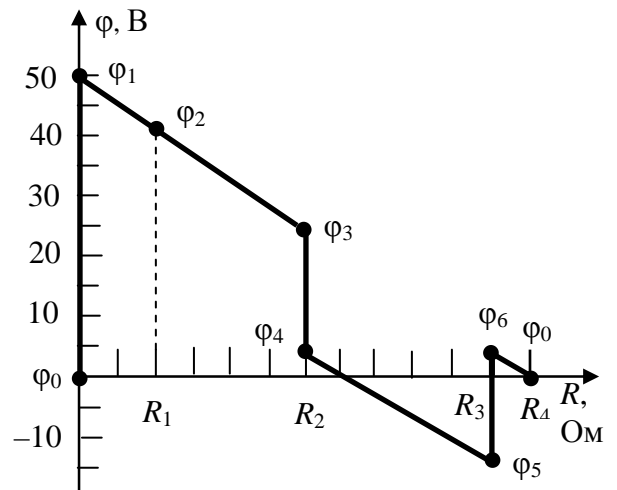


Рис. 1.6. Потенциальная диаграмма

Составим уравнение баланса мощностей:

$$I(E_1 - E_2 + E_3) = I^2(R_1 + R_2 + R_3 + R_4); 4 \times 48 = 16 \times 12 = 192 \text{ Вт.}$$

Баланс мощностей выполняется. Вывод: задача решена правильно.

Определим потенциалы точек схемы, приняв $\varphi_0 = 0$ и направление обхода контура цепи по часовой стрелке:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + E_1 = E_1 = 50 \text{ В}; \varphi_2 = \varphi_1 - IR_1 = 42 \text{ В}; \varphi_3 = \varphi_2 - IR_2 = 26 \text{ В};$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 - E_2 = 4 \text{ В}; \varphi_5 = \varphi_4 - IR_3 = -16 \text{ В}; \varphi_6 = \varphi_5 + E_3 = 4 \text{ В}; \varphi_0 = \varphi_6 - IR_4 = 0 \text{ В.}$$

Построим потенциальную диаграмму $\varphi(R)$ (рис. 1.6). Потенциальная диаграмма позволяет определить напряжение между любыми точками цепи, а также ток цепи.

1.2. Сложные (разветвленные) цепи

Сложные (разветвленные) цепи содержат большое число ветвей, соединенных между собой в узлах и образующих контуры (рис. 1.7).

Ветвью называют участок цепи, на котором все элементы соединены последовательно друг за другом, и через них протекает один и тот же ток.

Узлом называют место (точку) соединения трех и более ветвей.

Контуром называют любой замкнутый путь в цепи, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же точке.

Совокупности контуров, в каждом из которых есть хотя бы одна ветвь, не входящая в другие контуры, называются **линейно независимыми контурами**.

Цепь на рис. 1.7 содержит три ветви с токами I_1 , I_2 , I_3 , которые соединяются в двух узлах – «a» и «b».

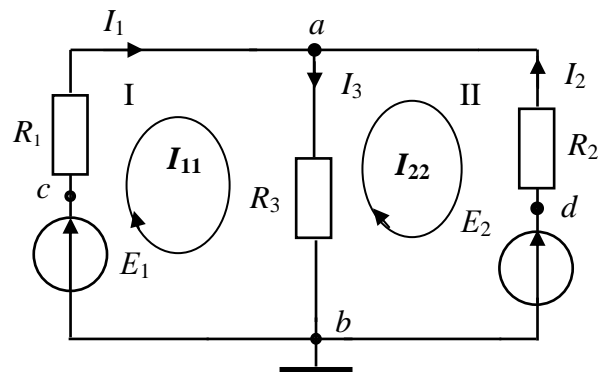


Рис. 1.7. Пример сложной цепи

Контуры цепи: $b - c - a - b$, $b - a - d - b$, $b - c - a - d - b$.

Независимыми являются контуры $b - c - a - b$ и $b - a - d - b$.

1.2.1. Законы Кирхгофа и их применение для расчета цепей

Расчеты разветвленных цепей основываются на двух законах Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа относится к узлам цепи:

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю – $\left(\sum_{k=1}^n I_k = 0 \right)$, или сумма токов, притекающих к узлу, равна сумме токов, вытекающих из узла – $\left(\sum_{k=1}^m I_k = \sum_{l=1}^n I_l \right)$

Произвольно выберем направления токов в ветвях схемы (рис. 1.7) и условимся считать положительными токи, притекающие к узлу, и отрицательными – вытекающие из узла. Тогда согласно первому закону Кирхгофа, например, для узла «a» запишем: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ или $I_1 + I_2 = I_3$.

Второй закон Кирхгофа относится к контурам цепи:

В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме напряжений на пассивных элементах цепи (на резисторах для цепи постоянного тока):

$$\Sigma E = \Sigma U_R = \text{или } \Sigma E = \Sigma RI$$

Другая формулировка второго закона Кирхгофа: в любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на всех элементах цепи равна нулю.

Направление обхода контура выбирают произвольно и положительными считают направления ЭДС, токов и напряжений, совпадающие с направлением обхода контура.

Общее число уравнений, составляемых по законам Кирхгофа, равно числу неизвестных токов.

По первому закону число уравнений равно числу узлов в цепи минус единица. Остальные записываются по второму закону

Пример 1.2. Для заданной схемы цепи (рис. 1.7) при $E_1 = 100$ В, $E_2 = 50$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом составить систему уравнений по законам Кирхгофа и определить токи в ветвях цепи. Проверить баланс мощностей.

Решение.

В цепи два узла и три ветви. Следовательно, для определения трех неизвестных токов I_1 , I_2 , I_3 в ветвях необходимо составить одно уравнение по первому закону Кирхгофа (например, для узла «а») и два уравнения по второму закону, например, для внутренних контуров I и II при произвольно выбранных направлениях их обхода:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0; \text{ или } I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 &= E_1 \text{ или } 5I_1 + 20I_3 = 100; \\ I_3 R_3 + I_2 R_2 &= E_2; 20I_3 + 10I_2 = 50. \end{aligned}$$

Определяем токи по формулам Крамера:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – главный определитель системы; Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 – частные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & 20 \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 100 & 0 & 20 \\ 50 & 10 & 20 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 100 & 20 \\ 0 & 50 & 20 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 100 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix}.$$

Найдем токи в ветвях: $I_1 = 5,714 \text{ А}$; $I_2 = -2,143 \text{ А}$; $I_3 = 3,571 \text{ А}$.

Уравнение баланса мощности в цепи: $\sum_{k=1}^n P_{E_k} = \sum_{j=1}^m P_{R_j}$,

где $\sum_{k=1}^2 P_{E_k} = P_{E1} + P_{E2} = E_1 I_1 + E_2 I_2 = 100 \times 5,714 + 50 \times (-2,143) = 464,25 \text{ Вт}$ – суммарная мощность источников энергии;

$\sum_{l=1}^3 P_{R_l} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 462,21 \text{ Вт}$ – суммарная

мощность нагрузки.

Баланс мощностей выполняется.

Рассчитаем и построим потенциальную диаграмму $\varphi(R)$

(рис. 1.8):

$\varphi_b = 0$; $\varphi_c = E_1 = 100 \text{ В}$;

$\varphi_a = \varphi_c - I_1 R_1 = 100 - 5,714 \times 5 =$

$71,43 \text{ В}$;

$\varphi_d = \varphi_a + (-I_2 R_2) = 71,43 - 21,43 = 50 \text{ В}$;

$\varphi_b = \varphi_d - E_2 = 0$.

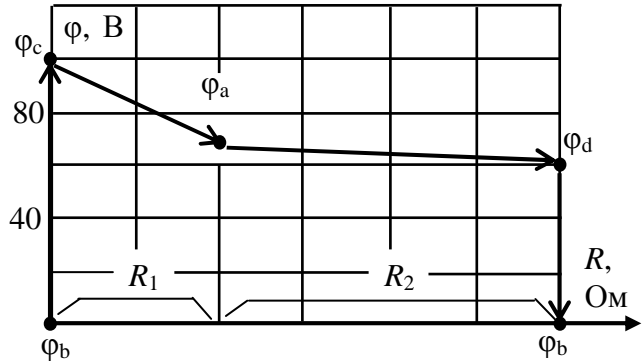


Рис. 1.8. Потенциальная диаграмма

1.2.2. Преобразование схем электрических цепей

Чтобы уменьшить число уравнений, решаемых по законам Кирхгофа, цепь целесообразно преобразовать, уменьшив в ней число элементов.

Последовательно соединенные резисторы с сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_n можно заменить одним резистором с эквивалентным сопротивлением R_{Σ} , равным сумме сопротивлений всех резисторов (рис. 1.9):

$$R_{\Sigma} = R_1 + R_2 + \dots, R_n.$$

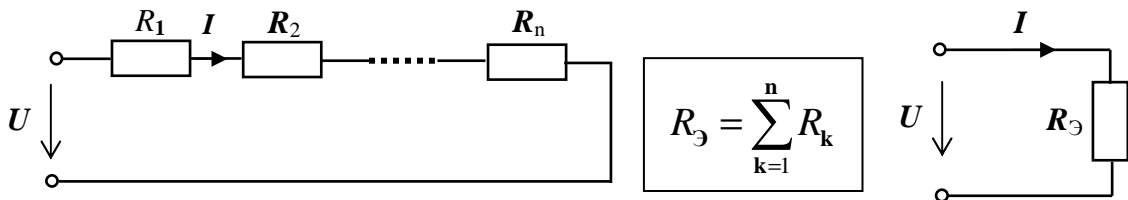


Рис. 1.9. Преобразование схемы с последовательным соединением резисторов

Последовательно соединенные источники энергии с ЭДС E_1, E_2, \dots, E_n можно заменить одним источником с эквивалентной ЭДС, равной алгебраической сумме ЭДС отдельных источников (рис. 1.10).

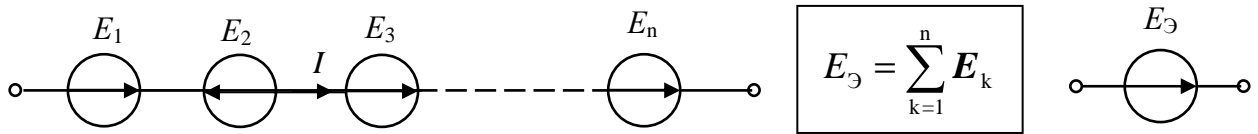


Рис. 1.10. Преобразование схемы с последовательным соединением источников ЭДС

Здесь ЭДС, совпадающие по направлению с направлением тока в цепи, записываются со знаком плюс, а несовпадающие – со знаком минус.

Если элементы цепи присоединены к одной и той же паре узлов, т. е. находятся под одним и тем же напряжением, то такое соединение называют параллельным.

Параллельно соединенные резисторы с сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_n можно заменить одним резистором с эквивалентным сопротивлением $R_Э$ (рис. 1.11).

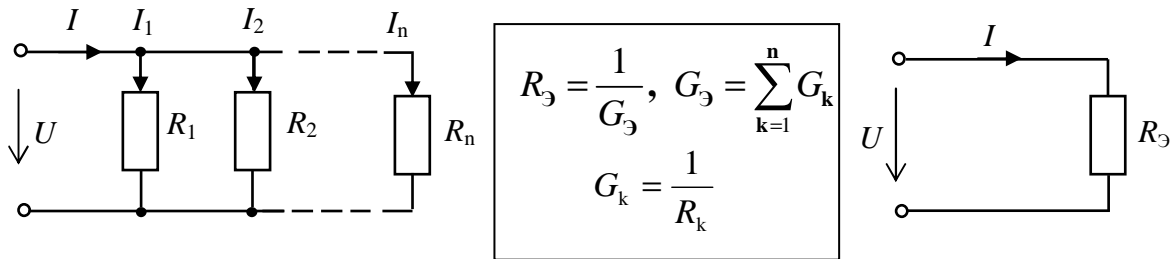


Рис. 1.11. Преобразование схемы с параллельным соединением резисторов

При двух параллельно соединенных резисторах $R_Э = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Параллельное соединение n ветвей, содержащих источники энергии с ЭДС E_1, E_2, \dots, E_n и внутренними сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_n (рис. 1.12), можно заменить эквивалентным источником с ЭДС $E_Э$ и с эквивалентным сопротивлением $R_Э$.

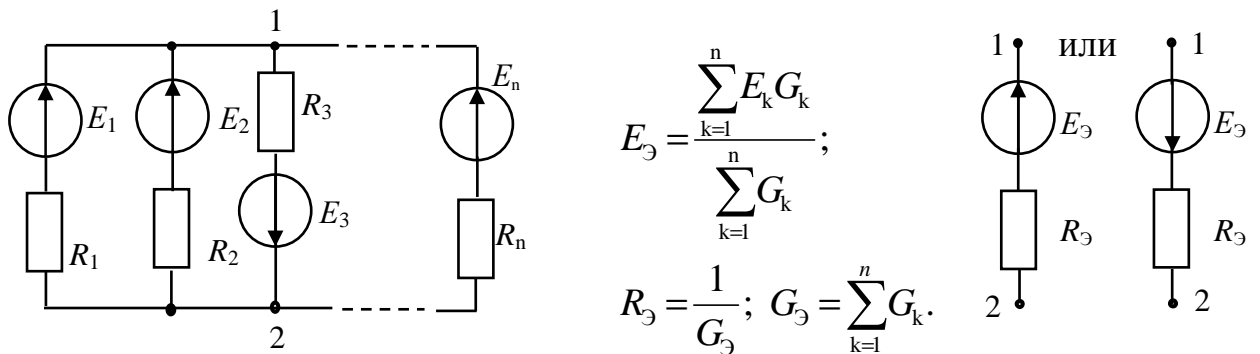


Рис. 1.12. Преобразование схемы с параллельным соединением активных ветвей

При этом числитель формулы представляет собой *алгебраическую* сумму произведений ЭДС и проводимости ветви с учетом направления ЭДС.

Если часть схемы цепи, состоящая из трех резисторов R_{12} , R_{23} и R_{31} , образует треугольник (рис. 1.13, а), то путем введения дополнительного узла n рассматриваемую часть схемы можно преобразовать в эквивалентную звезду (рис. 1.13, б). При эквивалентном преобразовании должны сохраняться неизменными токи I_1 , I_2 и I_3 , а также напряжения U_{12} , U_{23} и U_{31} . Такое преобразование дает возможность уменьшить общее число узлов и контуров схемы.

Сопротивления резисторов в ветвях эквивалентной звезды равны:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} .$$

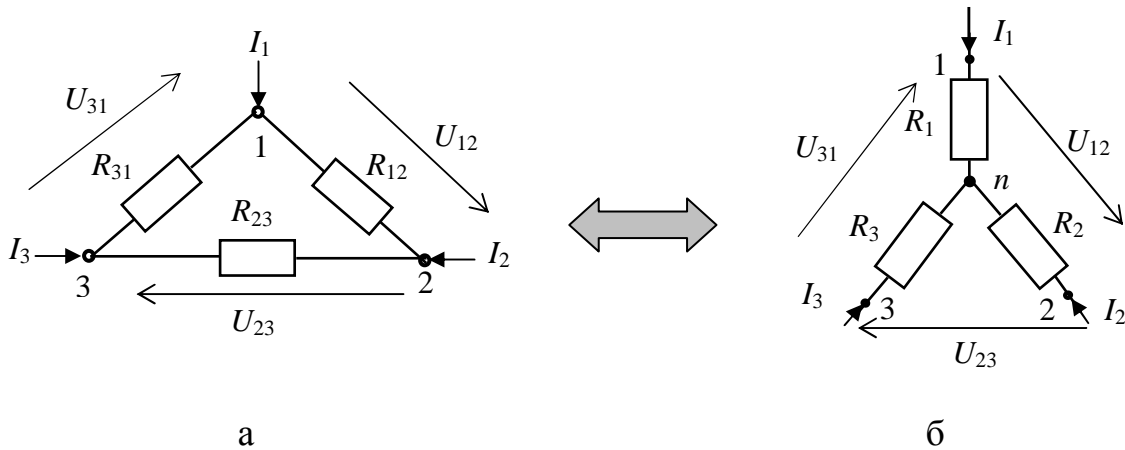


Рис. 1.13. Преобразование «треугольник» – «звезда»

Обратное преобразование звезды в эквивалентный треугольник:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} .$$

Пример 1.3. В электрической цепи (схема цепи и исходные данные примера 1.2) определить токи в ветвях методом эквивалентных преобразований.

Решение.

Преобразуем две ветви с источниками ЭДС в одну эквивалентную ветвь с $E_{\mathcal{E}}$ и $R_{\mathcal{E}}$ по формулам: $E_{\mathcal{E}} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2} = 8,333 \text{ В},$

где $G_1 = 1/R_1 = 0,2 \text{ См}, G_2 = 1/R_2 = 0,1 \text{ См}; R_{\mathcal{E}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 3,333 \text{ Ом}.$

В полученной эквивалентной схеме (рис. 1.14) определяем ток I_3 :

$$I_3 = \frac{E_3}{R_3 + R_3} = \frac{8,333}{3,333 + 20} = 3,571 \text{ А.}$$

Определяем остальные токи в исходной схеме (рис. 1.7): $U_{ab} = I_3 R_3 = 71,43 \text{ В}$;

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{-71,43 + 100}{5} = 5,714 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{-U_{ab} + E_2}{R_2} = \frac{-71,43 + 50}{10} = -2,143 \text{ А.}$$

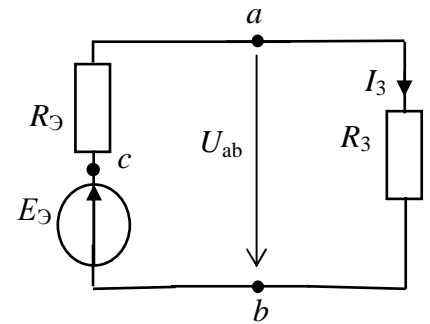


Рис. 1.14. Преобразованная схема

Составим уравнение баланса мощностей:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3;$$

$$100 \times 5,714 + 50 \times (-2,143) = 5,714^2 \times 5 + (-2,143)^2 \times 10 + 3,571^2 \times 20; 464,5 \approx 464,9 \text{ Вт.}$$

Баланс мощностей выполняется.

При анализе сложных цепей бывает удобным преобразовать цепь на основе так называемой **теоремы компенсации**.

Согласно **теореме компенсации** ток в электрической цепи не изменится, если любой участок цепи заменить на идеальный источник ЭДС (с $R_{вн} = 0$), с ЭДС, численно равной напряжению на этом участке и направленной встречно току в цепи (рис. 1.15).

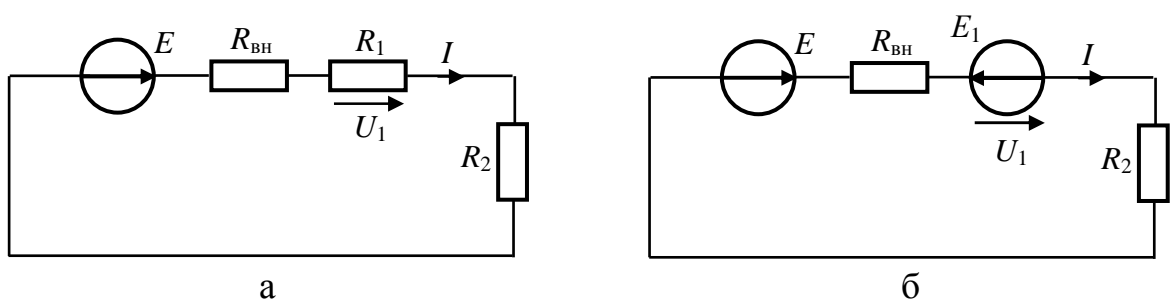


Рис. 1.15. Применение теоремы компенсации: а – исходная схема цепи; б – преобразованная схема цепи

Для схемы (рис. 1.15, а) запишем уравнение по второму закону Кирхгофа: $IR_{вн} + IR_1 + IR_2 = E$, откуда ток $I = \frac{E}{R_{вн} + R_1 + R_2}$.

Очевидно, что значение тока в цепи не изменяется, если любой член из левой части уравнения перенести в правую часть и записать в виде ЭДС, например, $IR_1 = U_1 = E_1$: $IR_{вн} + IR_2 = E - E_1$.

Данному уравнению соответствует другая схема цепи (рис. 1.15, б), в которой протекает тот же ток I и введенная ЭДС E_1 как бы компенсирует падение напряжения U_1 . ЭДС такого источника будет зависеть от тока, поэтому он называется *зависимым источником энергии*.

Аналогично можно показать, что любую ветвь с известным током I_k можно заменить идеальным источником тока с током J_k . При этом режим всей цепи не изменится (рис. 1.16) (замена участка цепи зависимым источником тока).

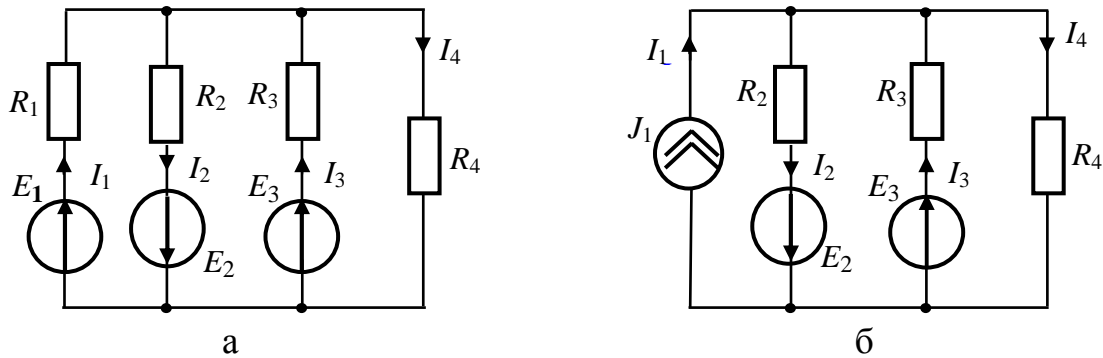


Рис. 1.16. Применение теоремы компенсации: а – исходная схема цепи; б – преобразованная схема цепи

1.2.3. Метод контурных токов

При использовании метода контурных токов уравнения составляются только по второму закону Кирхгофа для контуров. При этом условно считают, что через все элементы рассматриваемого контура протекает один и тот же контурный ток, направление которого совпадает с направлением обхода контура.

Решив полученную систему уравнений, определяют контурные токи, а затем токи в ветвях цепи как *алгебраическую сумму соответствующих контурных токов*, замыкающихся через данную ветвь.

Если в один из контуров входит ветвь с источником тока, его схеме предварительно можно преобразовать в эквивалентную схему источника ЭДС (если это возможно) или контурный ток контура с источником тока принять равным току этого источника тока.

Пример 1.4. В электрической цепи (схема цепи и исходные данные примера 1.2) определить токи в ветвях методом контурных токов.

Решение.

Произвольно выбираем направления обхода контуров по часовой стрелке.

Составляем систему уравнений по второму закону Кирхгофа относительно двух контурных токов I_{11} и I_{22} :

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_3) + I_{22}R_3 &= E_1; 25I_{11} + 20I_{22} = 100; \\ I_{11}R_3 + I_{22}(R_2 + R_3) &= E_3; 20I_{11} + 30I_{22} = 50. \end{aligned}$$

Решаем систему уравнений и определяем контурные токи:

$$I_{11} = 5,714 \text{ А}; I_{22} = -2,143 \text{ А}.$$

Определяем токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} = 5,714 \text{ А}; \\ I_2 &= I_{22} = -2,143 \text{ А}; \\ I_3 &= I_{11} + I_{22} = 3,571 \text{ А}. \end{aligned}$$

1.2.4. Метод узловых потенциалов

По методу узловых потенциалов составляются уравнения только по первому закону Кирхгофа (по числу узлов минус 1).

Потенциал одного из узлов принимается равным нулю. Тогда при «у» узлов составляют уравнения для неизвестных потенциалов «у-1» узлов. Структура каждого из уравнений следующая.

Для каждого из «у-1» узлов цепи в левой части уравнения последовательно записывают со знаком «+» произведение потенциала этого узла на сумму проводимостей всех ветвей, объединяемых этим узлом, а со знаком «-» – произведения потенциалов других узлов, имеющих связь с данным узлом, на проводимость ветви, соединяющей эти узлы.

В правой части каждого уравнения записывают алгебраическую сумму произведений ЭДС ветви на проводимость этой ветви для всех ветвей, объединенных рассматриваемым узлом. Произведение записывают со знаком «+», если ЭДС направлена к данному узлу, в противном случае – со знаком «-».

Если кроме источников ЭДС в цепи действуют источники тока, то ток источника тока J записывают в правую часть соответствующего уравнения со знаком «+», если ток источника направлен к узлу, и со знаком «-» при противоположном направлении.

В схеме цепи на рис. 1.17, а – четыре узла. Приняв $\varphi_c = 0$, можно составить три уравнения для неизвестных потенциалов φ_a , φ_b и φ_d :

$$\begin{aligned} \text{для узла «a» } \varphi_a(G_1 + G_2 + G_{67}) - \varphi_b G_2 - \varphi_d G_1 &= -E_1 G_1 - E_2 G_2; \\ \text{для узла «b» } \varphi_b(G_2 + G_3 + G_5) - \varphi_a G_2 - \varphi_d G_5 &= E_2 G_2 + J; \\ \text{для узла «d» } \varphi_d(G_1 + G_4 + G_5) - \varphi_a G_1 - \varphi_b G_5 &= E_1 G_1. \end{aligned}$$

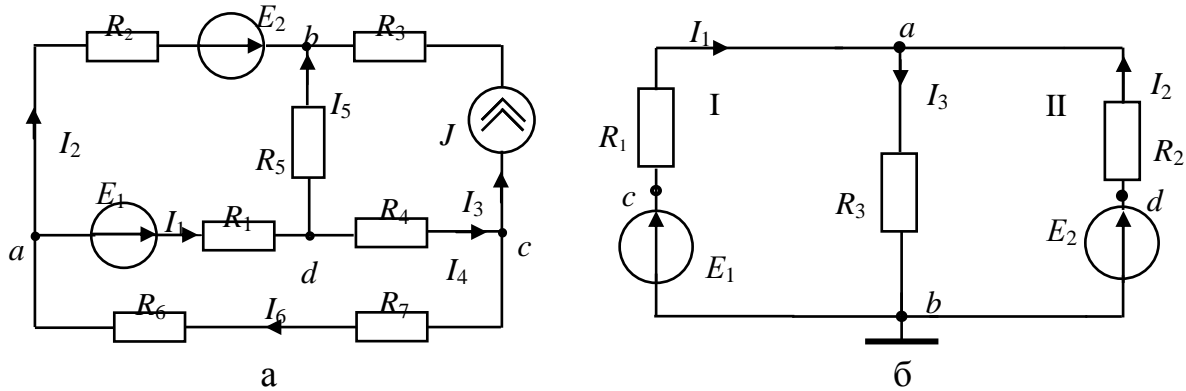


Рис. 1.17. Схема цепи: а – с несколькими узлами; б – с двумя узлами

Решив эту систему уравнений, находим потенциалы φ_a , φ_b и φ_d . Затем рассчитываем токи по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = (U_{ad} + E_1)G_1 = (\varphi_a - \varphi_d + E_1)G_1; I_2 = (U_{ab} + E_2)G_2 = (\varphi_a - \varphi_b + E_2)G_2; \\ I_3 = J; I_4 = U_{dc}G_4 = \varphi_d G_4; I_5 = U_{db}G_5 = (\varphi_d - \varphi_b)G_5; I_6 = U_{ca}G_{67} = -\varphi_a G_{67}, \\ \text{где } G_{67} = 1/(R_6 + R_7).$$

Если в какой-либо ветви есть идеальный источник ЭДС, то за нулевой следует принять потенциал одного из двух узлов, в которые включена ветвь с идеальным источником. Тогда потенциал второго узла будет равен ЭДС этого источника со знаком «+» или «-».

В частном случае схема цепи может содержать лишь два узла (рис. 1.17, б). Тогда приняв, например, $\varphi_b = 0$, потенциал φ_a будет равен:

$$\varphi_a = U_{ab} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k} = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

В этом случае данный метод называют *методом двух узлов*.

Пример 1.5. В электрической цепи (схема цепи и исходные данные примера 1.2) определить токи методом узловых потенциалов.

Решение.

Так как в заданной схеме два узла, используем *метод двух узлов*. В соответствии с этим методом определяем напряжение между узлами цепи U_{ab} :

$$U_{ab} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{100 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,1}{0,2 + 0,1 + 0,05} = 71,43 \text{ В}.$$

Определяем токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{-71,43 + 100}{5} = 5,714 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{-U_{ab} + E_2}{R_2} = \frac{-71,43 + 50}{10} = -2,143 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{71,43}{20} = 3,571 \text{ A}.$$

1.2.5. Принцип и метод наложения

Для линейных электрических цепей справедлив принцип наложения. Его физический смысл состоит в том, что суммарную реакцию электрической цепи на воздействие нескольких источников энергии можно определить как сумму воздействий от каждого источника в отдельности. Например, ток в любой ветви линейной электрической цепи с несколькими источниками электрической энергии равен алгебраической сумме токов, вызываемых в этой ветви каждым из источников в отдельности.

Пример 1.6. В электрической цепи (рис. 1.18, а, исходные данные примера 1.2) определить токи в ветвях методом наложения.

Решение.

1. Определяем токи в схеме (рис. 1.18, б) при действии только источника ЭДС E_1 ($E_2 = 0$):

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 8,572 \text{ A};$$

$$U'_{ab} = I'_1 R_{23} = 57,15 \text{ В};$$

$$I'_2 = \frac{U'_{ab}}{R_2} = 5,715 \text{ А}; \quad I'_3 = \frac{U'_{ab}}{R_3} = 2,857 \text{ А}.$$

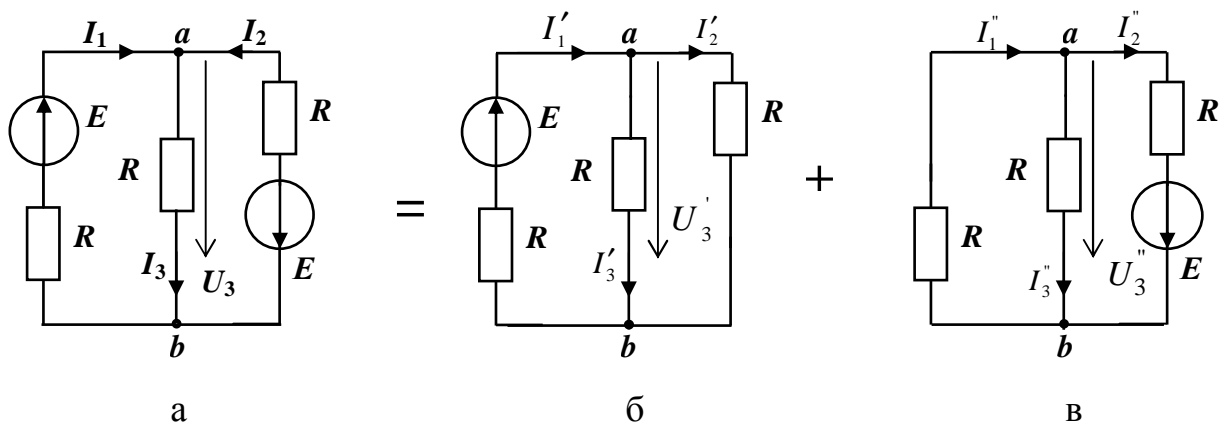


Рис. 1.18. Определение частичных токов

2. Определяем токи (рис. 1.18, в) при действии источника ЭДС E_2 ($E_1 = 0$):

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = 3,571 \text{ А};$$

$$U_{ba}'' = I_2'' R_{13} = 14,286 \text{ В};$$

$$I_1'' = \frac{U_{ba}''}{R_1} = 2,857 \text{ А}; \quad I_3'' = \frac{-U_{ba}''}{R_3} = -0,714 \text{ А}.$$

3. Определяем токи в исходной схеме как алгебраическую сумму частичных токов (рис. 1.18, а):

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 11,43 \text{ А}; \quad I_2 = -I_2' - I_2'' = -9,286 \text{ А}; \quad I_3 = I_3' + I_3'' = 2,144 \text{ А}.$$

Принцип наложения справедлив только лишь применительно к напряжениям и токам и не относится к мощности, которая представляет собой квадратичную форму: $I_1^2 R + I_2^2 R \neq (I_1 + I_2)^2 R$. Поэтому мощность в какой-либо ветви нельзя определять как сумму мощностей в ветвях вспомогательных схем. Сначала нужно определить токи в ветвях исходной схемы и затем найти мощность.

1.2.6. Метод эквивалентного генератора (активного двухполюсника)

Этот метод применяется для определения тока, напряжения и мощности в какой-либо одной ветви сложной схемы.

Сущность данного метода состоит в том, что любой фрагмент электрической цепи, содержащий источники электрической энергии, может быть заменен **активным двухполюсником**, состоящим из эквивалентного источника ЭДС (генератора) (рис. 1.19).

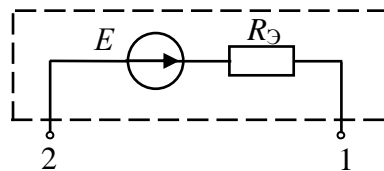


Рис. 1.19. Активный двухполюсник

ЭДС эквивалентного источника $E_Э$ равна напряжению между выводами двухполюсника при размыкании внешнего участка цепи, подключенного к этим выводам.

Эквивалентное внутреннее сопротивление $R_Э$ равно входному сопротивлению двухполюсника, которое определяется при коротком

замыкании всех источников ЭДС и отключении источников тока в схеме двухполюсника.

Порядок расчета цепи этим методом рассмотрим на следующем примере.

Пример 1.7. В схеме цепи (рис. 1.20, а) $E_1 = 10$ В, $E_2 = 40$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 1,2$ Ом. Определить ток I_4 и мощность, потребляемую резистором R_4 .

Решение.

1. Представим фрагмент цепи с источниками ЭДС активным двухполюсником в виде эквивалентного источника ЭДС с $E_{\mathcal{E}}$ и $R_{\mathcal{E}}$ (рис. 1.20, б).

2. Определим значение $E_{\mathcal{E}}$. Разорвем ветвь, ток I_4 в которой нужно определить, и подсчитаем напряжение между точками разрыва 1–2 (напряжение холостого хода $U_{1-2} = U_{\text{хх}} = E_{\mathcal{E}}$).

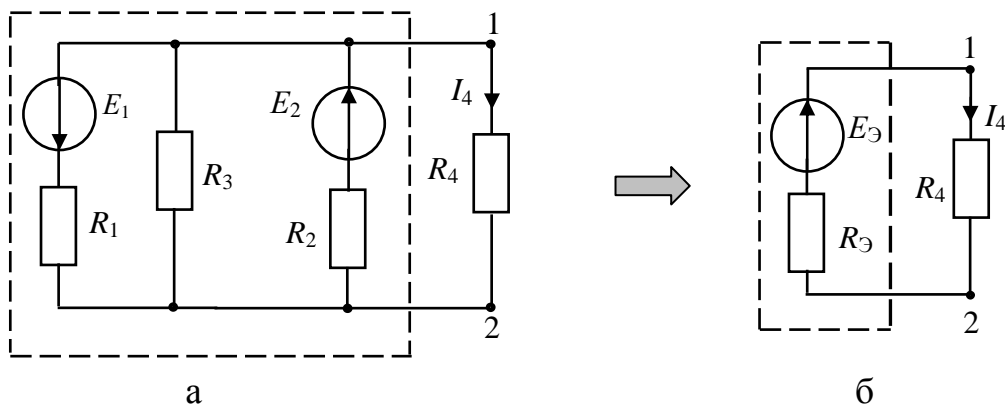


Рис. 1.20. Метод активного двухполюсника

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи (рис. 1.21, а): $U_{\text{хх}} + I_{2\text{хх}}R_2 = E_2$.

$$\text{Здесь ток } I_{2\text{хх}} = \frac{U_{\text{аб}} + E_2}{R_2} \text{ А; } U_{\text{аб}} = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = -10 \text{ В и } I_{2\text{хх}} = 15 \text{ А.}$$

Напряжение $U_{\text{хх}} = E_{\mathcal{E}} = E_2 - I_{2\text{хх}}R_2 = 40 - 30 = 10$ В.

3. Для определения $R_{\mathcal{E}}$ замкнем накоротко источники ЭДС E_1 и E_2 и определим входное сопротивление этой схемы (рис. 1.21, б), т. е. эквивалентное сопротивление относительно зажимов 1–2 как эквивалентное сопротивление трех одинаковых параллельно соединенных резисторов: $R_{\mathcal{E}} = 2/3$ Ом.

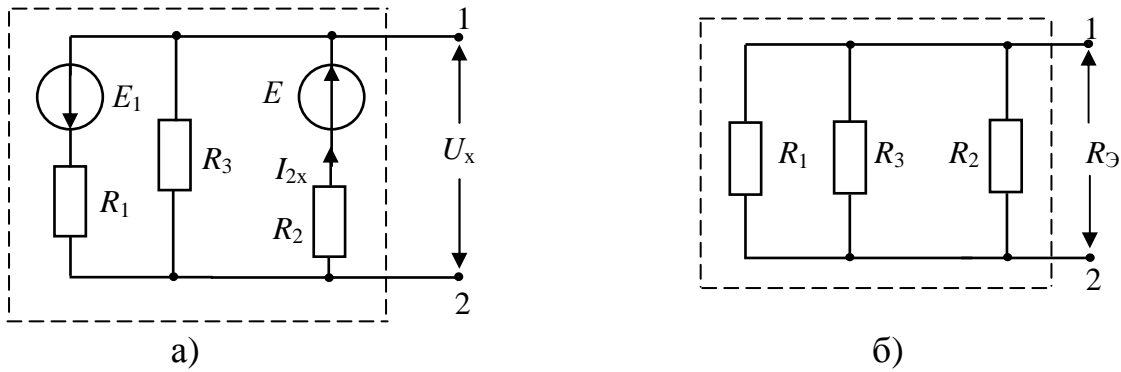


Рис. 1.21. Определение параметров двухполюсника

4. Ток I_4 определим из эквивалентной схемы цепи на рис. 1.18, б):

$$I_5 = \frac{E_3}{R_3 + R_4} = \frac{10}{2/3 + 2} = 3,75 \text{ А.}$$

5. Мощность, потребляемая резистором R_4 , равна:

$$P_4 = I_4^2 R_5 = 14,062 \cdot 2 = 28,125 \text{ Вт.}$$

Г л а в а П. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

2.1. Основные понятия и определения

Наиболее часто в технике связи используются периодические сигналы в виде токов и напряжений, являющиеся синусоидальными или косинусоидальными функциями времени. Радиотехнические цепи при таких токах и напряжениях называют цепями при гармонических воздействиях.

Периодическим током называют переменный электрический ток, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени.

Мгновенное значение гармонического синусоидального тока (рис. 2.1, а):

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin\left(\frac{2\omega}{T} t + \psi_i\right),$$

где I_m – максимальное значение (амплитуда) тока; $(\omega t + \psi_i)$ – текущая фаза (фазовый угол); ψ_i – начальная фаза (фазовый угол при $t = 0$).

Мгновенное значение косинусоидального тока (рис. 2.1, б):

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi'_i) = I_m \cos\left(\frac{2\omega}{T} t + \psi'_i\right), \text{ где } \psi'_i = \psi_i + 90^\circ.$$

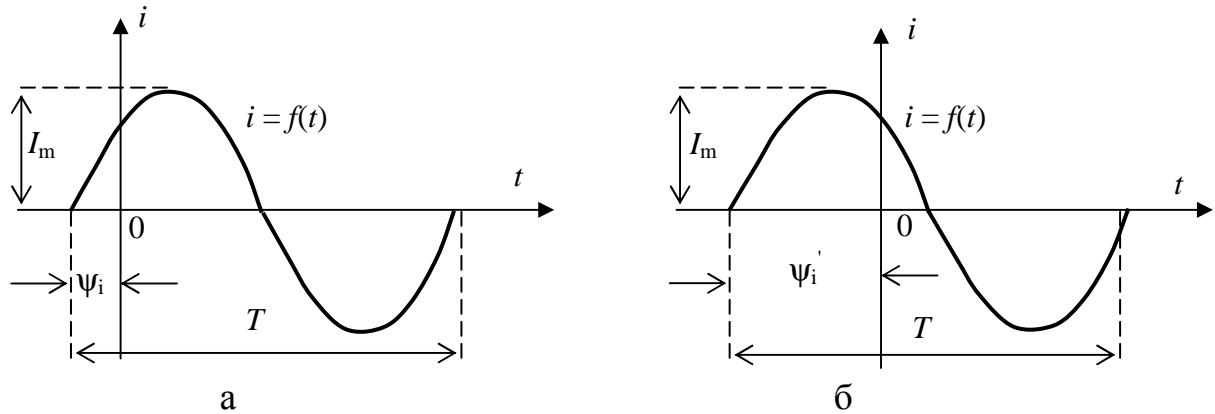


Рис. 2.1. Временная диаграмма гармонического тока

Аналогично для напряжения и ЭДС:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), e = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

Периодом является наименьший интервал времени T , по истечении которого значения периодической величины повторяются (рис. 2.1). Период измеряется в секундах.

Частотой колебаний называют величину, обратную периоду: $f = \frac{1}{T}$. Частота f измеряется в герцах (Гц) и показывает, сколько периодов рассматриваемая функция проходит за 1 с.

Угловой частотой называется параметр $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, который показывает, на сколько радиан увеличивается фаза за 1 с. При стандартной в России частоте промышленного тока $f = 50$ Гц $\omega = 314$ рад/с.

График мгновенного тока удобнее изображать как зависимость тока от фазового угла (фазы) (рис. 2.1). Начальная фаза на графике откладывается от начала координат до начала «синусоиды».

Началом «синусоиды» является нулевое значение функции при ее переходе от «-» к «+». Начальная фаза, лежащая слева от начала координат, является положительной ($\psi > 0$), а лежащая справа – отрицательной ($\psi < 0$).

Для количественной оценки переменного тока используют две не зависящие от времени характеристики – действующее и среднее значения.

Действующее значение тока характеризует тепловое и силовое действие переменного тока, которое равно его среднеквадратичному значению за период.

Действующее значение гармонического тока равно:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m.$$

Среднее значение – это среднее значение тока за половину периода $T/2$:

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m.$$

Аналогично для напряжения $U = 0,707 U_m$; $U_{\text{ср}} = 0,637 U_m$.

2.2. Изображение гармонических величин с помощью векторов. Векторные диаграммы

На рис. 2.2 изображен график гармонического тока $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

В момент времени $t = 0$ $i(0) = I_m \sin \psi_i$.

Тогда в любой момент времени t угол этого вектора с горизонталью составит $\psi_i + \omega t$, а его проекция на вертикальную ось $I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ будет равна мгновенному значению тока в момент времени t .

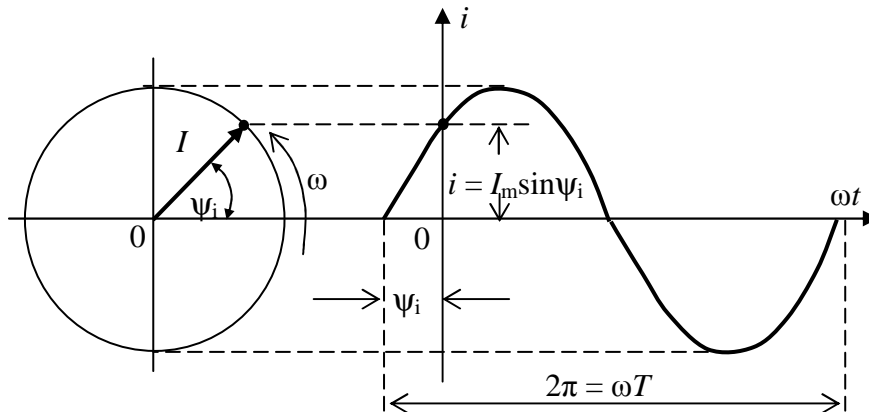


Рис. 2.2. Переход от временной диаграммы к вектору

Поэтому вместо синусоидальных величин тока, напряжения или ЭДС можно рассматривать соответствующие им **вращающиеся векторы**.

Совокупность векторов, изображающих соответствующие им синусоидальные величины, называют **векторной диаграммой** (рис. 2.3).

Положение векторов на рис. 2.3 показано для момента $t = 0$. В любой другой момент времени их взаимная ориентация останется неизменной, так как векторы вращаются с одинаковой частотой. Поэтому диаграмму можно рассматривать как неподвижную.

На диаграмме (рис. 2.3) начальный угол $\psi_u > \psi_i$ и вектор \underline{U}_m достигнет вертикальной оси раньше, чем \underline{I}_m , т. е. вектор \underline{U}_m , опережает по фазе вектор \underline{I}_m .

Разность начальных фаз напряжения и тока, т. е. угол между векторами \underline{U}_m и \underline{I}_m , называют **углом сдвига фаз между напряжением и током** и обозначают буквой φ : $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

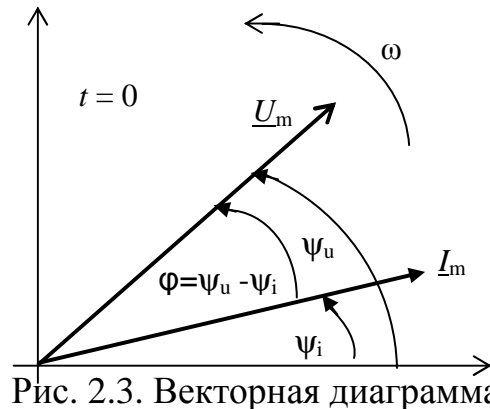


Рис. 2.3. Векторная диаграмма

2.3. Основные элементы электрической цепи при гармонических воздействиях (резистор, индуктивная катушка, конденсатор)

Для расчета схемных и конструктивных параметров электротехнических и радиотехнических устройств при переменных токах используют их **схему замещения**, которую составляют из элементов трех типов – **резистора, индуктивной катушки и конденсатора**.

2.3.1. Резистор в цепи гармонического тока

Резистор – идеализированный элемент, который отражает **необратимое преобразование** электромагнитной энергии в тепловую или другие виды энергии. Резистор характеризуется только электрическим сопротивлением переменному току R , которое называют **активным сопротивлением**.

Связь между мгновенными значениями тока через резистор и напряжением на его зажимах определяется законом Ома (рис. 2.4):

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin(\omega t + \psi_u)}{R} = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \text{ где } I_m = U_m/R.$$

Закон Ома для действующих значений:

$$I = U/R, \text{ для амплитуд } - I_m = U_m/R.$$

В резисторе ток и напряжение совпадают по фазе, т. е. $\psi_u = \psi_i$ и угол сдвига фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$ (рис. 2.4).

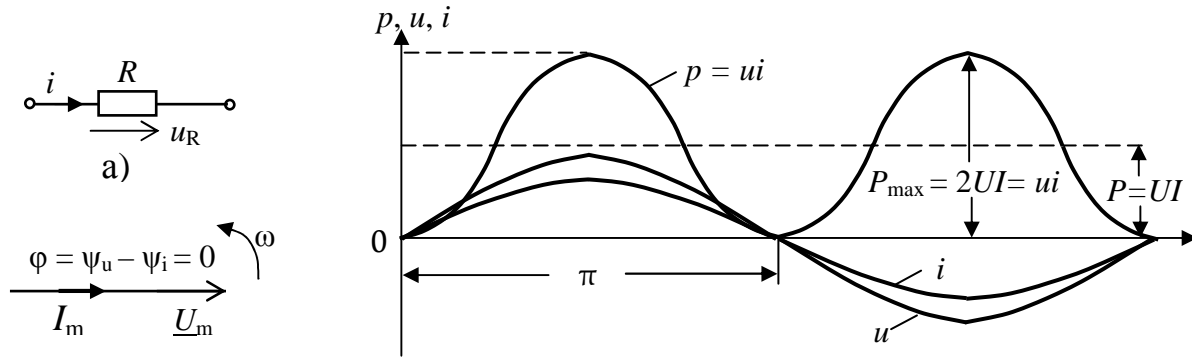


Рис. 2.4. Временные диаграммы гармонических воздействий в резисторе

Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений тока и напряжения:

$$p = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t = U_m I_m \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = UI - UI \cos 2\omega t.$$

Ток и напряжение в резисторе в любой момент времени имеют одинаковый знак, мгновенная мощность всегда положительна, т. е. энергия поступает только от источника к резистору и полностью потребляется.

Среднее значение мгновенной мощности за период называют **активной мощностью** P :

$$P_T = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

2.3.2. Индуктивная катушка в цепи гармонического тока

Индуктивная катушка конструктивно представляет собой намотанный на каркас проводник в виде катушки, которая характеризуется сопротивлением проводника R_k и индуктивностью L (рис. 2.5, а).

Идеализированная катушка индуктивности, в которой принимается $R_k = 0$, называется **индуктивным элементом**. В индуктивном элементе энергия запасается в магнитном поле, и нет тепловых потерь.

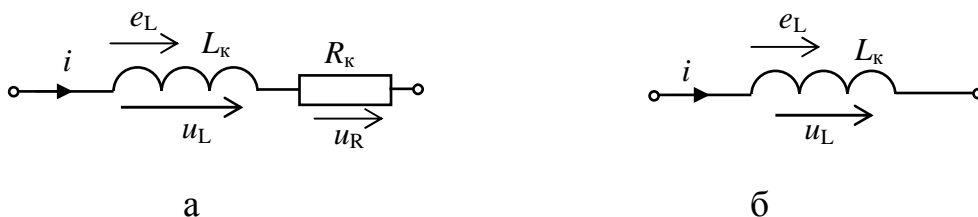


Рис. 2.5. Схемы катушек индуктивности: а – реальная; б – идеальная

Если в индуктивной катушке протекает гармонический ток $i = I_m \sin \omega t$, то он вызывает потокосцепление:

$$\psi = Li = LI_m \sin \omega t = \psi_m \sin \omega t,$$

где L – индуктивность катушки, измеряемая в генри (Гн).

В катушке индуцируется ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -\omega \psi_m \cos \omega t = E_{Lm} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

где $E_{Lm} = \omega \psi_m = \omega LI_m$. Тогда напряжение на индуктивном элементе

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \cos \omega t = U_{Lm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где $U_{Lm} = \omega LI_m$, $U_L = \omega LI$.

Следовательно, максимальные (и действующие) значения напряжения пропорциональны току, причем коэффициент пропорциональности равен ωL .

Величина $X_L = \omega L$ измеряется в омах и называется **индуктивным сопротивлением**. Обратная величина $B_L = 1/X_L = 1/\omega L$ называется **индуктивной проводимостью**.

Индуктивное сопротивление пропорционально частоте. Поэтому при постоянном токе сопротивление индуктивного элемента равно нулю ($X_L = 0$), индуктивная проводимость равна бесконечности, напряжение на индуктивном элементе отсутствует.

На рис. 2.6 изображены временная и векторная диаграмма катушки. На диаграмме (рис. 2.6, а) вектор ЭДС самоиндукции \underline{E}_L отстает по фазе от вектора тока \underline{I} и совпадающего с ним потокосцепления на угол $\pi/2$, а вектор напряжения \underline{U}_L соответственно опережает векторы тока и потокосцепления на $\pi/2$. Угол $\varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/2$.

Мгновенная мощность цепи с индуктивной катушкой (рис. 2.6, б):

$$p_L = ui = U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = UI \sin 2\omega t.$$

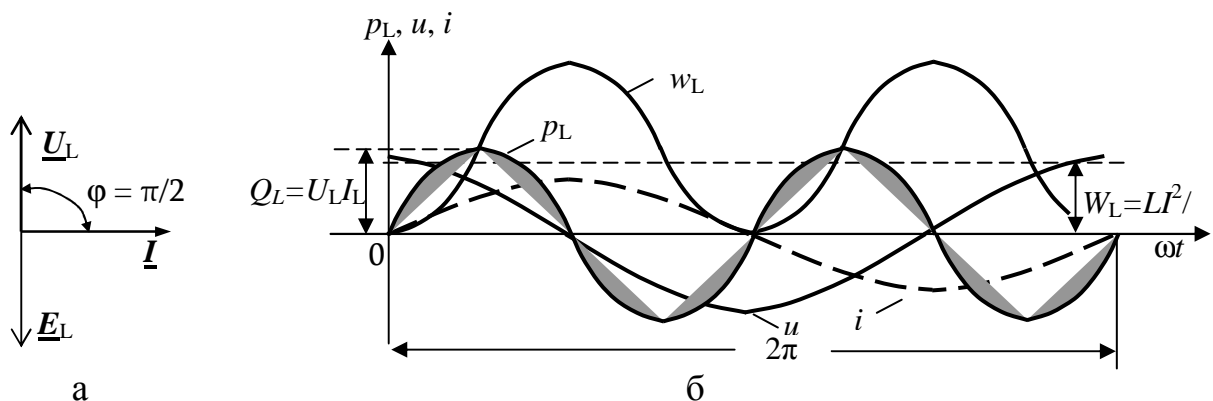


Рис. 2.6. Временная и векторная диаграммы индуктивного элемента

Энергия магнитного поля:

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Мгновенная мощность (заштрихованная область на рис. 2.6, б) пульсирует с двойной частотой, причем среднее ее значение, т. е. активная мощность, равна нулю. Происходит обмен энергией между источником и магнитным полем катушки. **Потребления энергии нет.**

Максимальное значение мгновенной мощности называют **реактивной мощностью** индуктивной катушки:

$$P_L = p_{L\max} = U_L I_L = \omega L I_L^2 = I_L^2 X_L > 0.$$

P_L измеряют в **вольт-амперах реактивных** (вар).

2.3.3. Конденсатор в цепи гармонического тока

Емкостный элемент – идеализированный конденсатор, в котором энергия запасается в электрическом поле. В таком элементе нет тепловых потерь.

Для учета потерь на токи смещения в изоляторе конденсатора в схему реального конденсатора вводят резистор или проводимость.

Если к конденсатору с емкостью C приложено гармоническое напряжение $u_C = U_{Cm} \sin \omega t$, то заряд на электродах $q = Cu_C = CU_{Cm} \sin \omega t$.

Поскольку заряд изменяется во времени, через конденсатор будет протекать переменный ток: $i = dq / dt = \omega CU_{Cm} \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$.

Таким образом, на конденсаторе **ток опережает напряжение на угол $\pi/2$** , угол $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2$ (рис. 2.7).

Из выражения $U_{Cm} = 1/\omega C I_m = X_C I_m$ следует, что величина $X_C = 1/\omega C$ имеет размерность сопротивления и называется **емкостным сопротивлением**. Обратную величину называют **емкостной проводимостью**: $B_C = 1/X_C = \omega C$.

Мгновенная мощность конденсатора:

$$P_C = ui = U_{Cm} I_{Cm} \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{U_{Cm} I_{Cm}}{2} \sin 2\omega t = U_C I_C \sin 2\omega t.$$

Энергия электрического поля конденсатора (рис. 2.7, б):

$$W_C = C u_C^2 / 2 = \frac{C U_{Cm}^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{C U_{Cm}^2}{2(1 - \cos 2\omega t)}.$$

Происходит обмен энергией между источником и электрическим полем конденсатора. При положительных значениях мощности энер-

гия запасается в электрическом поле, а при отрицательных значениях мощности энергия возвращается к источнику.

Активная мощность конденсатора равна нулю. **Потребления энергии нет.**

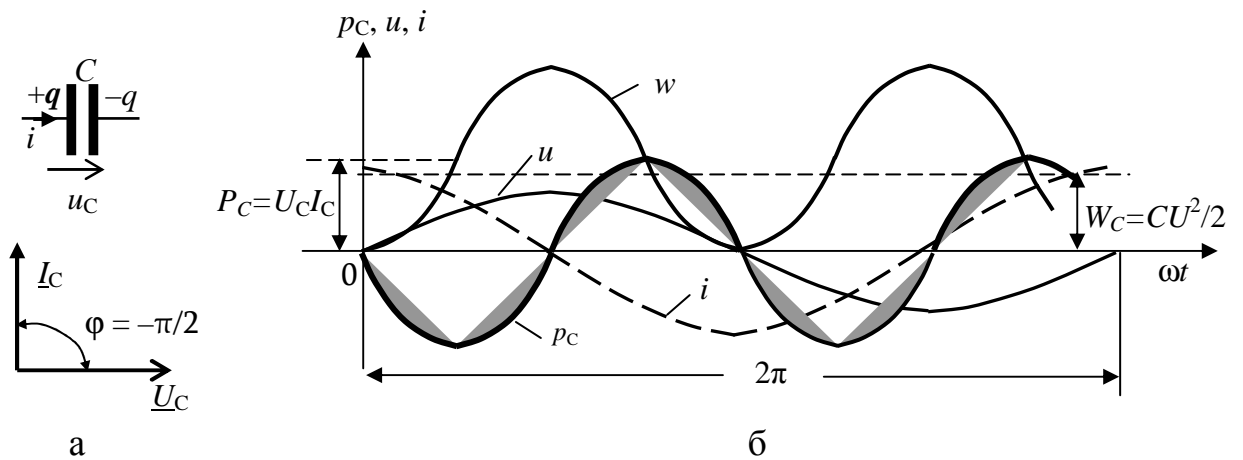


Рис. 2.7. Временная и векторная диаграммы емкостного элемента

Максимальное значение мгновенной мощности называют **реактивной мощностью** конденсатора и измеряют в **вольт-амперах реактивных** (вар):

$$P_{C \max} = U_C I_C = P_C = \frac{U_C^2}{X_C} = X_C I^2 < 0.$$

2.4. Расчет цепей гармонического тока

2.4.1. Комплексный метод расчета цепей гармонического тока

Задача анализа электрических цепей гармонического тока сводится к решению дифференциальных уравнений или систем таких уравнений.

Например, пусть к цепи с последовательным соединением резистора R , индуктивной катушки L и конденсатора C (рис. 2.8) приложено гармоническое напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.



Рис. 2.8. Цепь с последовательным соединением элементов R , L , C

Требуется определить ток в цепи $i(t)$.

Уравнение второго закона Кирхгофа для рассматриваемого контура:

$$u(t) = u_R + u_L + u_C = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt .$$

Следовательно, ток $i(t)$ можно найти путем интегрирования полученного дифференциального уравнения. Комплексный метод упрощает расчет цепи.

Комплексный метод расчета цепей гармонического тока основан на представлении гармонических величин **комплексными числами**, которые могут быть записаны в алгебраической ($\underline{A} = a + jb$), в показательной ($\underline{A} = Ae^{j\alpha}$) и в тригонометрической ($\underline{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$) формах.

Переход от одной формы комплексного числа к другой выполняется по формулам:

$$\underline{A} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j\alpha} = Ae^{j\alpha}, \text{ где } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \alpha = \arctg \frac{b}{a};$$

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha = a + jb, \text{ где } a = A\cos\alpha, b = A\sin\alpha.$$

Заменяем в приведенном уравнении гармонические функции (ток i и напряжение u) их изображениями в виде показательных функций с комплексными показателями:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \Rightarrow \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t} = U_m e^{j\psi_u} \cdot e^{j\omega t};$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Rightarrow \underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t}.$$

Вместо производной и интеграла введем в уравнение их изображения:

$$\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = \frac{d(I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t})}{dt} = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t} = j\omega I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} = j\omega \underline{I}_m \cdot e^{j\omega t};$$

$$\int i(t) dt \Rightarrow \int \underline{i}(t) dt = \int (I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t}) dt = \frac{I_m e^{j\psi_i}}{j\omega} e^{j\omega t} = -j \frac{1}{\omega} \underline{I}_m e^{j\omega t}.$$

В результате проведенной замены в исходном уравнении получим:

$$\underline{U}_m e^{j\omega t} = R \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} - j \frac{\underline{I}_m}{\omega C} e^{j\omega t},$$

или $\underline{U}_m = R \underline{I}_m + j\omega L \underline{I}_m - j \frac{\underline{I}_m}{\omega C}$ – **алгебраическое** уравнение с комплексными коэффициентами.

Выполненные преобразования называют **«алгебраизацией дифференциальных уравнений»**.

Решив полученное уравнение относительно комплексной амплитуды тока \underline{I}_m , найдем:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\underline{U}_m}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{\underline{U}_m}{R + jX} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{Z e^{j\varphi}} = I_m e^{j(\psi_u - \varphi)},$$

где $\underline{I}_m = \underline{U}_m / \underline{Z}$ – амплитуда тока, $\psi_i = \psi_u - \varphi$, $\varphi = \arctg X / R$.

Запишем искомую функцию времени $i(t)$, т. е. мгновенный ток:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi).$$

Таким образом, благодаря комплексному методу расчет цепи гармонического тока удастся выполнить путем решения не дифференциальных, а соответствующих алгебраических уравнений, что значительно упрощает расчеты.

2.4.2. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Величина \underline{Z} представляет собой отношение комплексных амплитуд напряжения и тока и называется **комплексным электрическим сопротивлением**:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = Z e^{j\varphi} = R + (j\omega L - j\frac{1}{\omega C}) = R + jX = Z e^{j\varphi}.$$

Модуль комплексного сопротивления Z называют **полным электрическим сопротивлением**. Оно равно отношению максимальных (или действующих) значений напряжения и тока:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}.$$

Вещественную R и мнимую X части соответственно называют **активной** и **реактивной** составляющими комплексного сопротивления. Все эти составляющие образуют прямоугольный треугольник сопротивлений и связаны соотношениями (рис. 2.9):

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arccos \frac{R}{Z} = \arcsin \frac{X}{Z}.$$

Величину, обратную комплексному электрическому сопротивлению, называют **комплексной электрической проводимостью**:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I_m e^{j\psi_i}}{U_m e^{j\psi_u}} = Y e^{j(\psi_i - \psi_u)} = Y e^{-j\varphi} = G - jB.$$

Модуль комплексной проводимости Y называют **полной электрической проводимостью**. По определению $Y = 1/Z$, а аргумент комплексной проводимости равен $\psi_i - \psi_u = -\varphi$. Величины G и B называют соответственно **активной** и **реактивной** составляющими комплексной проводимости (рис. 2.9).

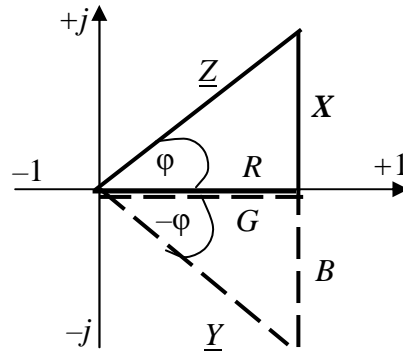


Рис. 2.9. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей

Используя понятие комплексного сопротивления, можно записать:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \underline{Z}, \text{ или } \underline{U} = \underline{I} \underline{Z}.$$

Данное равенство представляет собой **закон Ома** в комплексной форме.

Законы Кирхгофа в комплексной форме можно записать, заменив в них мгновенные значения токов их комплексными изображениями.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме (рис. 2.10, а):

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа, например, для контура ABCA (рис. 2.10, б) при выбранном направлении обхода по часовой стрелке:

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_3 \underline{Z}_3.$$

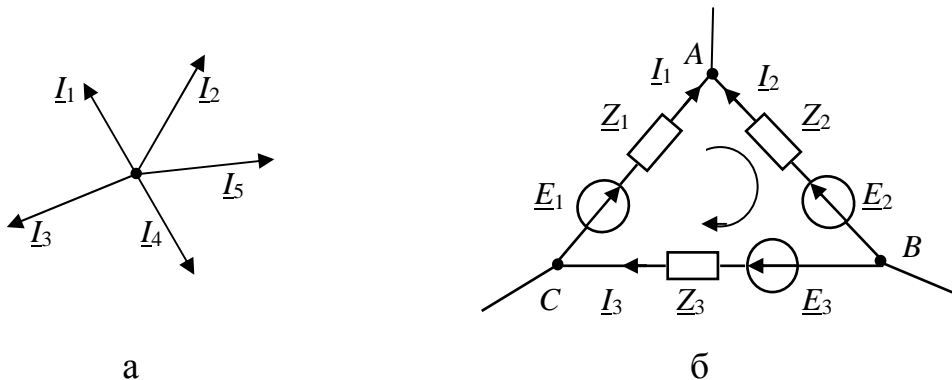


Рис. 2.10. Схемы фрагментов цепи

При этом суммирование производится алгебраически, т. е. с учетом направления обхода контура.

2.4.3. Мощность в цепи гармонического тока

Пусть на участке цепи с сопротивлением $\underline{Z} = R + jX_L$ и напряжением \underline{U} протекает ток \underline{I} . Векторная диаграмма комплексных действующих значений тока и напряжения при *активно-индуктивном* характере сопротивления дана на рис. 2.11.

В показательной форме можно записать: $\underline{U} = U e^{j\psi_u}$; $\underline{I} = I e^{j\psi_i}$.

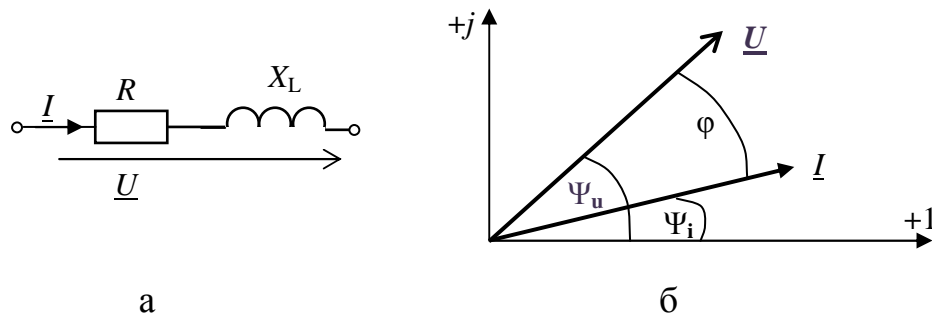


Рис. 2.11. Векторная диаграмма активно-индуктивного участка цепи

Активная мощность участка цепи:

$$P = UI \cos \varphi = U_R I = I^2 R = \frac{U_R^2}{R}, \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность участка цепи:

$$P_X = UI \sin \varphi = U_L I = I^2 X_L = \frac{U_L^2}{X_L}, \text{ вар.}$$

Полная мощность участка цепи $S = UI = \sqrt{P^2 + P_X^2}$ измеряется в **вольт-амперах** (ВА).

Чтобы получить формулу полной мощности в комплексной форме, необходимо комплекс напряжения \underline{U} умножить на сопряженный комплекс тока \underline{I}^* :

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{U} e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{j\varphi} = S e^{j\varphi}.$$

Величину \underline{S} называют **комплексной мощностью**.

В тригонометрической и алгебраической формах эту мощность можно представить так:

$$\underline{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jP_X.$$

На комплексной плоскости векторы S , P и P_X образуют прямоугольный треугольник мощностей (рис. 2.12). В этом треугольнике косинус угла φ называют **коэффициентом мощности**:

$$\cos\varphi = \cos(\underline{U}, \underline{I}) = \frac{P}{S}.$$

Тангенс этого угла называется **коэффициентом реактивной мощности**:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\underline{U}, \underline{I}) = \frac{P_X}{S}.$$

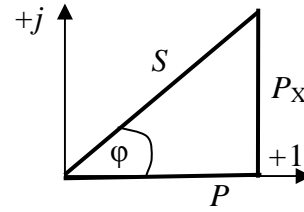


Рис. 2.12. Треугольник мощностей

Качество реактивных элементов оценивают их добротностью Q как отношение реактивного сопротивления к активному:

$$Q_L = X_L/R_L = \omega L/R_L; \quad Q_C = X_C/R_C = 1/\omega C R_C.$$

Здесь R_L – сопротивление провода катушки, R_C – сопротивление изолятора конденсатора. Добротность радиотехнической цепи в целом также оценивается добротностью: для последовательной цепи R - X $Q = \operatorname{tg}\varphi = P_X/P = X/R$; для параллельной цепи $Q = \operatorname{tg}\varphi = B/G$.

В цепи должен соблюдаться **баланс активных, реактивных и комплексных мощностей**. Баланс полных мощностей не рассматривается.

Мощности источников ЭДС следует определять по формулам:

$$P_E = EI \cos(\underline{E}, \underline{I}); \quad P_{XE} = EI \sin(\underline{E}, \underline{I}), \quad \underline{S}_E = \underline{E} \underline{I}^*.$$

Мощности источников тока по формулам:

$$P_J = U_{12} J \cos(\underline{U}_{12}, \underline{J}); \quad P_{XJ} = U_{12} J \sin(\underline{U}_{12}, \underline{J}); \quad \underline{S}_J = \underline{E} \underline{J}^*,$$

где U_{12} – напряжение на клеммах источника тока.

Мощности пассивных элементов удобнее определять по следующим формулам: резисторов – $P = I^2 R$; реактивных элементов – $P_X = I^2 (X_L - X_C)$; комплексную мощность – $\underline{S} = I^2 \underline{Z} = S e^{j\varphi} = P + jP_X$.

2.4.4. Расчет цепей при гармонических воздействиях

Используя комплексный метод, цепи гармонического тока следует рассчитывать путем решения системы алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами и комплексными неизвестными.

Составляются эти системы по законам Кирхгофа, с помощью методов контурных токов или узловых потенциалов.

Можно также использовать и все рассмотренные выше способы преобразования схем электрических цепей.

Рассмотрим на примере схемы (рис. 2.13) порядок расчета разветвленной цепи гармонического тока.

Дано: $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$; $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$, а также параметры цепи $R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, C$.

Определить токи в ветвях, напряжение u_{42} и u_{12} и показания ваттметра. *Последовательность расчета*

1. Выбор положительных направлений токов в ветвях (рис. 2.13).
2. Представление всех параметров схемы в комплексной форме:

$$\underline{E}_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_1}, \quad \underline{E}_2 = \frac{E_{2m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_2}.$$

Комплексные сопротивления ветвей цепи и соответствующая эквивалентная схема цепи (рис. 2.14):

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = Z_1 e^{j\varphi_1}; \quad \underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = Z_2 e^{j\varphi_2};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C} = Z_3 e^{j\varphi_3}.$$

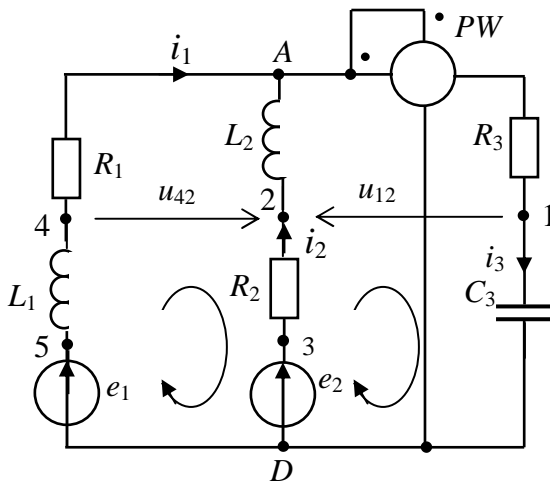


Рис. 2.13. Разветвленная цепь

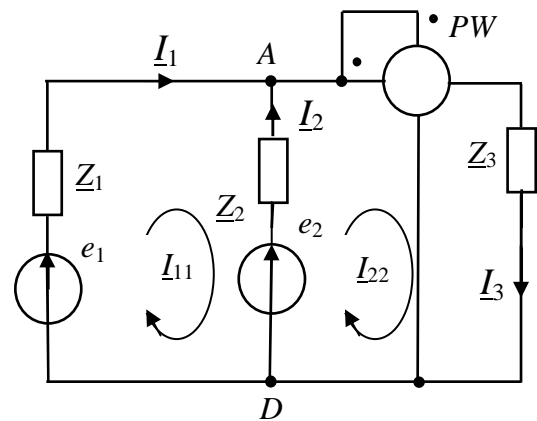


Рис. 2.14. Эквивалентная схема цепи

3. Составим уравнения по законам Кирхгофа в комплексной форме:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \quad \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2; \quad \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{E}_2.$$

Решая данную систему уравнений, найдем комплексные действующие токи цепи $\underline{I}_1 = I_1 e^{-j\psi_{i1}}$, $\underline{I}_2 = I_2 e^{-j\psi_{i2}}$, $\underline{I}_3 = I_3 e^{-j\psi_{i3}}$ и соответствующие мгновенные токи:

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \psi_{i1}); \quad i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t + \psi_{i2}); \quad i_3 = \sqrt{2} I_3 \sin(\omega t + \psi_{i3}).$$

4. Для определения напряжений u_{42} и u_{12} составим уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров 4-А-2-Д-А и 2-А-1-Д-2 (рис. 2.13):

$$\underline{I}_1 R_1 - \underline{I}_2 j\omega L_2 - \underline{U}_{42} = 0, \quad \text{откуда} \quad \underline{U}_{42} = \underline{I}_1 R_1 - \underline{I}_2 j\omega L_2;$$

$$\underline{I}_2 j\omega L_2 + \underline{I}_3 R_3 + \underline{U}_{12} = 0, \quad \text{откуда} \quad \underline{U}_{12} = -\underline{I}_2 j\omega L_2 - \underline{I}_3 R_3.$$

5. Показания ваттметра определяются по формуле:

$$P_W = U_{AD} I_3 \cos(\underline{U}_{AD}, \underline{I}_3).$$

Показания ваттметра равны активной мощности третьей ветви схемы.

Решим задачу **методом контурных токов**, записав систему уравнений по второму закону Кирхгофа для контурных токов \underline{I}_{11} и \underline{I}_{22} (рис. 2.14):

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \underline{I}_{22}\underline{Z}_2;$$

$$\underline{E}_2 = -\underline{I}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3),$$

где $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$, $\underline{Z}_3 = R_3 - j1/\omega C_3$.

Решим полученную систему уравнений:

$$\text{Главный определитель системы: } \underline{\Delta} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Частные определители: } \underline{\Delta}_{11} = \begin{vmatrix} \underline{E}_1 - \underline{E}_2 & -\underline{Z}_2 \\ \underline{E}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{vmatrix}; \underline{\Delta}_{22} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{E}_2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Контурные токи: } \underline{I}_{11} = \frac{\underline{\Delta}_{11}}{\underline{\Delta}}; \underline{I}_{22} = \frac{\underline{\Delta}_{22}}{\underline{\Delta}}.$$

Комплексные токи в ветвях: $\underline{I}_1 = \underline{I}_{11}$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_{22} - \underline{I}_{11}$; $\underline{I}_3 = \underline{I}_{22}$.

Проведем расчет **методом узловых потенциалов** (методом двух узлов).

$$\text{Примем } \varphi_D = 0. \text{ Тогда } \varphi_A = \underline{U}_{AD} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

$$\text{Токи цепи: } \underline{I}_1 = \frac{-\underline{U}_{AD} + \underline{E}_1}{\underline{Z}_1}; \underline{I}_2 = \frac{-\underline{U}_{AD} + \underline{E}_2}{\underline{Z}_2}; \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{AD}}{\underline{Z}_3}.$$

Рассчитаем цепь **методом преобразования**. Заменяем ветви с источниками ЭДС эквивалентным источником ЭДС и эквивалентным сопротивлением:

$$\underline{E}_{12} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \text{ и эквивалентным сопротивлением}$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \text{ (рис. 2.15).}$$

$$\text{Найдем ток } \underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_3}.$$

Напряжение $\underline{U}_{AD} = \underline{I}_3 \underline{Z}_3$.

$$\text{Токи } \underline{I}_1 = \frac{-\underline{U}_{AD} + \underline{E}_1}{\underline{Z}_1}; \underline{I}_2 = \frac{-\underline{U}_{AD} + \underline{E}_2}{\underline{Z}_2}.$$

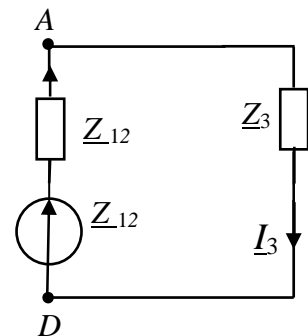


Рис. 2.15. Эквивалентная схема цепи

Пример 2.1. Для цепи (рис. 2.16), в которой $u = 14,1\sin 314t$ В, $R = 3$ Ом, $X_L = 10$ Ом, $X_C = 6$ Ом, определить токи и напряжения на отдельных элементах цепи, активную, реактивную и полную мощности.

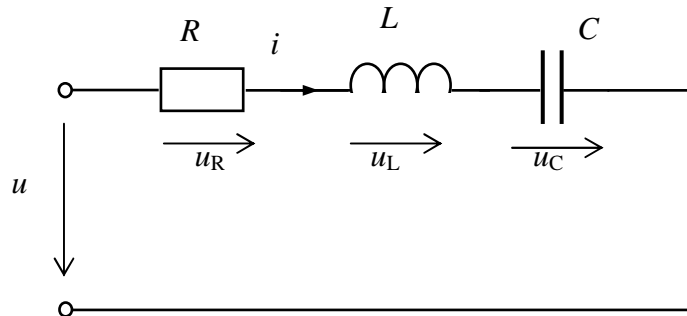


Рис. 2.16. Заданная схема цепи

Решение.

Запишем напряжение источника и сопротивление цепи в комплексной форме:

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u} = \frac{14,1}{\sqrt{2}} = 10 \text{ В}; \quad \underline{Z} = R + jX_L - jX_C = 3 + j10 - j6 = 3 + j4 = 5e^{j53^\circ} \text{ Ом.}$$

Определим ток в цепи и напряжения на элементах цепи:

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z} = 10 / 5e^{j53^\circ} = 2e^{-j53^\circ} \text{ А}; \quad \underline{U}_R = \underline{I}R = 2e^{-j53^\circ} \cdot 3 = 6e^{-j53^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_L = \underline{I}jX_L = 2e^{-j53^\circ} j10 = 20e^{j37^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_C = \underline{I}(-jX_C) = 2e^{-j53^\circ} (-j6) = 12e^{-j143^\circ} \text{ В.}$$

Запишем мгновенные значения тока и напряжений:

$$i = 2,82 \sin(314t - 53^\circ) \text{ А}; \quad u_R = 8,48 \sin(314t - 53^\circ) \text{ В};$$

$$u_L = 28,2 \sin(314t + 37^\circ) \text{ В}; \quad u_C = 16,97 \sin(314t - 143^\circ) \text{ В.}$$

Определим мощности цепи:

$$S = UI = 10 \cdot 2 = 20 \text{ В} \cdot \text{А}; \quad P = UI \cos(\underline{U} \wedge \underline{I}) = 20 \cos 53^\circ = 12 \text{ Вт};$$

$$P_x = UI \sin(\underline{U} \wedge \underline{I}) = 10 \cdot 2 \sin(53^\circ) = 16 \text{ вар};$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = 10 \cdot 2e^{j53^\circ} = 20e^{j53^\circ} = 12 + j16 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Пример 2.2. В электрической цепи (рис. 2.17а) дано:

$$u = 154,85 \sin(628t + 35^\circ) \text{ В}; \quad R_1 = 20 \text{ Ом}; \quad R_2 = 40 \text{ Ом}; \quad R_3 = 20 \text{ Ом}; \quad L_1 = 0,1 \text{ Гн};$$

$$C_1 = 100 \text{ мкФ}; \quad L_2 = 0,05 \text{ Гн}; \quad C_3 = 60 \text{ мкФ.}$$

Определить комплексные, действующие и мгновенные токи, активную, реактивную, полную и комплексные мощности и проверить выполнение баланса мощностей. Построить векторную топографическую диаграмму цепи.

Решение.

Рассчитаем токи цепи двумя методами: методом преобразований и методом узловых потенциалов.

1. Преобразуем заданную схему цепи в эквивалентную схему с комплексными сопротивлениями (рис. 2.17, б, в):

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} - jX_{C1} = 20 + j62,8 - j15,9 = 20 + j46,9 = 51e^{j67^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 40 + j31,4 = 51e^{j38^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = 10 - j26,5 = 28,32e^{-j69^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{51e^{j38^\circ} 28,32e^{-j69^\circ}}{51e^{j38^\circ} + 28,32e^{-j69^\circ}} = 28,3e^{-j36,8^\circ} = 22,6 - j17,02 \text{ Ом}.$$

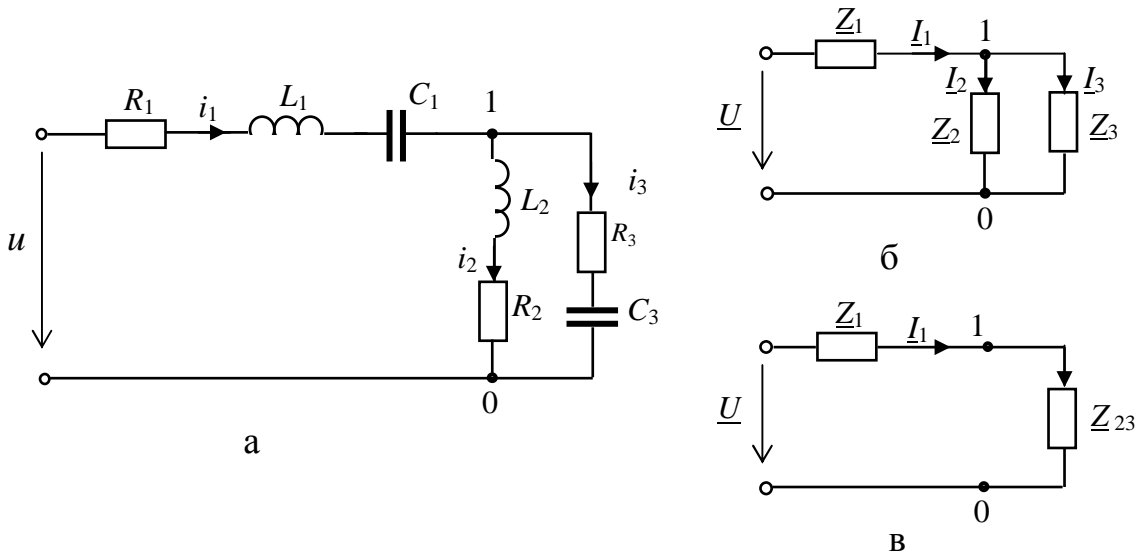


Рис. 2.17. Исходная и эквивалентные схемы цепи

2. Определим комплексные токи в цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23}} = \frac{109,5e^{j35^\circ}}{20 + j46,9 + 23 - j17,2} = \frac{109,5e^{j35^\circ}}{52,25e^{j35^\circ}} = 2,1 \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_2} = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 2 \cdot \frac{28,36e^{-j69^\circ}}{40 + j31,4 + 10 - j26,5} = 1,12e^{-j75^\circ} = 0,145 - j0,542 \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_3} = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 2 \cdot \frac{50,85e^{j38^\circ}}{40 + j31,4 + 10 - j26,5} = 2,0e^{j29^\circ} = 0,888 + j0,492 \text{ А}.$$

3. Запишем мгновенные токи:

$$i_1 = 2\sqrt{2} \sin 628t = 2,83 \sin 628t;$$

$$i_2 = 1,12\sqrt{2} \sin(628t - 75^\circ) = 1,56 \sin(628t - 75^\circ);$$

$$i_3 = 2\sqrt{2} \sin(628t + 33^\circ) = 2,82 \sin(628t + 29^\circ).$$

При решении задачи по методу двух узлов примем потенциал узла $\varphi_0 = 0$, тогда потенциал первого узла и напряжение \underline{U}_{10} будут равны:

$$\varphi_1 = \underline{U}_{10} = \frac{\underline{U} \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{109,5e^{j35^\circ} 0,0196e^{-j67^\circ}}{0,0352e^{j5,36^\circ}} = 60,118e^{-j27,2^\circ},$$

где $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = 0,0196e^{-j67^\circ} = 0,0077 - j0,018$, См, $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = 0,019e^{-j38^\circ} = 0,0155 - j0,018$, См, $\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3 = 0,0353e^{j69,35^\circ} = 0,0124 + j0,033$ См;

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0,0356 + j0,003 = 0,0357e^{-j4,8^\circ} \text{ См.}$$

Токи цепи определяем по закону Ома для участка цепи:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_2} = \frac{61e^{-j37,4^\circ}}{50,85e^{j38^\circ}} = 1,14e^{-j75,2^\circ} \text{ А; } \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_3} = \frac{58,28e^{-j27,2^\circ}}{28,32e^{-j69^\circ}} = 2,06e^{j31,6^\circ} \text{ А.}$$

4. Активная мощность цепи:

$P_{\text{ист}} = UI_1 \cos(\psi_u - \psi_{i1}) = 109,5 \cdot 2 \cos 35^\circ = 179,4$ Вт – активная мощность источника;

$P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 4 \cdot 20 + 1,3 \cdot 40 + 4,24 \cdot 10 = 175$ Вт – активная мощность приемников. $P_{\text{ист}} \approx P_{\text{пр}}$ – баланс активных мощностей выполняется.

5. Реактивная мощность цепи:

$P_{\text{х.ист}} = UI_1 \sin(\psi_u - \psi_{i1}) = 109,5 \cdot 2 \sin 35^\circ = 125,6$ вар – реактивная мощность источника;

$P_{\text{х.пр}} = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 - I_3^2 X_3 = 4 \cdot 46,9 + 1,3 \cdot 31,4 - 4,24 \cdot 26,54 = 122$ вар – реактивная мощность приемников;

$P_{\text{х.ист}} \approx P_{\text{х.пр}}$ – баланс реактивных мощностей выполняется.

6. Комплексная мощность:

$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{U} \underline{I}_1^* = 109,5e^{j35^\circ} \cdot 2 = 219e^{j35^\circ} = 183 + j119$ В·А = $218,3219e^{j33^\circ}$ – комплексная мощность источника;

$\underline{S}_{\text{пр}} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = 180,66 + j111,9 = 219e^{j33^\circ}$ В·А – комплексная мощность приемника, где $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = 2 \cdot 50,96e^{j67^\circ} = 102e^{j67^\circ}$ В; $\underline{I}_1^* = 2$ А.

Баланс комплексных мощностей выполняется.

2.5. Частотные характеристики и частотные функции активно-реактивных цепей

Свойства радиотехнических цепей при гармонических воздействиях изучаются на основе их частотных и фазовых характеристик. При этом любую схему цепи представляют в виде фрагмента с двумя входными и двумя выходными полюсами, который называют **пассивным двухполюсником** (рис. 2.18).

Частотные функции (характеристики) подразделяются на **входные** и **передаточные функции**.

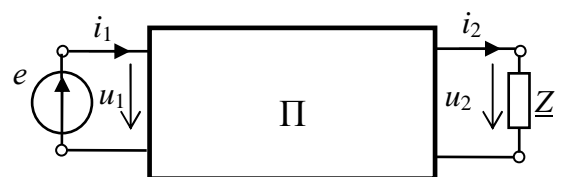


Рис. 2.18. Пассивный двухполюсник

2.5.1. Входные частотные функции

Входные частотные функции представляют собой отклик и воздействие на входной паре полюсов:

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \text{ Ом}; \quad \underline{Y}_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)} \text{ См.}$$

Очевидно, что они являются входным сопротивлением или входной проводимостью.

Частотными характеристиками цепи с последовательным соединением активного R и реактивного X сопротивлений являются входные функции вида:

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = Z_{\text{вх}}(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R + jX \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \text{ Ом},$$

где $Z_{\text{вх}}(\omega) = \sqrt{R^2 + X^2} = R\sqrt{1 + Q_X^2}$ Ом, $Q_X = \frac{|X|}{R}$ – добротность цепи;

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{X}{R}\right) \text{ – фазочастотная характеристика.}$$

При заданном напряжении \underline{U} можно исследовать зависимость тока от частоты:

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{\underline{U}_1}{R\sqrt{1 + Q_X^2}} = \frac{\underline{I}_R}{\sqrt{1 + Q_X^2}} \text{ А},$$

где $\underline{I} = \underline{U}_1/R$ – ток в цепи при замкнутном реактивном сопротивлении.

Нормированное (безразмерное) значение тока:

$$n(\omega) = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_X^2}} = \frac{R}{Z_{\text{вх}}(\omega)}.$$

Для цепи RL (рис. 2.19, а) добротность цепи:

$$Q_L = \frac{\omega L}{R} = \omega\tau,$$

где $\tau = L/R$ – постоянная времени цепи.

$$\text{Нормированный ток } n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_L^2}}.$$

Графики частотных характеристик данной цепи приведены на рис. 2.19, б.

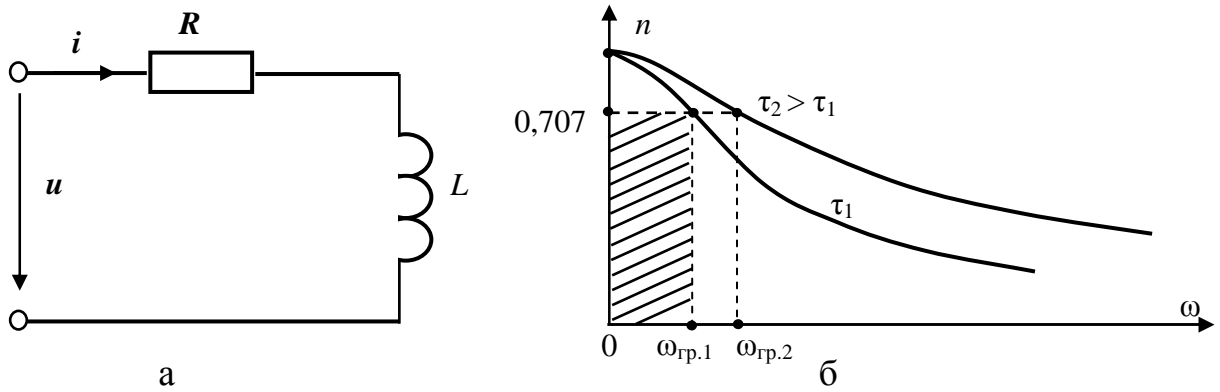


Рис. 2.19. Цепь и ее частотная характеристика: а – цепь RL , б – частотная характеристика цепи

По частотным характеристикам определяется **полоса пропускания** цепи, под которой понимают область частот, в пределах которой ток остается не меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ максимального значения.

Область частот вне полосы пропускания является **полосой подавления**. На границе этих полос $n_{гр}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$. Частота, соответствующая этой границе, является граничной частотой $\omega_{гр} = 1/\tau_L$.

Фазочастотная характеристика цепи RL $\varphi(\omega) = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg(\omega\tau_L)$ (уравнение фазовой характеристики) приведена на рис. 2.20.

Для цепи RC добротность цепи:

$$Q_c = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{\omega\tau_c},$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи.

Нормированный ток $n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\omega^2\tau_c^2}}$.

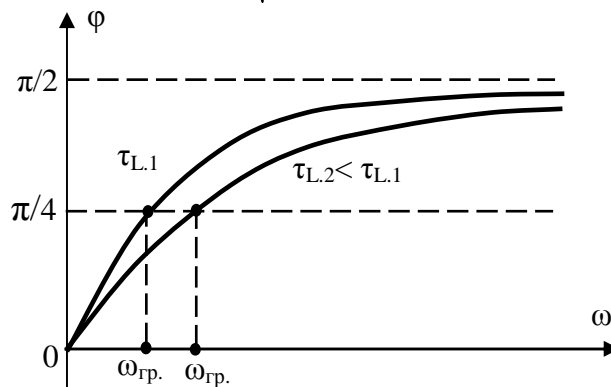
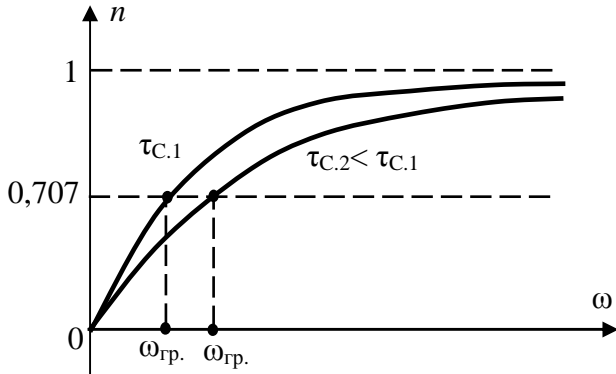
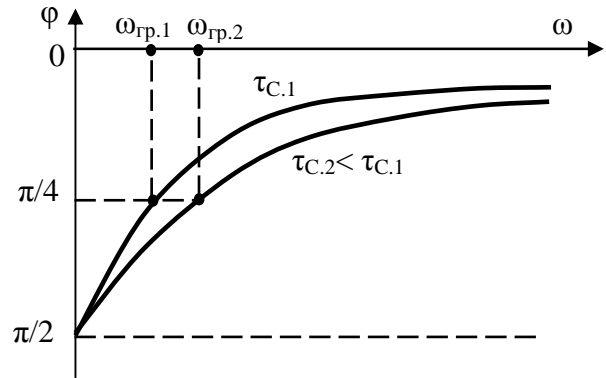


Рис. 2.20. ФЧХ цепи RL

Графики частотных характеристик данной цепи приведены на рис. 2.21. Фазочастотная характеристика цепи RC (уравнение фазовой характеристики) $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{X_C}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega\tau_C}$ приведена на рис. 2.22.

Рис. 2.21. АЧХ цепи RC Рис. 2.22. ФЧХ цепи RC

При частоте $\omega = \omega_{гр} = 1/\tau = 1/RC$ угол $\varphi = -\pi/2$.

2.5.2. Передаточные частотные функции

Передаточные функции в общем случае представляют собой отношение отклика на воздействие источника на входе цепи. При гармоническом источнике передаточными функциями являются:

- комплексное передаточное сопротивление $\frac{U_2}{I_1} = \underline{Z}_{1-2}(j\omega)$;
- комплексная передаточная проводимость $\underline{Y}_{1-2}(j\omega) = \frac{I_2}{U_1}$;
- передаточная функция по току $\underline{K}_i(j\omega) = \frac{I_2}{I_1}$ (комплексный коэффициент передачи по току);
- передаточная функция по напряжению $\underline{K}_u(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}$ (комплексный коэффициент передачи по напряжению).

Пример 2.3. Дана схема делителя напряжения (рис. 2.23). Определить передаточную функцию по напряжению при заданных напряжениях на входе \underline{U}_1 и выходе \underline{U}_2 и комплексных сопротивлениях \underline{Z}_a , \underline{U}_b .

$$\underline{K}_u(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\underline{Z}_b}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b} = \frac{\underline{Z}_b}{\underline{Z}_{\text{вх}}}.$$

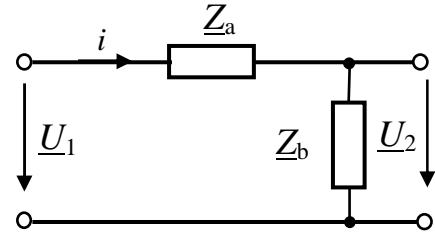
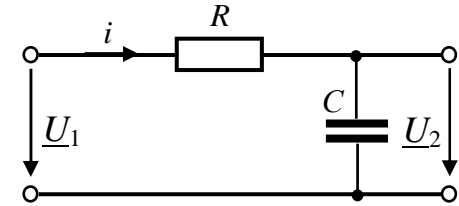


Рис. 2.23. Схема делителя напряжения

Пример 2.4. Определить передаточную функцию по напряжению цепи RC (рис. 2.24).

Решение.

$$\underline{K}_u(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2 e^{j\psi_{U_2}}}{U_1 e^{j\psi_{U_1}}} = K_u(j\omega) e^{j\psi_{U_2} - j\psi_{U_1}}.$$

Рис. 2.24. Схема цепи RC

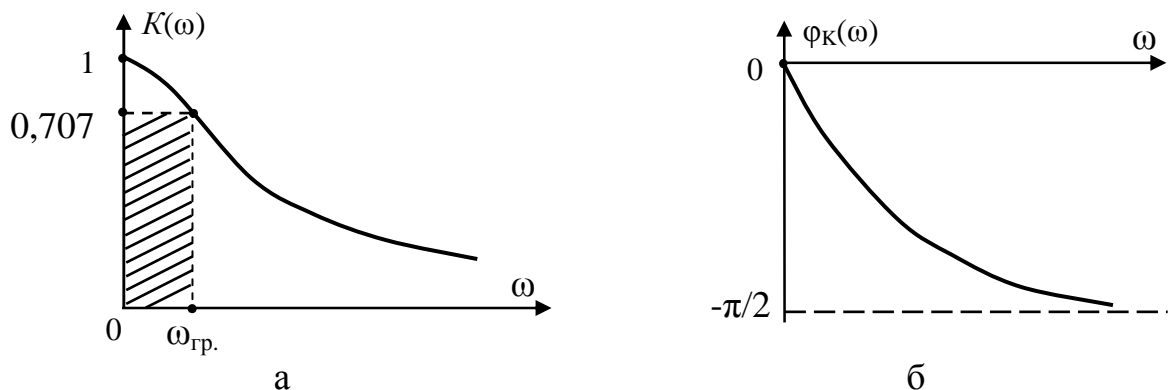
$$\text{Кроме того, } \underline{K}_u(j\omega) = \frac{\underline{Z}_b}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_C}.$$

$$\text{Амплитудно-частотная характеристика: } K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_C^2}}.$$

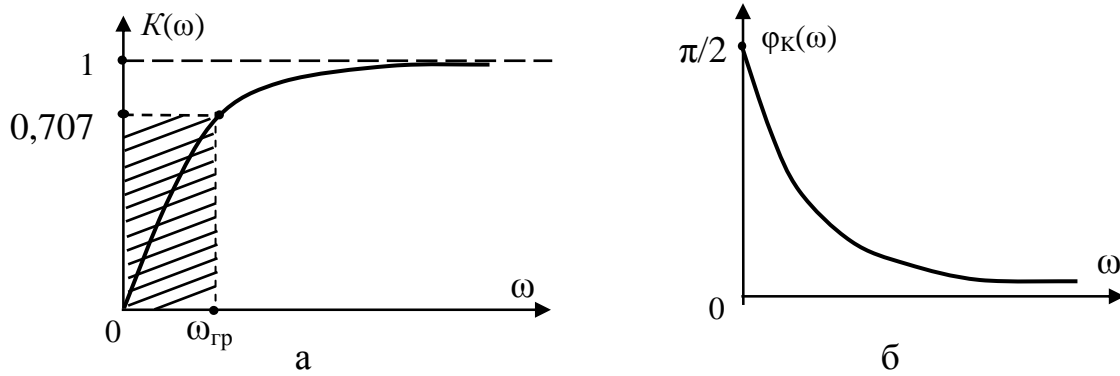
Фазочастотная характеристика: $\varphi_K(\omega) = \text{arctg}(-\omega\tau_C)$.

Графики АЧХ и ФЧХ цепи RC приведены на рис. 2.25.

Рассматриваемая цепь пропускает частоты меньше $\omega_{\text{гр}} = 1/RC$ и подавляет более высокие частоты.

Рис. 2.25. АЧХ (а) и ФЧХ (б) цепи RC

Аналогично для цепи RL получим выражения для АЧХ, ФЧХ и соответствующие им графики (рис. 2.26).

Рис. 2.26. АЧХ (а) и ФЧХ (б) цепи RL

Цепь RL пропускает частоты выше $\omega_{гр} = R/L$.

2.6. Интегрирующие и дифференцирующие цепи

Для выполнения операций интегрирования и дифференцирования изменяющихся величин в вычислительной технике, моделирующих устройствах, в устройствах автоматики и т. п. используются интегрирующие и дифференцирующие устройства в виде цепочек RC и RL .

2.6.1. Интегрирующие цепи

Рассмотрим цепь с последовательным соединением элементов RC (рис. 2.27). Уравнение цепи:

$$iR + u_C = u_{вх}, \text{ где } u_{вх} = u_C = u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

При $Ri \gg u_C$ $u_{вх} \approx Ri$ и $i \approx u_{вх}/R$.

$$\text{Следовательно, } u_{вх} = \frac{1}{CR} \int u_{вх} dt = \frac{1}{\tau} \int u_{вх} dt.$$

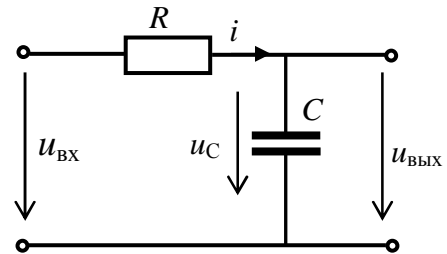


Рис. 2.27. Интегрирующая цепь

Таким образом, в данной цепи выходное напряжение есть интеграл от входного напряжения.

Для входного напряжения синусоидальной формы условием выполнения этого равенства является $Ri \gg u_C$ или $RI \gg X_C I$, т. е. $R \gg X_C = 1/\omega C$ или $\omega RC \gg 1$.

Так как $\omega = 2\pi/T$, а $\tau = RC$, то условие интегрирования входного напряжения запишется так: $2\pi\tau \gg T$.

Для несинусоидальных периодических функций это условие должно выполняться для основной (первой) гармоники.

2.6.2. Дифференцирующие цепи

Рассмотрим цепь с последовательным соединением элементов CR (рис. 2.28). Уравнение цепи: $iR + u_C = u_{\text{вх}}$, где $u_{\text{вых}} = Ri$.

При $Ri \ll u_C$ $u_{\text{вх}} \approx u_C$.

Следовательно, $i = C \frac{du_C}{dt} \gg C \frac{du_{\text{вх}}}{dt}$.

Тогда получим $u_{\text{вых}} = Ri \approx RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt} = \tau \frac{du_{\text{вх}}}{dt}$,

т. е. выходное напряжение равно дифференциалу от входного напряжения.

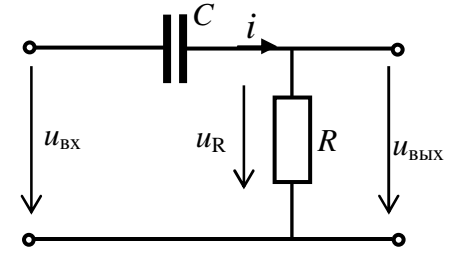


Рис. 2.28. Дифференцирующая цепь

Для входного напряжения синусоидальной формы условием выполнения этого равенства является $U_R \ll U_C$ или $RI \ll X_C I$, т. е. $R \ll X_C = 1/\omega C$ или $\omega RC \ll 1$ и $2\pi t \ll T$.

Для несинусоидальных периодических функций это условие должно выполняться для основной (первой) гармоники.

2.7. Резонансы в электрических цепях

Резонансом называют такой режим работы участков электрической цепи с индуктивными катушками и конденсаторами, при котором угол сдвига фаз между напряжением и током на этих участках равен нулю ($\varphi = 0$).

2.7.1. Последовательный колебательный контур.

Резонанс напряжений

На участках цепи с последовательно соединенными индуктивным и емкостным элементами (в последовательном колебательном контуре) комплексное сопротивление цепи равно $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + j(\omega L - 1/\omega C)$ (рис. 2.29).

По определению резонансу соответствует условие:

$$\varphi = \arctg \frac{(X_L - X_C)}{R} = 0.$$

Это условие выполняется для данной цепи при $X_L = X_C$ или $\omega L = 1/\omega C$.

Так как при резонансе $X_L = X_C$, то напряжение на катушке будет равно напряжению на конденсаторе: $U_L = U_C$.

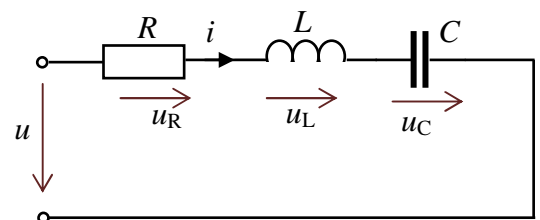


Рис. 2.29. Последовательный колебательный контур

Поэтому резонанс в такой цепи называется **резонансом напряжений**.

При заданных значениях L и C из равенства $X_L = X_C = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$

найдем, что резонанс имеет место при угловой частоте $\omega_0 = \frac{I}{\sqrt{LC}}$, которую называют **резонансной угловой частотой**, а частоту $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ – резонансной частотой колебаний.

При заданной частоте ω и емкости C резонанс возникает при $L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}$.

При заданной частоте ω и индуктивности L – при $C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}$.

Сопротивление реактивных элементов при резонансе называется **характеристическим** (волновым) **сопротивлением** контура:

$$\rho = X_{L0} = X_{C0} \text{ или } \rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Отношение характеристического (волнового) сопротивления к активному сопротивлению контура называется **добротностью** последовательного колебательного контура, или коэффициентом резонанса:

$$Q = \frac{\rho}{R} \text{ или } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При резонансе контур R, L, C имеет **чисто активное сопротивление**.

Полное сопротивление участка цепи при резонансе равно активному сопротивлению, т. е. минимально: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \rightarrow Z_0 = R$.

Ток достигает **максимального значения**: $I_0 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R}$.

Резонансный ток при определенных условиях может быть опасен, так как может привести к перегреву элементов цепи и выводу их из строя. Напряжения на элементах контура равны: $U_{0R} = I_0 R$; $U_{0L} = I_0 X_L$; $U_{0C} = I_0 X_C$.

В момент резонанса напряжение на резисторе U_{0R} равно напряжению на входе контура U и совпадает с ним по фазе: $U = \sqrt{U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2} = U_{0R}$.

Тогда в случае $X_L = X_C \gg R$ получим, что $U_{0L} = U_{0C} \gg U_{0R} = U$, т. е. напряжения на реактивных элементах могут значительно превышать напряжение источника, так как возникает усиление напряжения на величину добротности:

$$\frac{U_{0L}}{U} = \frac{U_{0C}}{U} = \frac{I_0 \rho}{I_0 R} = \frac{\rho}{R} = Q.$$

Следовательно, $U_{0L} = U_{0C} = QU$.

Реально добротность LC -контура Q достигает 200...500. Поэтому значительное повышение напряжения на реактивных элементах при резонансе может привести к пробое изоляции электротехнических устройств и представляет опасность для человека.

В радиотехнических цепях явление резонанса напряжений используется для выделения и усиления слабых сигналов.

Активная мощность при резонансе максимальна: $P = I^2 R = UI \cos \varphi$.

Реактивная мощность равна нулю: $|P_{XL}| = |P_{XC}|$, $P_X = P_{XL} - P_{XC} = 0$.

При резонансе для источника ЭДС схема колебательного контура эквивалентна схеме с одним резистивным элементом.

Частотные характеристики представляют собой зависимости от частоты основных параметров контура (X_L , X_C , X , Z) (рис. 2.30):

$$X_L = \omega L; X_C = 1/\omega C; X = X_L - X_C;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Резонансные кривые – это зависимости от частоты тока и напряжений на элементах последовательного контура (рис. 2.31):

$$I = U/Z; U_R = IR; U_L = IX_L; U_C = IX_C.$$

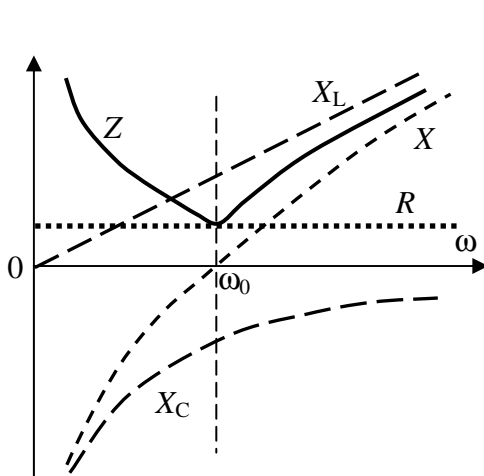


Рис. 2.30. Частотные характеристики

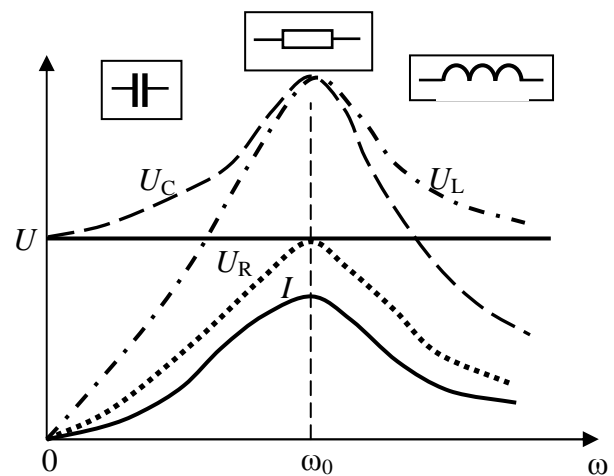


Рис. 2.31. Резонансные кривые

График зависимости тока от частоты показывает, что данная цепь обладает избирательными свойствами, т. е. обладает наименьшим сопротивлением для тока той частоты, которая наиболее близка к ее резонансной частоте ω_0 .

Векторная диаграмма последовательного колебательного контура в момент резонанса приведена на рис. 2.32.

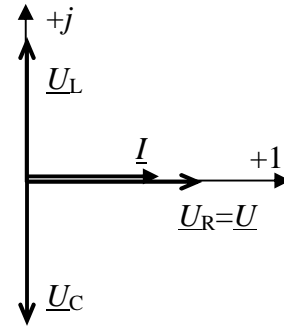


Рис. 2.32. Векторная диаграмма

На частотах $\omega < \omega_0$ контур носит индуктивный характер, при $\omega > \omega_0$ – емкостной характер, при $\omega = \omega_0$ – активный характер.

В радиотехнических цепях последовательный колебательный контур используется как четырехполюсник в двух вариантах, когда выходное напряжение снимается либо с индуктивности, либо с емкости (рис. 2.33).

В момент резонанса ($u_L = u_C$) при снятии напряжения с конденсатора (рис. 2.33, а) коэффициент передачи по напряжению в цепи RC равен:

$$K_{C0}(j\omega_0) = \frac{U_{C0}}{U_1} = \frac{-jX_{C0}}{Z_{\text{вх.0}}} = -j \frac{X_{C0}}{R} = -j \frac{\rho}{R} = -jQ.$$

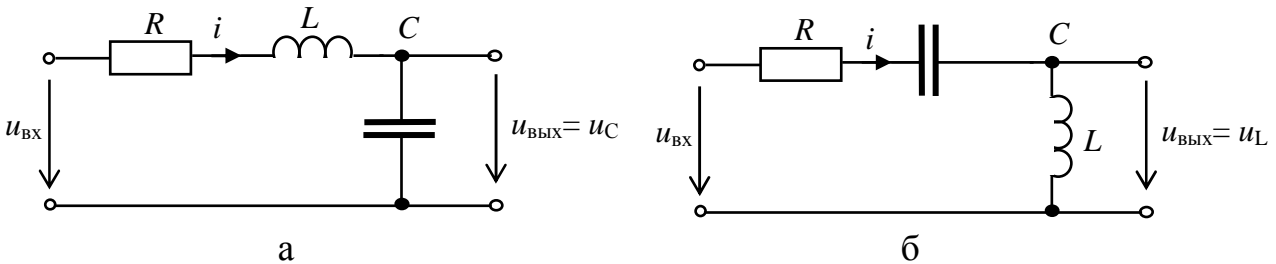


Рис. 2.33. Использование последовательного колебательного контура в радиотехнике

Соответственно при снятии напряжения с индуктивности (рис. 2.33, б) найдем:

$$K_{L0}(j\omega_0) = \frac{U_{L0}}{U_1} = \frac{-jX_{L0}}{Z_{\text{вх.0}}} = j \frac{X_{L0}}{R} = j \frac{\rho}{R} = jQ.$$

Таким образом, при резонансе модули коэффициентов передачи в обеих схемах равны добротности контура: $K_{C0}(\omega_0) = K_{L0}(\omega_0) = Q$.

Пример 2.5. В последовательном колебательном контуре $u = 14,1\sin 314t$ В; $R = 3$ Ом; $X_L = 10$ Ом, $X_C = 10$ Ом.

Определить ток в цепи и напряжения на элементах, мощности цепи, добротность контура. Построить векторную диаграмму.

Решение.

Напряжение источника и сопротивление цепи в комплексной форме:

$$\underline{U} = U e^{j\psi} = 14,1 / \sqrt{2} = 10 \text{ В};$$

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = 3 + j10 - j10 = 3 \text{ Ом}.$$

Определяем действующий ток в цепи и напряжения:

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z} = 10 / 3 = 3,33 \text{ А};$$

$$\underline{U}_R = \underline{I}R = 3,33 \cdot 3 = 10 \text{ В};$$

$$\underline{U}_L = \underline{I}jX_L = 3,33j10 = 33,3 e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}(-jX_C) = 3,33(-j10) = 33,3 e^{-j90^\circ} \text{ В}.$$

В цепи резонанс напряжений.

Добротность контура $Q = U_L / U = 33,3 / 10 = 3,33$.

Построим векторную диаграмму (рис. 2.34).

Запишем мгновенные значения тока

и напряжений: $i = 4,7\sin 314t$ А; $u_R = 14,1\sin 314t$;

$u_L = 46,951\sin(314t + 90^\circ)$; $u_C = 46,95\sin(314t - 90^\circ)$.

Определим мощности цепи:

$$P = UI \cos(\underline{U} \wedge \underline{I}) = 10 \cdot 3,33 \cos 0^\circ = 33,3 \text{ Вт};$$

$$P_X = UI \sin(\underline{U} \wedge \underline{I}) = 10 \cdot 3,33 \sin 0^\circ = 0; S = UI = 10 \cdot 3,33 = 33,3 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

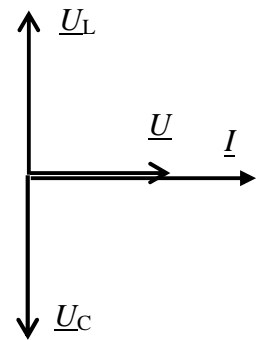


Рис. 2.34. Векторная диаграмма

2.7.2. Параллельный колебательный контур.

Резонанс токов

Резонанс на участках цепи с параллельным соединением элементов L и C (параллельный колебательный контур, рис. 2.35) называется *резонансом токов*.

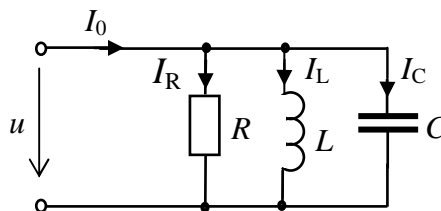


Рис. 2.35. Параллельный колебательный контур

Комплексная проводимость такого участка цепи:

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = Y_R + Y_L + Y_C = G - j(B_L - B_C) = G - jB = Ye^{-j\varphi},$$

где $\varphi = \arctg \frac{(B_L - B_C)}{G}$.

Тогда условием резонанса в параллельном колебательном контуре ($\varphi = 0$) является равенство нулю реактивной проводимости участка цепи:

$$B = B_L - B_C = 0 \text{ или } \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C, \text{ откуда } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

На рис. 2.36 приведены частотные характеристики параллельного контура.

Общий ток I_0 в момент резонанса **минимален** и определяется напряжением на входе участка цепи и его активной проводимостью: $I_0 = I_R = UG$.

При $B_L = B_C \gg G$ токи $I_L = I_C \gg I_R$.

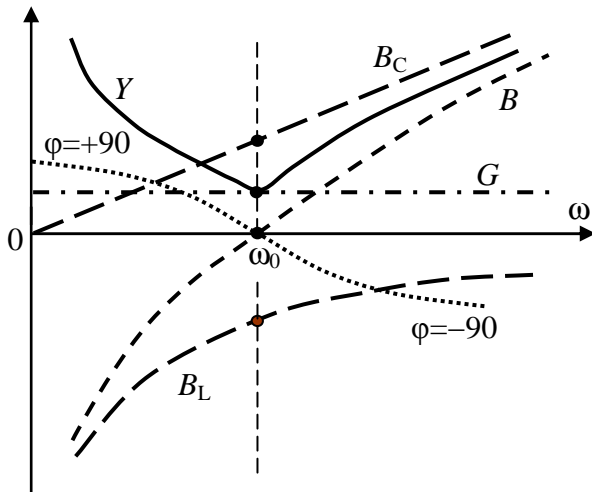


Рис. 2.36. Частотные характеристики

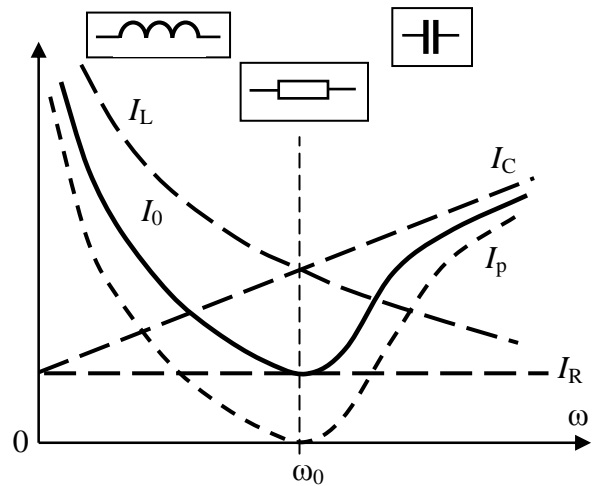


Рис. 2.37. Резонансные кривые

Резонансные кривые (рис. 2.37) повторяют форму частотных характеристик при изменении их масштаба на величину соответствующей проводимости.

На практике параллельный колебательный контур чаще всего состоит из параллельно соединенных **реальных** конденсатора и катушки индуктивности, т. е. в каждой из ветвей схемы содержится резистор (рис. 2.38, а).

Схему на рис. 2.38, а можно преобразовать в схему на рис. 2.38, б и 2.38, в по формулам:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; \quad B_L = \frac{\omega L}{Z_1^2}; \quad B_C = \frac{1/\omega C}{Z_2^2},$$

где $Z_1^2 = R_1^2 + (\omega L)^2$, а $Z_2^2 = R_2^2 + (1/\omega C)^2$.

Условие резонанса в реальном колебательном контуре (рис. 2.38, в):

$$B_L = B_C \text{ или } \frac{\omega_p L}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} = \frac{1/(\omega_p C)}{R_1^2 + (1/\omega_p C)^2},$$

где ω_p – угловая резонансная частота.

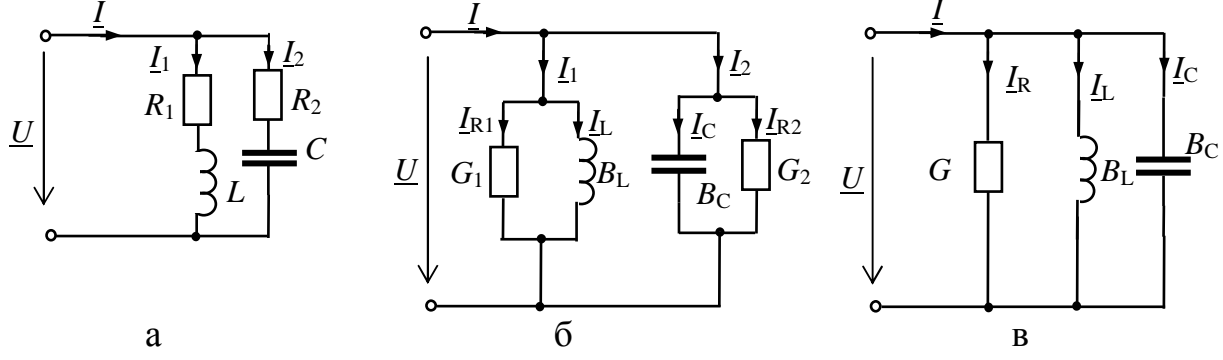


Рис. 2.38. Схемы реальных параллельных колебательных контуров

После преобразований получим: $\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}},$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$

Если известны ω_p и $X_L = \omega_p L$, то значение X_C , при котором в цепи

наблюдается резонанс, равно: $X_{C_{1,2}} = \frac{Z_1^2}{2X_L} \pm \sqrt{\left(\frac{Z_1^2}{2X_L}\right)^2 - R_2^2}.$

В этом случае задача имеет два решения при $Z_1^2/2X_L > R_2$ и одно решение при $Z_1^2/(2X_L) = R_2$. Если $Z_1^2/2X_L < R_2$, резонанса не будет при любой емкости конденсатора.

Пример 2.6.

В реальном параллельном колебательном контуре (рис. 2.39) $u = 14,1 \sin \omega t$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $R_3 = 8 \text{ Ом}$, $L = 40 \text{ мГн}$, $C = 250 \text{ мкФ}$.

Определить резонансную частоту, токи в ветвях цепи и построить векторную диаграмму в момент резонанса.

Решение.

Резонансная частота цепи:

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{L/C - R_2^2}{L/C - R_3^2}},$$

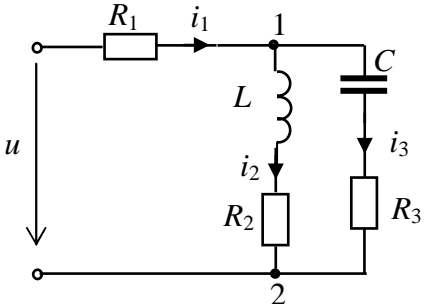


Рис. 2.39. Заданная схема параллельного колебательного контура

$$\text{где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{40 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \cdot 10^{-6}}} = 316,2 \text{ с}^{-1};$$

$$\rho^2 = L/C = 4 \cdot 10^{-3} / 250 \cdot 10^{-6} = 160 \text{ Ом}^2.$$

$$\text{Тогда } \omega_p = 316,2 \sqrt{\frac{160 - 9}{160 - 64}} = 396,2 \text{ с}^{-1} \quad (f_p = \omega_p / 2\pi = 396,2 / 2\pi = 63,1 \text{ Гц}).$$

Сопротивления реактивных элементов:

$$X_L = \omega_p L = 396,2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 15,863 \text{ Ом};$$

$$X_C = 1/\omega_p C = 10^6 / 396,2 \cdot 250 = 7,2 \text{ Ом}.$$

Комплексные сопротивления ветвей цепи:

$$\underline{Z}_2 = 3 + j15,863 = 16,144 e^{j79,30^\circ}, \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = 8 - j7,2 = 10,763 e^{-j42^\circ} \text{ Ом}.$$

Определяем проводимости ветвей:

$$\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2 = 1/16,144 e^{j79,3^\circ} = 0,0115 - j0,061 = 0,062 e^{-j79,3^\circ} = G_2 - jB_L \text{ См};$$

$$\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3 = 1/10,76 e^{-j42^\circ} = 0,069 + j0,061 = 0,093 e^{j42^\circ} = G_3 + jB_C \text{ См};$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0,0805 \text{ См}; \quad \underline{Z} = 1/\underline{Y} = 12,42 \text{ См}.$$

Эквивалентные схемы цепи даны на рис. 2.40, а, б, в.

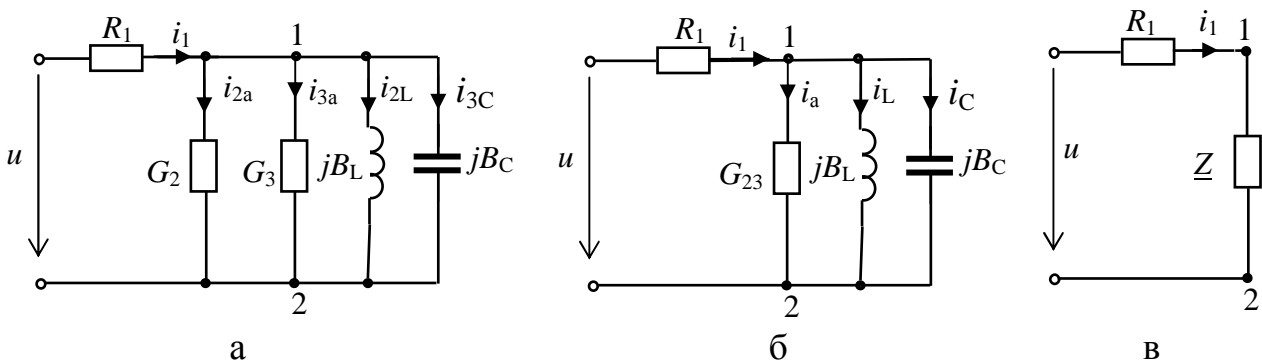


Рис. 2.40. Эквивалентные схемы колебательного контура

Определяем токи цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R_1 + \underline{Z}} = \frac{10}{10 + 12,42} = 0,446 \text{ А}; \quad \underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \underline{Z} = 0,446 \cdot 12,42 = 5,54 \text{ В};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_{12} \underline{Y}_2 = 5,54 \cdot 0,062 e^{-j79,3^\circ} = 0,343 e^{-j79,3^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_{12} \underline{Y}_3 = 5,54 \cdot 0,093 e^{j42^\circ} = 0,51 e^{j42^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{2a} = \underline{U}_{12} G_2 = 5,54 \cdot 0,0115 = 0,063 \text{ А}; \quad \underline{I}_{3a} = \underline{U}_{12} \underline{Y}_3 = 5,54 \cdot 0,069 = 0,38 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{2L} = \underline{U}_{12} (-jB_L) = 5,54 (-j0,061) = -j0,338 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{3C} = \underline{U}_{12} jB_C = 5,54 j0,061 = j0,338 \text{ А}.$$

Мгновенные значения токов:

$$i_1 = 0,446 \sin 396,2t \text{ A};$$

$$i_2 = 0,343 \sin(396,2t - 79,3^\circ) \text{ A};$$

$$i_3 = 0,51 \sin(396,2t + 42^\circ) \text{ A}.$$

Векторная диаграмма цепи дана на рис. 2.41.

Передающими функциями параллельного колебательного контура являются: передаточная функция по току индуктивной

$$\text{ветви } K_{Li}(j\omega) = \frac{I_L}{I_1} \approx \frac{Z_{BX}}{j\omega L} = Qn(\omega) \frac{\omega_0}{\omega};$$

передаточная функция по току емкостной

$$\text{ветви } K_{Ci}(j\omega) = \frac{I_C}{I_1} \approx \frac{Z_{BX}}{jX_C} = Qn(\omega) \frac{\omega_0}{\omega}.$$

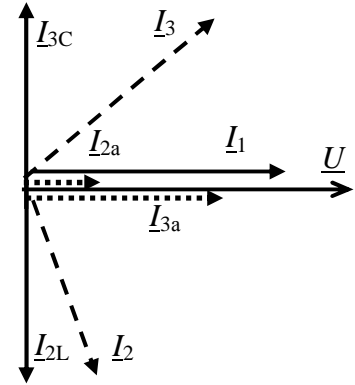


Рис. 2.41. Векторная диаграмма

Схема параллельного колебательного контура на рис. 2.40, а называется **контуром I вида**. В радиотехнических цепях применяют также **контур II вида** (рис. 2.42, а) и **контур III вида** (рис. 2.42, б).

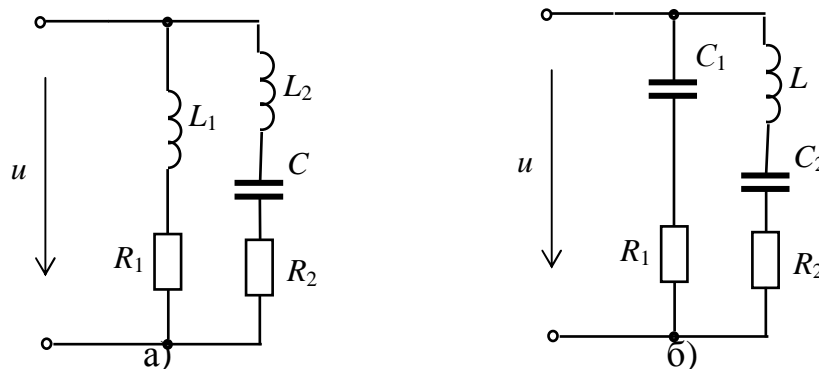


Рис. 2.42. Схемы параллельных колебательных контуров II (а) и III (б) вида

2.8. Избирательные свойства колебательных контуров

Степень отклонения частоты воздействия от резонансной частоты оценивают абсолютной, относительной и обобщенной расстройками:

абсолютная расстройка – $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ или $\Delta f = f - f_0$;

относительная расстройка $\delta = \Delta\omega/\omega_0 = \Delta f/f_0$.

В радиотехнике резонансные кривые принято строить в относительных единицах:

$$I\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = I(\omega^*) = \frac{I}{I_0},$$

где $I(\omega^*)$ – нормированный ток.

Резонансные кривые тока при различных значениях добротности Q даны на рис. 2.43.

Из рисунка видно, что вид резонансной кривой полностью определяется добротностью Q .

Для оценки избирательных свойств контура вводят понятие полосы пропускания контура как разность верхней ω_B и нижней ω_H частот ($\omega_B - \omega_H$), для которых

$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ (рис. 2.44). Для идеальной резонансной кривой (П-образная характеристика на рис. 2.43) ток вне полосы пропускания равен нулю.

При анализе радиотехнических контуров наибольший интерес представляют их свойства в области частот, мало отличающихся от резонансной частоты (область малых расстроек):

$$\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \approx Q \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0^2} \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Здесь $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ – относительная расстройка. В этом случае значения

граничных частот ω_H и ω_B можно определить по приближенным формулам:

$$\omega_H = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}; \quad \omega_B = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}.$$

Для расширения полосы пропускания параллельного контура в n раз следует параллельно элементам контура включить дополнительный резистор-шунт с проводимостью $G_{ш}$ (рис. 2.44, а) $G_{ш} = \frac{1}{G_{23}(n-1)}$.

Расширение полосы пропускания последовательного контура осуществляется включением добавочного сопротивления R_d (рис. 2.44, б), величина которого $R_d = R(n-1)$.

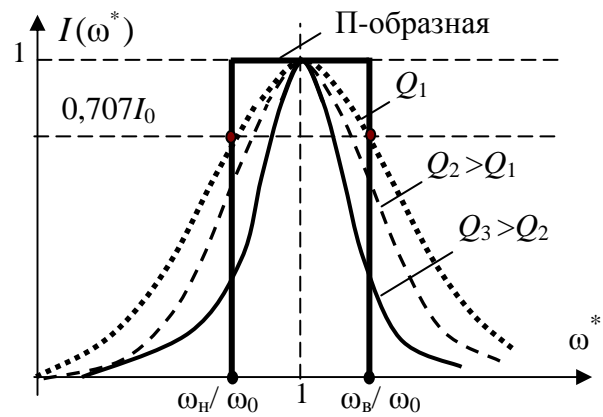


Рис. 2.43. Зависимость кривой тока от добротности контура

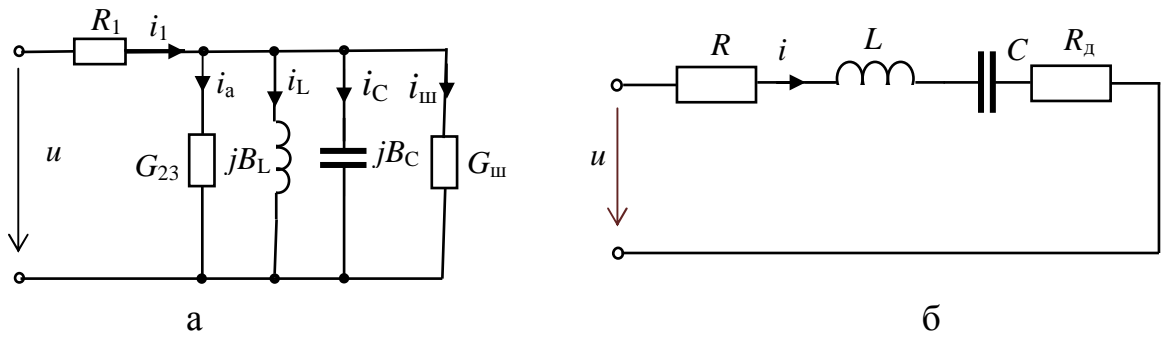


Рис. 2.44. Способ расширения полосы пропускания контура: а – параллельного контура, б – последовательного контура

Пример 2.7. Для колебательного контура, резонансная частота которого $f_0 = 10^6$ Гц и добротность $Q = 100$, определить значения граничных частот и ширину полосы пропускания.

Решение.

Угловая резонансная частота $\omega_0 = 2\pi f_0 = 6,28 \cdot 10^6$ 1/с.

Граничные частоты равны:

$$f_{\text{н}} = f_0 + \frac{f_0}{2Q} = 10^6 + \frac{10^6}{200} = 1,005 \cdot 10^6 \text{ Гц};$$

$$f_{\text{в}} = f_0 - \frac{f_0}{2Q} = 10^6 - \frac{10^6}{200} = 0,995 \cdot 10^6 \text{ Гц}.$$

Ширина полосы пропускания контура $2\Delta f = f_{\text{в}} - f_{\text{н}} = 10^4$ Гц.

Г л а в а III. ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ЦЕПИ

3.1. Взаимная индукция и взаимная индуктивность

Пусть в катушке индуктивности L_1 с числом витков w_1 протекает ток i_1 (рис. 3.1). Действием магнитодвижущей силы (МДС) $F = w_1 i_1$ будут созданы магнитный поток самоиндукции Φ_{1L} и потокосцепление $\Psi_{1L} = w_1 \Phi_{1L} = L_1 i_1$.

При изменении тока i_1 в катушке L_1 будет возбуждаться ЭДС самоиндукции: $e_{1L} = -\frac{d\Psi_{1L}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$.

При гармоническом токе i_1 в комплексной форме: $\underline{E}_{1L} = -j\omega L_1 \underline{I}_1 = -jX_{1L} \underline{I}_1$. Если вблизи катушки L_1 расположена катушка L_2 с числом витков w_2 , то часть потока Φ_{1L} будет сцеплена с катушкой L_2 , и при изменении тока i_1 ЭДС будет возбуждаться и в катушке L_2 .

Аналогично при протекании в катушке L_2 переменного тока i_2 ЭДС будет возбуждаться и в катушке L_1 . Возбуждение ЭДС в катушке, обусловленное изменением тока в другой катушке, называют **взаимной индукцией**, возбужденную ЭДС – **ЭДС взаимной индукции**, а контуры (катушки) – **индуктивно связанными**. Поток Φ_1 и Φ_2 , сцепленные с катушками L_1 и L_2 , равны:

$$\Phi_1 = \Phi_{1L} \pm \Phi_{2M}; \quad \Phi_2 = \Phi_{2L} \pm \Phi_{1M},$$

где $\Phi_{1M} = \Phi_{2M} = \Phi_M$ – поток взаимной индукции, сцепленный с обеими катушками.

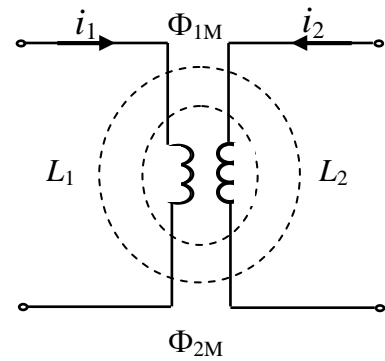


Рис. 3.1. Явление взаимной индукции

Знак «+» соответствует **согласному** соединению контуров, при котором совпадают направления потоков самоиндукции и взаимоиндукции.

Встречному соединению соответствует знак «-», при котором направления этих потоков не совпадают.

Потокосцепления катушек равны:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= w_1 \Phi_1 = w_1 (\Phi_{1L} \pm \Phi_M) = \psi_{1L} \pm \psi_M; \\ \psi_2 &= w_2 \Phi_2 = w_2 (\Phi_{2L} \pm \Phi_M) = \psi_{2L} \pm \psi_M. \end{aligned}$$

Опытным путем установлена пропорциональность между потокосцеплениями взаимной индукции и соответствующими токами:

$$\psi_{1M} = M_{21}i_1; \quad \psi_{2M} = M_{12}i_2.$$

Коэффициенты пропорциональности M_{12} и M_{21} называют **взаимной индуктивностью**, причем $M_{12} = M_{21} = M$.

Тогда найдем: $\psi_1 = L_1i_1 \pm Mi_2$; $\psi_2 = L_2i_2 \pm Mi_1$.

При изменении потокосцеплений ψ_1 и ψ_2 во времени в обеих катушках будут возбуждаться ЭДС **самоиндукции** и **взаимоиндукции**:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} \pm e_{1M}; \\ e_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} \pm e_{2M}, \end{aligned}$$

где e_{1M} и e_{2M} – ЭДС взаимной индукции.

На клеммах катушек появятся напряжения самоиндукции и взаимоиндукции: $u_1 = u_{1L} \pm u_{1M}$; $u_2 = u_{2L} \pm u_{2M}$.

Явление взаимной индукции учитывается введением **сопротивления взаимной индукции** $X_M = \omega M$, падение напряжения в котором численно равно ЭДС взаимной индукции.

Коэффициентом индуктивной связи двух катушек с индуктивностями L_1 и L_2 называют параметр $K = \sqrt{\frac{M}{L_1 L_2}}$, где $0 \leq K < 1$, который характеризует степень влияния катушек друг на друга.

Пары зажимов индуктивно связанных катушек, обозначенные точками, являются **началами** катушек, а противоположные зажимы – **концами** (рис. 3.2). Положительные направления токов и образуемые ими магнитные потоки связаны правилом правого винта.

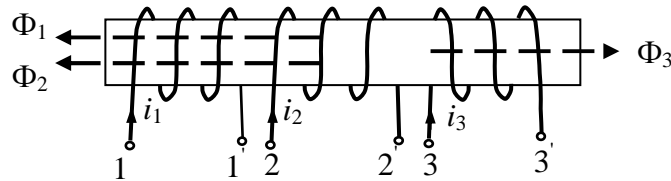


Рис. 3.2. Согласно и встречное включение катушек

3.2. Расчет индуктивно связанных электрических цепей

3.2.1. Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек

Индуктивно связанные цепи рассчитываются по законам Кирхгофа и по методу контурных токов. При составлении уравнений для определения направления ЭДС взаимной индукции следует придерживаться следующего правила: если направление обхода катушки, подверженной влиянию, совпадает с направлением тока во влияющей катушке относительно одноименных зажимов, то катушки соединены согласно и ЭДС взаимной индукции записывается со знаком плюс, если не совпадает – со знаком минус.

В цепи на рис. 3.3 заданы входное напряжение, параметры всех элементов цепи и взаимная индуктивность M . Требуется определить ток в цепи при согласном (рис. 3.3, а) и встречном (рис. 3.3, б) соединении катушек.

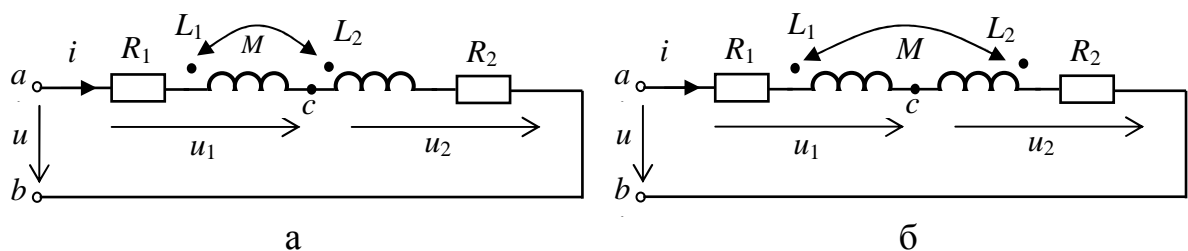


Рис. 3.3. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек: а – согласное включение; б – встречное включение

Уравнения Кирхгофа в комплексной форме:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = R_1 \underline{I} + jX_1 \underline{I} + R_2 \underline{I} + jX_2 \underline{I} \pm 2jX_M \underline{I},$$

где $X = \omega X_L$, а $X_M = \omega X_M$.

Откуда найдем:
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2 \pm 2X_M)}.$$

Здесь $\underline{Z} = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2 \pm 2X_M)$ – комплексное сопротивление цепи.

Таким образом, ток в цепи при согласном включении катушек будет меньше тока при их встречном включении.

Векторные диаграммы при согласном и встречном соединении катушек приведены на рис. 3.4 (при $X_{L1} = X_{L2}$).

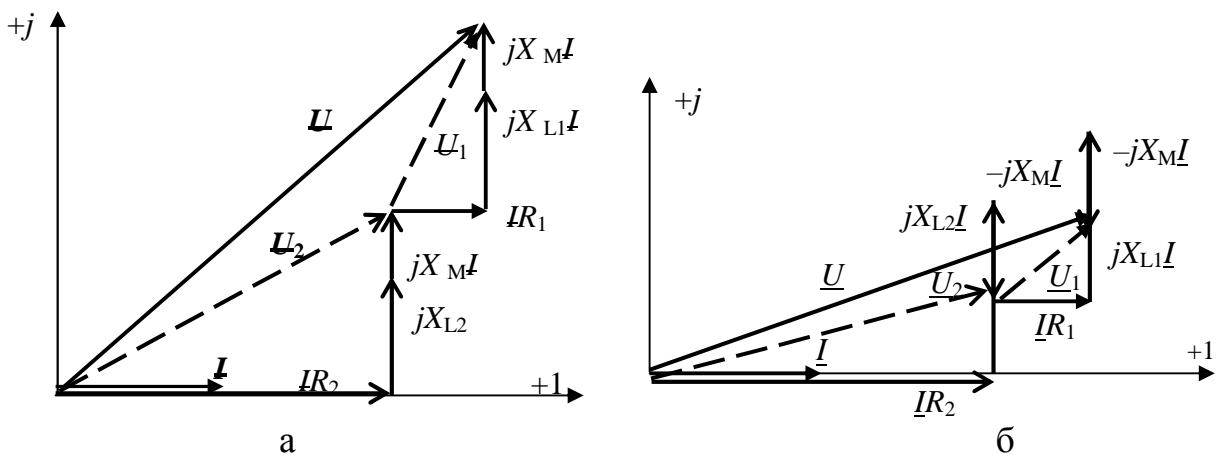


Рис. 3.4. Векторные диаграммы при последовательном соединении катушек: а – согласное включение; б – встречное включение

3.2.2. Параллельное соединение двух индуктивно связанных катушек

В цепи на рис. 3.5 заданы \underline{U} , R_1 , R_2 , L_1 , L_2 , M . Требуется определить токи в ветвях при согласном соединении контуров.

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа в комплексной форме при обходе контуров по часовой стрелке:

$$\underline{U} = R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 jX_M;$$

$$\underline{U} = R_2 \underline{I}_2 + jX_2 \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 jX_M;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2,$$

где $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$, $X_M = j\omega M$.

Решая данную систему уравнений,

найдем токи цепи.

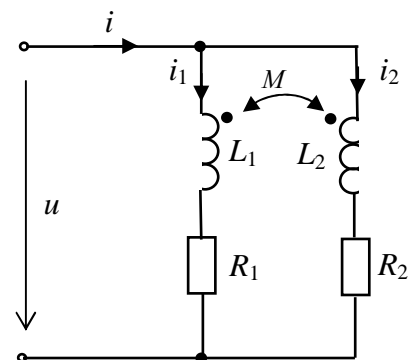


Рис. 3.5. Заданная схема цепи

Пример 3.1.

В электрической цепи (рис. 3.6.)
 $U_m = 100$ В, $R_0 = R_1 = 10$ Ом, $X_{L1} = 5$ Ом,
 $X_{L2} = 8$ Ом, $X_{C2} = 4$ Ом, $X_M = 6$ Ом. Опре-
 делить комплексные токи в ветвях,
 построить векторную диаграмму.

Решение.

Составим систему уравнений отно-
 сительно неизвестных токов по зако-
 нам Кирхгофа:

$$\underline{I}_m - \underline{I}_{1m} - \underline{I}_{2m} = 0;$$

$\underline{I}_m R_0 + \underline{I}_{1m} (R_1 + jX_{L1}) + \underline{I}_{2m} jX_M = \underline{U}_m$; $\underline{I}_m R_0 + \underline{I}_{2m} (jX_{L2} - jX_{C2}) + \underline{I}_{1m} jX_M = \underline{U}_m$.
 или методом контурных токов:

$$\underline{I}_{11} (R_0 + R_1 + jX_{L1}) + \underline{I}_{22} R_0 + \underline{I}_{22} jX_M = \underline{U}; \quad \underline{I}_{11} (20 + j5) + \underline{I}_{22} (10 + j6) = 100;$$

$$\underline{I}_{22} (R_0 + jX_{L2} - jX_C) + \underline{I}_{11} R_0 + \underline{I}_{11} jX_M = \underline{U}; \quad \underline{I}_{11} (10 + j6) + \underline{I}_{22} (10 + j4) = 100.$$

Решив соответствующую систему
 уравнений, определим токи цепи:

$$\underline{I}_{11} = \underline{I}_{1m} = -0,15 - j1,71 = 1,716 e^{-j95^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{22} = \underline{I}_{2m} = 8,47 - j1,65 = 8,629 e^{-j11^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{22} = 8,32 - j3,36 = 8,973 e^{-j22^\circ} \text{ А}.$$

Построим векторную диаграмму
 цепи (рис. 3.7).

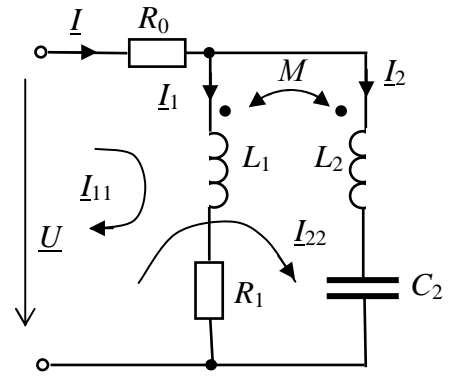


Рис. 3.6. Заданная схема цепи

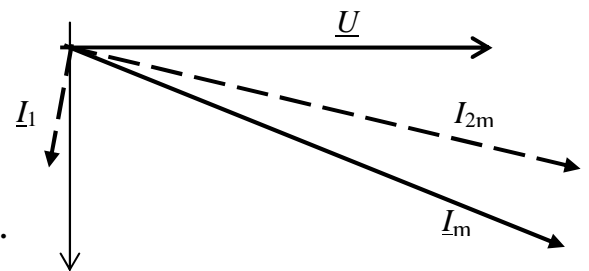


Рис. 3.7. Векторная диаграмма

3.2.3. Независимые индуктивно связанные контуры

Рассмотрим два индуктивно связанных контура. На каждый из
 них подано гармоническое напряжение u_1 и u_2 (рис. 3.8). Под дейст-
 вием переменного тока i_1 в первом

контуре возникнет ЭДС самоиндук-
 ции e_{L1} и напряжение $u_{L1} = -e_{L1}$, а под
 действием тока i_2 – ЭДС взаимной ин-
 дукции $e_{1-2} = M \frac{di_2}{dt}$ и напряжение взаим-

ной индукции $u_{1-2} = -e_{1-2}$. Аналогично
 во втором контуре наводятся ЭДС

e_{L2} и e_{2-1} и напряжения u_{L2} и e_{2-1} .

Тогда с учетом падений напряжений
 на активных сопротивлениях R_1 и R_2

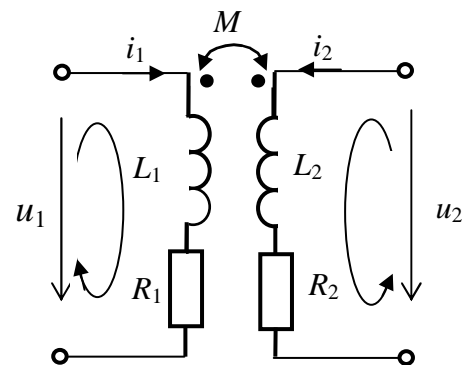


Рис. 3.8. Независимые индуктивно
 связанные контуры

уравнения 2-го закона Кирхгофа в комплексной форме будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 \pm \underline{I}_2 \underline{X}_M; \\ \underline{U}_2 &= \underline{I}_2 R_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \pm \underline{I}_1 \underline{X}_M. \end{aligned}$$

Таким образом, при расчете индуктивно связанных цепей необходимо учитывать падения напряжений на сопротивлении взаимной индукции \underline{X}_M , которое может быть со знаком (+) или (-).

С целью упрощения расчета электрических цепей схему с индуктивными связями заменяют эквивалентной схемой без индуктивных связей. Это позволяет затем применить все известные методы расчета цепей синусоидального тока без ограничений. Такой прием называют эквивалентной заменой, или развязкой индуктивных связей.

Выполним такую замену для независимых индуктивно связанных ветвей при их согласном включении (рис. 3.9, а).

Уравнения для данного случая имеют вид:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= [\underline{I}_1(R_1 + jX_{L1}) + jX_M \underline{I}_2] + \underline{I}_1 jX_M - \underline{I}_1 jX_M; \\ \underline{U}_2 &= [\underline{I}_2(R_2 + jX_{L2}) + jX_M \underline{I}_1] + \underline{I}_2 jX_M - \underline{I}_2 jX_M. \end{aligned}$$

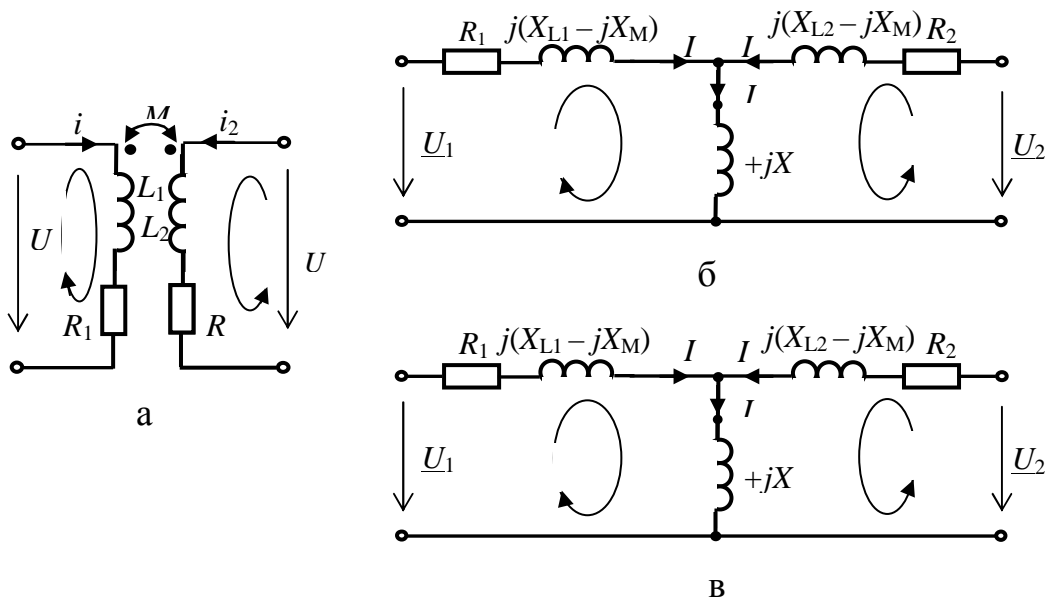


Рис. 3.9. Развязка индуктивных связей

Прибавим и вычтем в первом уравнении $\pm \underline{I}_1 jX_M$, а во втором $\pm \underline{I}_2 jX_M$ и преобразуем уравнения, обозначив $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 [R_1 + j(X_{L1} - X_M)] + \underline{I}_1 jX_M + \underline{I}_2 jX_M = \\ &= \underline{I}_1 [R_1 + j(X_{L1} - X_M)] + jX_M (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = \underline{I}_1 [R_1 + j(X_{L1} - X_M)] + jX_M \underline{I}; \\ \underline{U}_2 &= [\underline{I}_2 (R_2 + jX_{L2}) + jX_M \underline{I}_1] + \underline{I}_2 jX_M - \underline{I}_2 jX_M = \\ &= \underline{I}_2 [R_2 + j(X_{L2} - X_M)] + jX_M (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = \underline{I}_2 [R_2 + j(X_{L2} - X_M)] + jX_M \underline{I}. \end{aligned}$$

Уравнениям соответствует эквивалентная схема цепи (рис. 3.9, б).

Аналогично при встречном включении цепей путем замены $+jX_M$ на $-jX_M$ получим соответствующую эквивалентную схему (рис. 3.9, в).

Глава IV. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

4.1. Типы фильтров и их характеристики

Электрическим фильтром называется устройство, которое пропускает колебания определенных частот, действующих на входе фильтра, и не пропускает колебания всех других частот.

Электрические фильтры применяются для выделения полезных сигналов на фоне других сигналов и помех, для подавления сигналов определенных частот, для разделения сигналов, коррекции их форм и др.

Фильтры представляются обобщенной схемой в виде некоторого пассивного четырехполюсника (рис. 4.1).

Фильтры различаются по назначению, конструкции, элементной базе и по структуре (рис. 4.2).

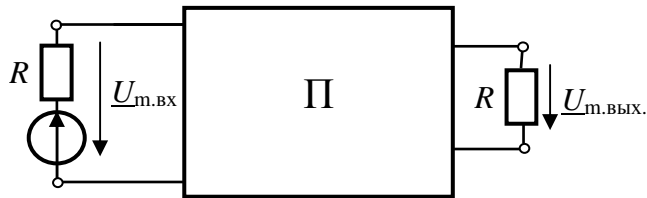


Рис. 4.1. Обобщенная схема фильтра

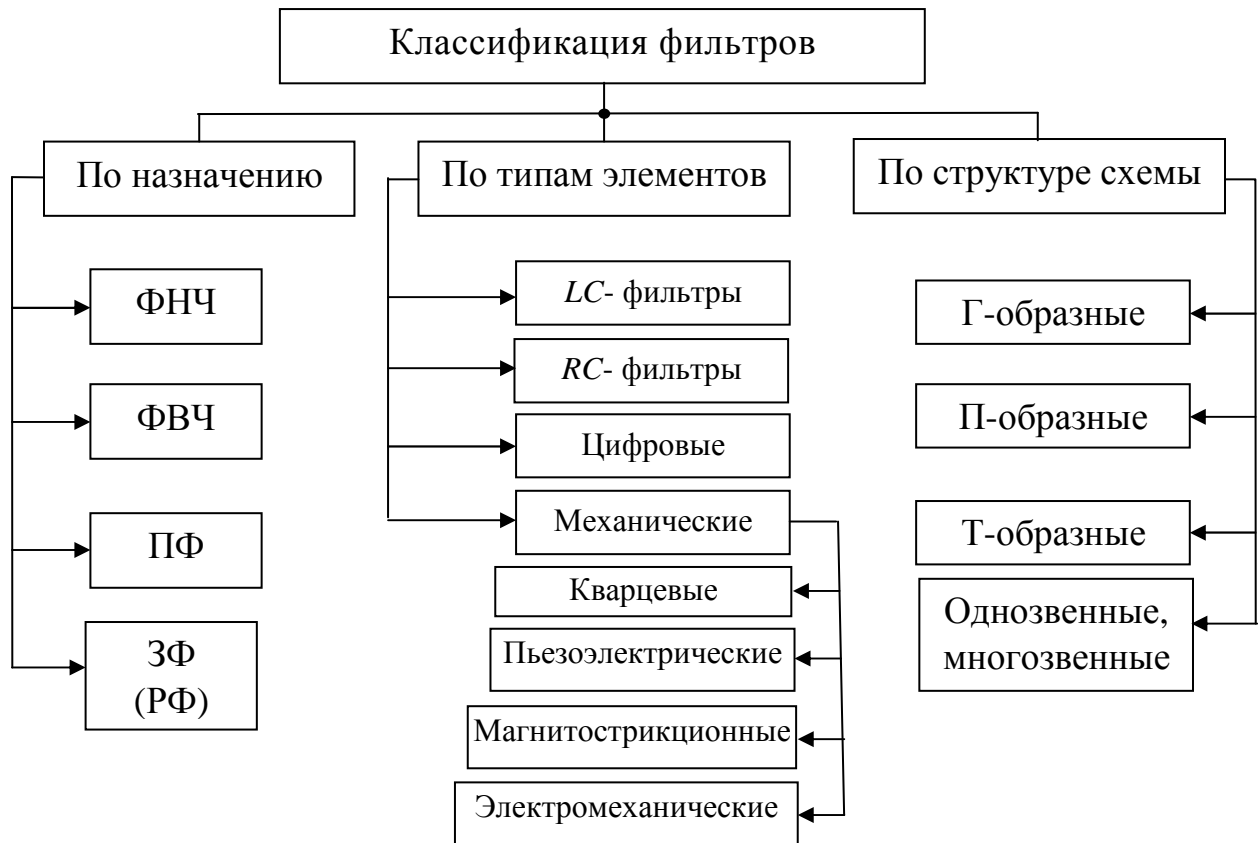


Рис. 4.2. Классификация фильтров

Внутреннее сопротивление генератора R_r и сопротивление нагрузки R_n обычно являются активными сопротивлениями.

Для уменьшения потерь энергии в самом фильтре его элементы стремятся выполнить с возможно меньшими потерями. В связи с этим в дальнейшем будем считать, что фильтр состоит из чисто реактивных элементов.

Частотно-избирательные свойства фильтров полностью характеризуются комплексным коэффициентом передачи:

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{U_{\text{м.вых}}}{U_{\text{м.вх}}} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где $K(\omega) = U_{\text{м.вых}}/U_{\text{м.вх}}$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);
 $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ).

Полоса частот, где АЧХ $K(\omega) = U_{\text{м2}}/U_{\text{м1}}$ приближается к единице передачи $K(\omega) = U_{\text{м2}}/U_{\text{м1}}$ (отличен от нуля), называется **полосой пропускания фильтра**, а полоса частот, где $K(\omega) = 0$, – **полосой задержания**. Частоты, находящиеся на границах полосы пропускания и задержания, называются **частотами среза** ω_c .

По назначению, т. е. по расположению на шкале частот полосы пропускания, различают следующие типы фильтров:

- фильтры нижних частот (ФНЧ);
- фильтры верхних частот (ФВЧ);
- полосовые фильтры (ПФ);
- заградительные (ЗФ) или режекторные фильтры (РФ).

ФНЧ пропускают сигналы низких частот и ослабляют сигналы высоких.

ФВЧ пропускают сигналы высоких частот и ослабляют сигналы низких.

ПФ пропускают сигналы в определенной полосе частот и ослабляют сигналы вне этой полосы частот.

РФ, наоборот, ослабляют сигналы в определенной полосе частот и пропускают сигналы в остальном диапазоне частот.

На рис. 4.3 приведены идеальные (сплошные линии) и реальные АЧХ всех этих типов фильтров, а также их условные обозначения.

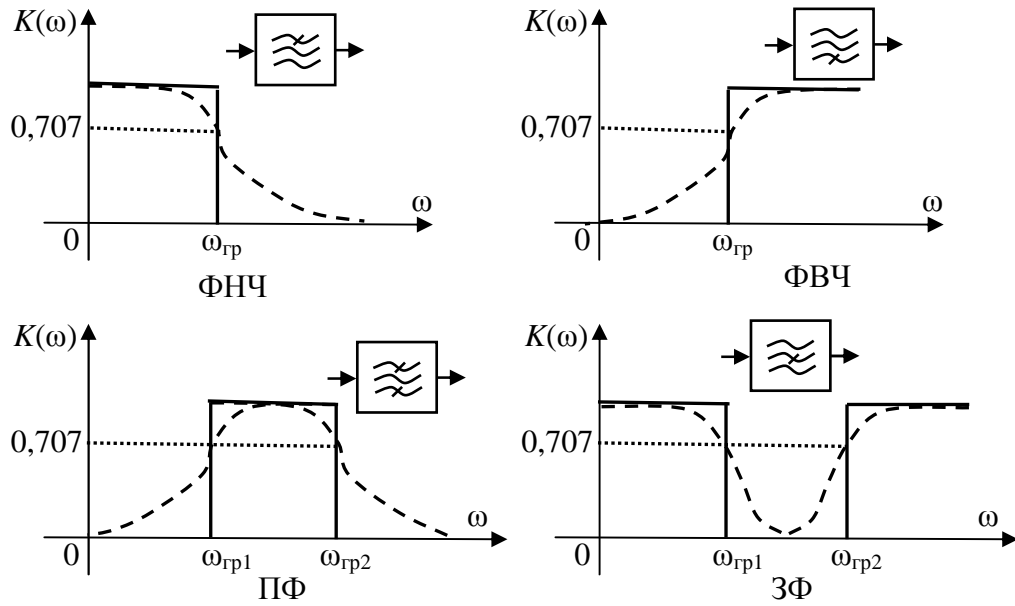


Рис. 4.3. АЧХ фильтров

По характеру используемых элементов различают фильтры, состоящие из L - C элементов, которые называются **реактивными**; **активные** RC -фильтры, состоящие из резисторов, конденсаторов и активных приборов (транзисторных усилителей). Эти фильтры реализуются в микросхемном исполнении.

По схеме соединения элементов различают Γ -образные, T -образные, Π -образные фильтры и многозвенные фильтры (рис. 4.4).

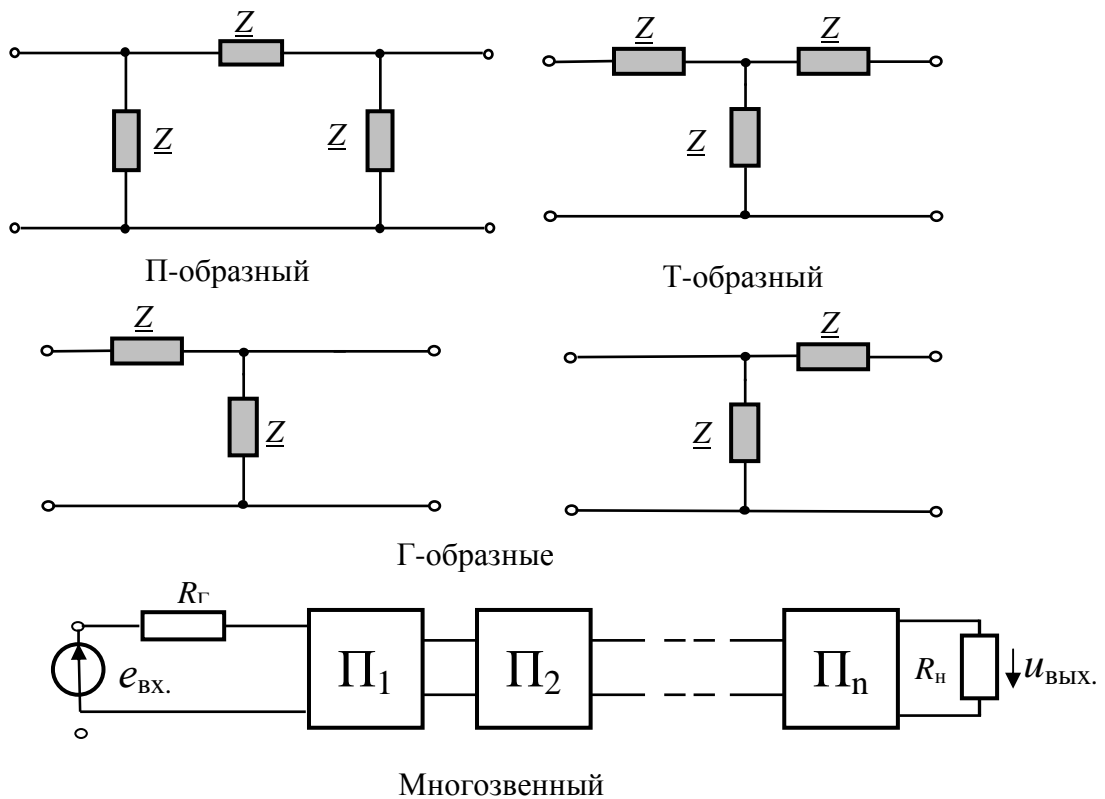


Рис. 4.4. Структуры фильтров

Для получения весьма высокой частотной избирательности используются фильтры *с механическими резонаторами*: кварцевые (пьезоэлектрические), магнитострикционные и электромеханические.

В радиоэлектронной аппаратуре, создаваемой на основе микропроцессорной и цифровой вычислительной техники, используются *цифровые* фильтры, избирательные свойства которых реализуются путем цифровой обработки сигналов.

4.2. Анализ фильтров

Различают задачу анализа и задачу синтеза фильтров.

Основными задачами *анализа* фильтров являются:

- определение условий, при которых фильтр может обеспечить заданные требования к частотной характеристике;
- определение ширины полосы пропускания;
- определение ширины полосы прозрачности;
- получение АЧХ и ФЧХ фильтра.

Условие прозрачности фильтров записывается в виде неравенства

$$1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} \leq 0 \text{ или } 1 \leq \frac{X_1}{4X_2} \leq 0.$$

Таким образом, для существования полосы пропускания продольное сопротивление X_1 и поперечное сопротивление X_2 должны иметь разные знаки, а по абсолютной величине $X_1 < 4 X_2$.

Граничные частоты полосы пропускания определим из неравенства $1 \leq \frac{X_1}{4X_2} \leq 0$, где $X_1(\omega)$ и $X_2(\omega)$ являются функциями частоты.

Тогда в общем случае граничные частоты определяются из равенств:

$$\frac{X_1(\omega_{гр1})}{4X_2(\omega_{гр1})} = -1, \quad \frac{X_1(\omega_{гр2})}{4X_2(\omega_{гр2})} = 0.$$

4.2.1. Фильтр нижних частот

В этом фильтре постоянный ток и все колебания с частотами ниже некоторой $\omega_{гр}$ должны пропускаться, а колебания с $\omega > \omega_{гр}$ – подавляться. Для этого продольная ветвь фильтра должна иметь малое сопротивление для постоянного тока и низких частот и большое сопротивление для высоких частот.

Этим требованиям удовлетворяет индуктивность L ($X_L = \omega L$).

Поперечная ветвь фильтра, наоборот, должна иметь большое сопротивление для низких частот и малое сопротивление для высоких частот. Тогда токи на высоких частотах будут ею шунтироваться. Этим требованиям удовлетворяет конденсатор емкостью C , сопротивление которого $X_C = 1/\omega C$.

В соответствии с этими требованиями схемы ФНЧ типа $L-C$ будут иметь следующий вид (рис. 4.5).

В этих схемах $\underline{Z}_1 = j\omega L$, $\underline{Z}_2 = 1/j\omega C$, их произведение $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = L/C = \rho^2$, где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое сопротивление цепи.

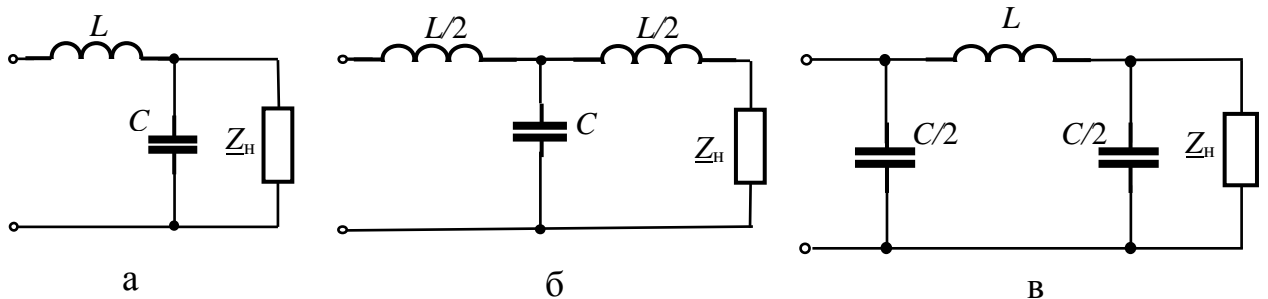


Рис. 4.5. Схемы ФНЧ:

а – Г-образный; б – Т-образный; в – П-образный

Фильтры, у которых в продольную и поперечные ветви включены взаимно-обратные элементы, так что произведение $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$ **при любой частоте** равно постоянному положительному числу K^2 , называются **фильтрами типа «k»**.

Из формул $\frac{X_1(\omega_{гр1})}{4X_2(\omega_{гр1})} = -1$, $\frac{X_1(\omega_{гр2})}{4X_2(\omega_{гр2})} = 0$ найдем граничные частоты ФНЧ, где $X_1 = \omega L$, $X_2 = 1/\omega C$: $\frac{X_1}{4X_2} = -\frac{\omega_{гр.1}^2 LC}{4} = 0$, откуда $\omega_{гр.1} = 0$.

$$\frac{X_1}{4X_2} = -1, \quad -\frac{\omega_{гр.2}^2 LC}{4} = -1, \quad \text{откуда } \omega_{гр.2} = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

4.2.2. Фильтр верхних частот

В этом фильтре постоянный ток и все колебания с частотами ниже некоторой $\omega_{гр}$ должны подавляться, а колебания с $\omega > \omega_{гр}$ должны пропускаться.

Эти условия будут выполняться, если в продольную ветвь включить конденсатор, так как он будет представлять большое сопротив-

ление для низких частот и малое сопротивление для токов высоких частот ($X_C = 1/\omega C$). Включение в поперечную ветвь индуктивности приведет к увеличению ее проводимости на нижних частотах и уменьшению проводимости на высоких частотах (рис. 4.6).

Таким образом, для ФВЧ следует принять $Z_1 = 1/j\omega C$, $Z_2 = j\omega L$. Этот фильтр является фильтром типа «k», так как здесь $Z_1 Z_2 = L/C = \rho^2$.

Найдем граничные частоты графическим построением (рис. 4.7).

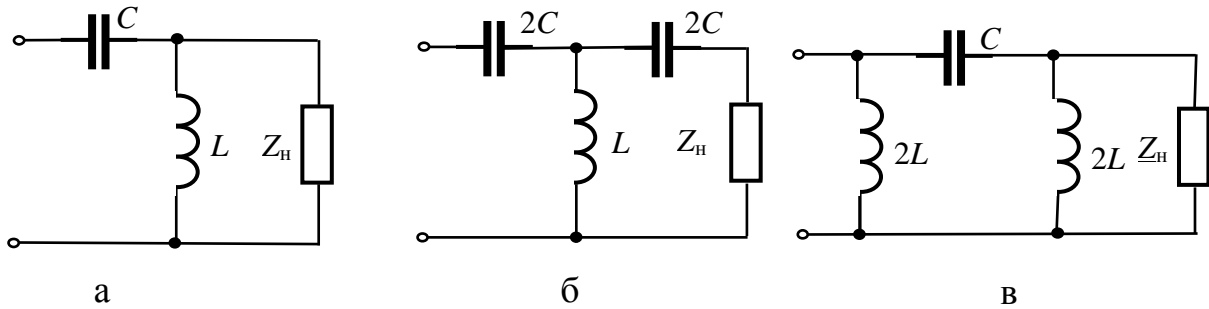


Рис. 4.6. Схемы ФВЧ:

а – Г-образный; б – Т-образный; в – П-образный

Построим зависимость $X_1 = 1/j\omega C$. Затем в этой же системе координат нанесем кривую $4X_2 = 4\omega L$. Точка их пересечения дает граничную частоту, при которой $4\omega_{гр} L = \frac{1}{\omega_{гр} C}$, откуда $2\omega_{гр} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$.

Эти фильтры также являются фильтрами типа «k».

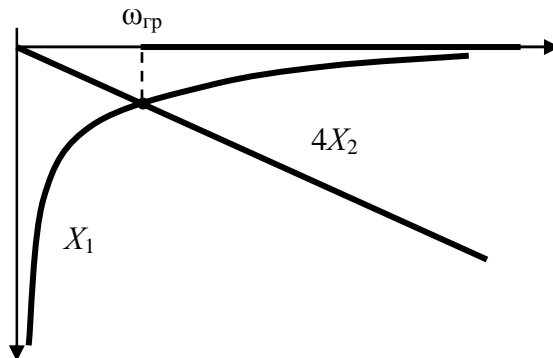


Рис. 4.7. К определению граничной частоты ФВЧ

4.2.3. Полосовой фильтр

Полосовой фильтр представляет собой соединение по Т-образной или по П-образной схеме последовательных и параллельных колебательных контуров, каждый из которых настроен на одну и ту же резонансную частоту ω_0 (рис. 4.8).

Простейшими полосовыми фильтрами являются колебательные контуры, избирательные свойства которых основаны на явлении резонанса, поэтому они называются резонансными.

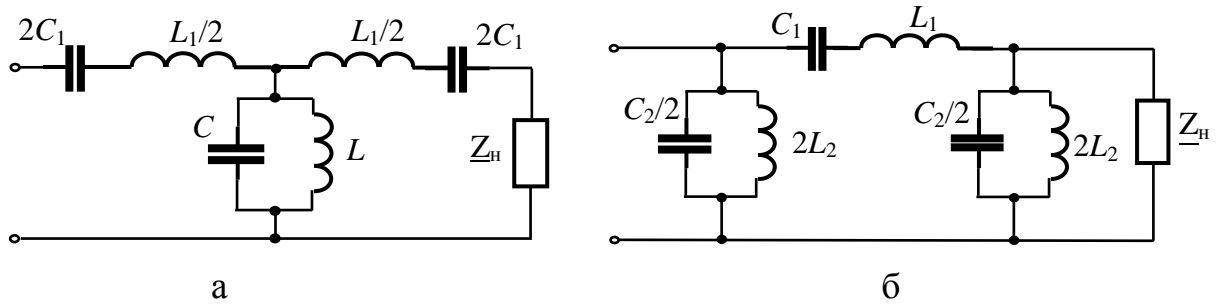


Рис. 4.8. Схемы полосовых фильтров:
а – Т-образный; б – П-образный

Рассмотрим работу Т-образного полосового фильтра (рис. 4.8, а).

При резонансной частоте ω_0 каждого из контуров обе последовательные ветви эквивалентны участкам короткого замыкания, а поперечная ветвь эквивалентна разрыву ветви (рис. 4.9, а).

Напряжение на выходе равно входному – $K(\omega_0) = 1$.

При частоте $\omega > \omega_0$ последовательные контуры имеют индуктивный характер, а параллельный – емкостный (рис. 4.9, б), т. е. схема представляет собой ФНЧ с полосой прозрачности $\omega_0 < \omega < \omega_{гр2}$.

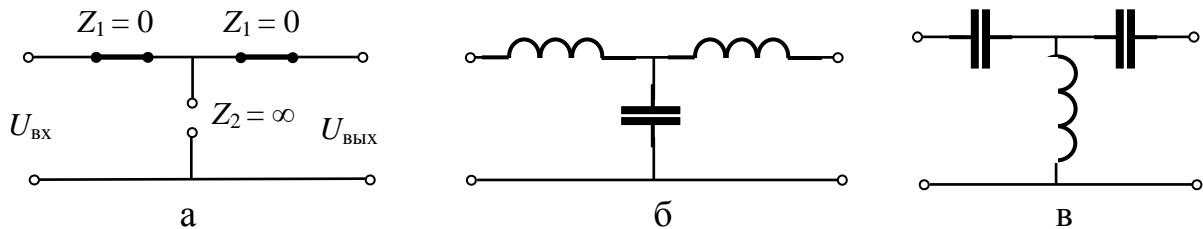


Рис. 4.9. Эквивалентные схемы полосового фильтра:
а – $\omega = \omega_0, K(\omega)=1$; б – $\omega > \omega_0$, ФНЧ, $\Delta \omega = \omega_0 \dots \omega_{в}$; в – $\omega < \omega_0$, ФВЧ, $\Delta \omega = \omega_{н} \dots \omega_0$

При частоте $\omega < \omega_0$ последовательные контуры имеют емкостный характер, а параллельный – индуктивный (рис. 4.9, в), т. е. схема представляет собой ФВЧ с полосой прозрачности $\omega_{гр1} < \omega < \omega_0$ (рис. 4.10).

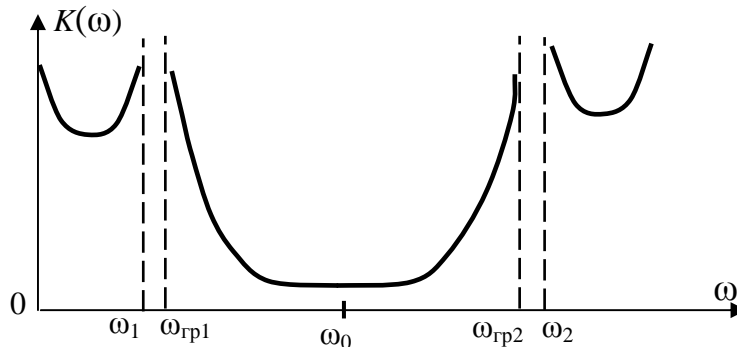


Рис. 4.10. АЧХ полосового фильтра

Всплески характеристики на частотах ω_1 и ω_2 обусловлены резонансами напряжений в последовательных контурах.

Граничные частоты фильтра определяются равенствами:

$$\omega_{гр2} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}}; \quad \omega_{гр1} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} - \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}}.$$

Для улучшения избирательных свойств фильтра сопротивление нагрузки должно быть равно характеристическому сопротивлению фильтра, которое для П-образного фильтра равно:

$$Z_{0П} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - C_2/4C_1 \left(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega \right)^2}}.$$

Хорошим приближением к этому условию является выполнение равенства $R_n = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$, откуда можно найти параметры элементов фильт-

ра (L и C) с учетом, что $\omega_{гр2} - \omega_{гр1} = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}$.

4.2.4. Заграждающий фильтр

Если в схеме полосового фильтра поменять местами параллельный и последовательный контуры, фильтр обратится в заграждающий фильтр (рис. 4.11).

В результате анализа работы контуров фильтра на частотах $\omega > \omega_0$, $\omega < \omega_0$, $\omega_0 < \omega < \omega_{гр2}$, $\omega_{гр1} < \omega < \omega_0$ (см. п. 4.2.3) получим соответствующие эквивалентные схемы заграждающего фильтра (рис. 4.12).

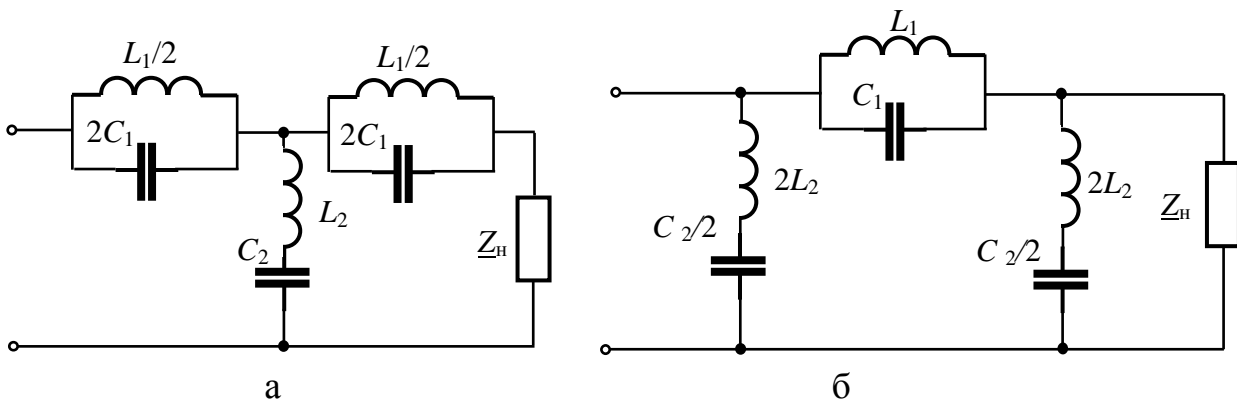


Рис. 4.11. Схемы заграждающих фильтров:
а – Т-образный; б – П-образный

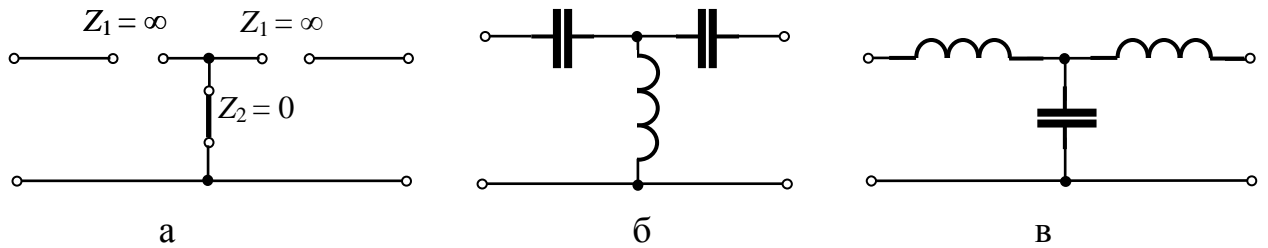


Рис. 4.12. Эквивалентные схемы заграждающего фильтра типа « k »:
 а – $\omega = \omega_0$, $K(\omega)=1$; б – $\omega > \omega_0$, ФНЧ, $\Delta \omega = \omega_0 \dots \omega_B$; в – $\omega < \omega_0$, ФВЧ, $\Delta \omega = \omega_H \dots \omega_0$

Типовая АЧХ заграждающего фильтра приведена на рис. 4.13.

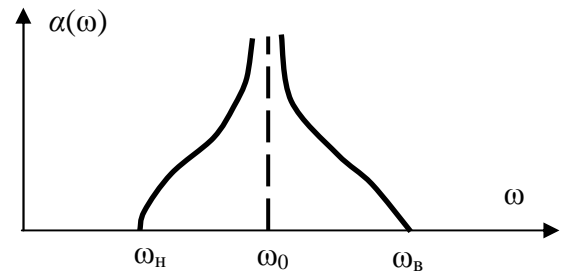


Рис. 4.13. АЧХ заграждающего фильтра

4.2.5. Многосвязные фильтры

Все рассмотренные типы фильтров по своим АЧХ отличаются от идеальных, так как в полосе подавления их затухание конечно. Характеристики фильтра можно улучшить, соединив последовательно ряд звеньев фильтра (рис. 4.14).

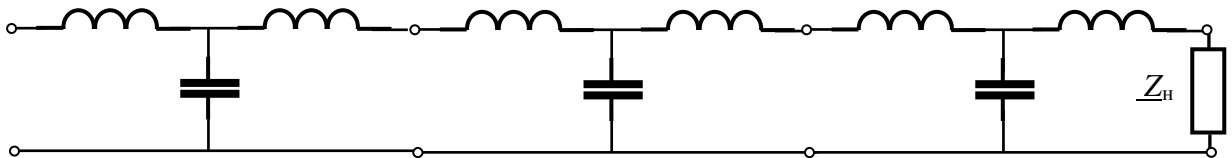


Рис. 4.14. Схема многосвязного фильтра типа « k »

Если звенья фильтра идентичны и на выходе он согласован, результирующее затухание $\alpha_{\Sigma} = n\alpha$. Крутизна характеристики возрастает.

Недостатком электрических фильтров типа « k » является сложность получения достаточно большой крутизны АЧХ в полосе задержания. Кроме того, характеристическое сопротивление сильно меняется в полосе пропускания, что затрудняет его согласование с нагрузкой.

4.2.6. Фильтры типа « m »

Недостатки фильтров типа « k » в значительной степени устраняются в фильтрах типа « m ».

На рис. 4.15, а изображена схема Г-образного звена, которая называется прототипом ФНЧ типа « k ». На его основе могут быть созданы

различные схемы ФНЧ типа « m » (рис 4.15, б, в, г, д), где m – некоторый постоянный коэффициент (определяется при проектировании фильтров).

Для увеличения избирательности фильтра в поперечное плечо включен последовательный колебательный контур. В контуре возникает резонанс напряжений на частоте $\omega < \omega_\infty$ ($Z_2 = 0$, $U_2 = 0$, $\alpha = \infty$). Такой фильтр называется последовательно-производным (рис. 4.15, б).

Второй способ увеличения избирательности фильтров основан на том, что в продольном плече осуществляется резонанс токов при частоте $\omega < \omega_\infty$. Тогда на частоте ω_∞ $\alpha = \infty$, $Z_1 = \infty$, $U_2 = 0$ (рис 4.15, в). Такой фильтр называется параллельно-производным. Возможны и другие схемы фильтров этого типа.

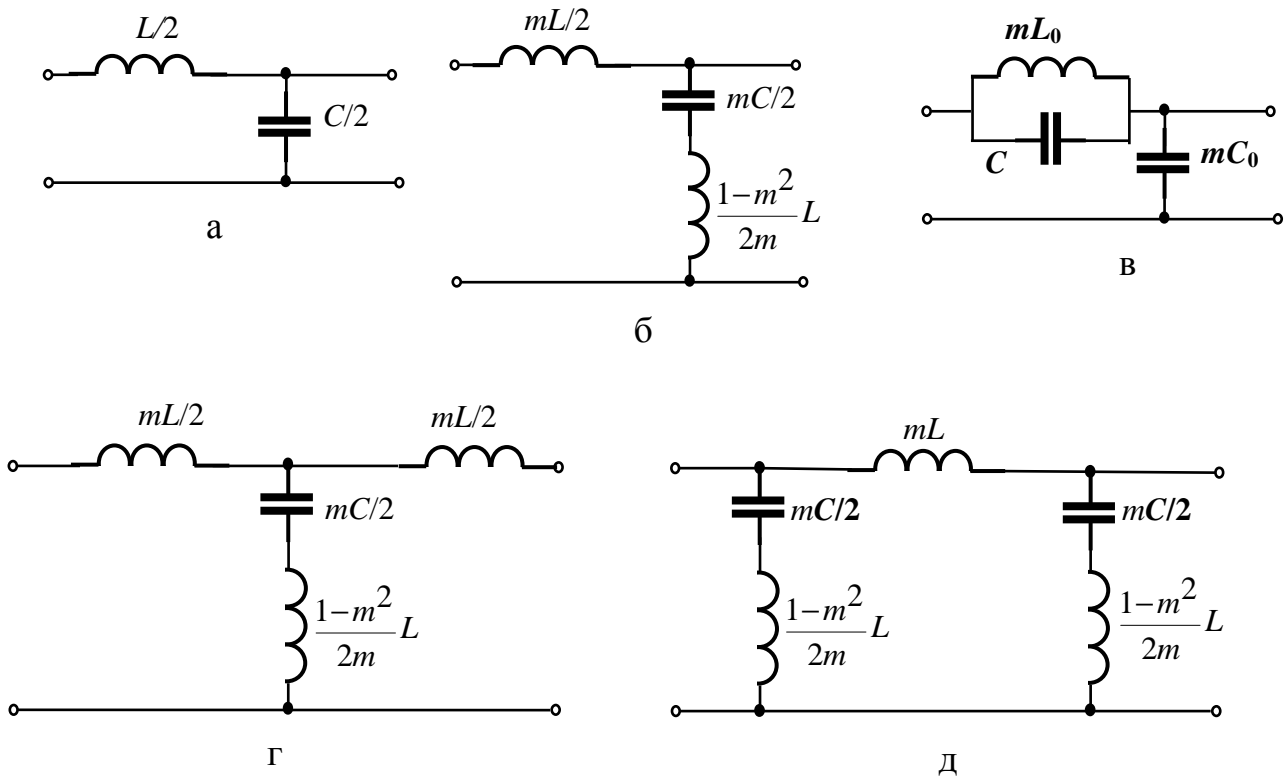


Рис. 4.15. Схемы фильтров типа « m »:

- а – прототип ФНЧ; б – Г-образный ФНЧ последовательно-производный;
 в – Г-образный ФНЧ параллельно-производный; г – Т-образный ФНЧ;
 д – П-образный ФНЧ

Глава V. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

5.1. Разложение негармонических периодических функций времени в тригонометрический ряд

В радиотехнических цепях широко используются токи и напряжения самой разнообразной формы, существенно отличающиеся от гармонических. В основе методов расчета цепей с негармоническими ЭДС, напряжениями и токами лежит представление несинусоидальной периодической функции времени $f(\omega t)$ в виде суммы постоянной составляющей и ряда синусоидальных (гармонических) составляющих кратных частот $k\omega$. Такое представление негармонических функций называется *тригонометрическим рядом Эйлера–Фурье*:

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \end{aligned}$$

где A_0 – постоянная составляющая; $A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ – первая, или основная гармоника;

$A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ – высшие гармоники;

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ – угловая частота исходной несинусоидальной периодической функции;

$k = 1, 2, 3, \dots$ – номер (порядок) гармоники.

Для определения параметров гармоник используется другая форма записи ряда Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t),$$

где B_{km} , C_{km} , A_0 называются коэффициентами Фурье и вычисляются по формулам:

$$B_{km} = A_{km} \cos \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t); \quad C_{km} = A_{km} \sin \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t);$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) d(\omega t).$$

Значения параметров гармоник – амплитуды A_{km} и их начальные фазы ψ_k определяются через коэффициенты Фурье по формулам:

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad \psi_{km} = \operatorname{arctg} \frac{C_{km}}{B_{km}}.$$

Действующее значение периодической несинусоидальной функции равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений каждой гармонической составляющей и не зависит от их начальных фаз.

Например, если действующие значения составляющих негармонического напряжения $u(\omega t)$ равны U_0, U_1, U_2 и т. д., то действующее значение негармонического напряжения $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}$.

Совокупность гармоник негармонической функции называется **дискретным**, или **линейчатым спектром** $f(\omega t)$. Графическое представление спектра в виде амплитуд и начальных фаз гармоник называется соответственно **амплитудной** и **фазовой спектральными диаграммами**. Пример спектральных диаграмм приведен на рис. 5.1.

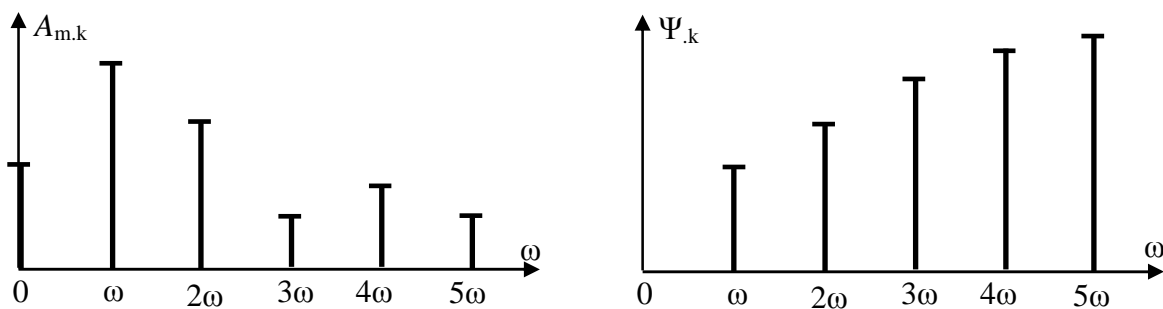


Рис. 5.1. Пример АЧХ и ФЧХ

С учетом известных формул Эйлера:

$$\cos k\omega t = \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2}, \quad \sin k\omega t = \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j},$$

ряд Фурье можно записать в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \underline{F}(\omega t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{km} - jC_{km}}{2} e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{km} + jC_{km}}{2} e^{-jk\omega t} = \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_{km} e^{jk\omega t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_{-km} e^{-jk\omega t}. \end{aligned}$$

Здесь обозначено $\underline{A}_{km} = B_{km} - jC_{km}$, $\underline{A}_{-km} = B_{km} + jC_{km}$.

С учетом обозначения $A_0 = \underline{A}_0$ и равенства $\sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_{-km} e^{-jk\omega t} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \underline{A}_{km} e^{-jk\omega t}$

окончательно получим: $F \underline{F}(\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{A}_{km} e^{jk\omega t}$.

Таким образом, комплексный ряд Фурье содержит гармоники с положительными и отрицательными индексами. Комплексные коэффициенты Фурье равны:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{km} &= \frac{2}{T} \int_{(\delta)} \underline{F}(\omega t) e^{-jk\omega t} dt = \\ &= \int_{(\delta)} \underline{F}(\omega t) \cos \omega t dt - j \int_{(\delta)} \underline{F}(\omega t) \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Полученная функция не содержит период T и называется **спектральной функцией**. График модуля функции $F(\omega t)$ приведен на рис. 5.2.

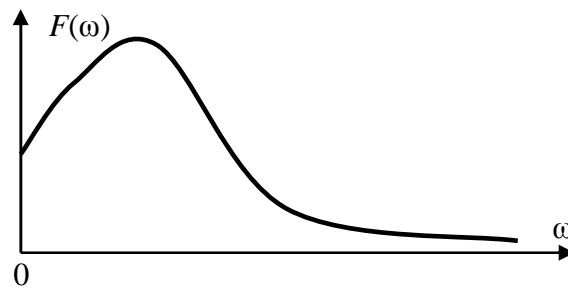


Рис. 5.2. График спектральной функции

5.2. Мощность в цепи негармонического тока

Активная мощность периодического тока произвольной формы определяется так же, как и в цепи гармонического тока, т. е. как среднее значение мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt,$$

где u и i – мгновенные значения напряжения и тока произвольной формы.

С учетом представления негармонических функций u и i рядом Фурье активная мощность будет равна сумме активных мощностей отдельных гармоник и постоянной составляющей:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

Реактивная мощность цепи негармонического тока определяется как алгебраическая сумма реактивных мощностей гармонических составляющих:

$$P_X = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = P_{1X} + P_{2X} + P_X \dots$$

Полная мощность цепи негармонического тока равна корню квадратному из произведения квадратов действующих значений не-синусоидальных напряжений и токов: $S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$.

5.3. Расчет цепей с негармоническими токами

Расчет цепей при негармонических периодических воздействиях основан на использовании *принципа наложения* (см. п. 1.2.5). В соответствии с этим принципом расчет цепи проводится *отдельно* для постоянной составляющей и для каждой гармоники. Затем производится наложение мгновенных значений рассчитанных токов (напряжений).

Если ЭДС содержит постоянную составляющую и множество гармоник, то их действие аналогично действию *последовательно* соединенных источника постоянной ЭДС E_0 и k источников гармонических ЭДС с различными частотами (рис. 5.3).

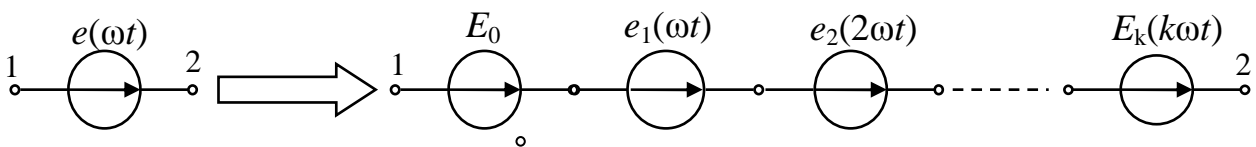


Рис. 5.3. Эквивалентная схема негармонического источника ЭДС

Источник негармонического тока $j(\omega t)$ можно представить в виде *параллельного* соединения источника постоянного тока и источников гармонического тока $j(\omega t) = J_0 + j_1(\omega t) + j_2(2\omega t) + \dots + j_k(k\omega t)$ (рис. 5.4).

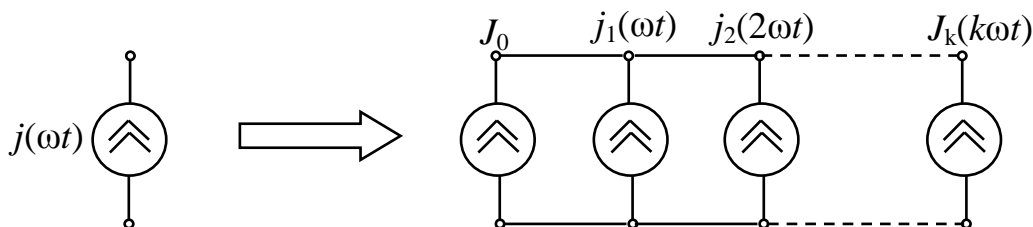


Рис. 5.4. Эквивалентная схема негармонического источника тока

Для постоянных составляющих I_0 , U_0 расчет цепи проводится по методам расчета цепей постоянного тока.

При этом учитывается, что для постоянной составляющей ($\omega = 0$) индуктивное сопротивление $X_L = \omega L = 0$, а емкостное $X_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$.

Следовательно, при расчете цепи (рис. 5.5, а) для постоянных составляющих участки цепи с индуктивностью следует замкнуть, а с емкостью – отключить (рис. 5.5, б).

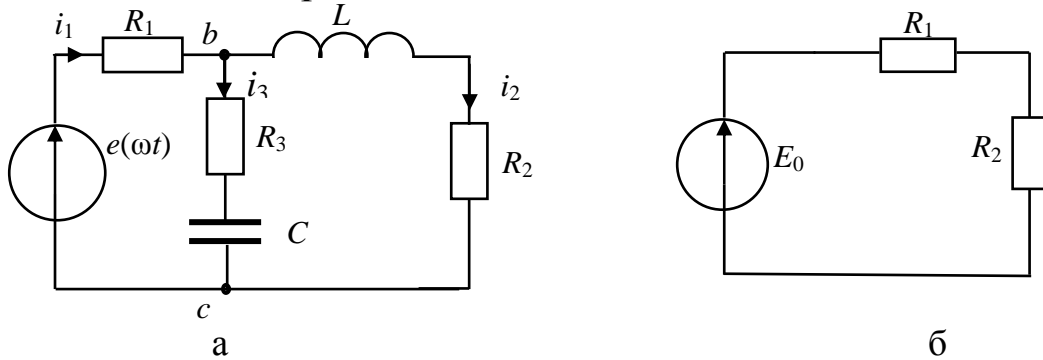


Рис. 5.5. Схема цепи при негармонических токах

При расчете цепи для каждой гармонической составляющей $k\omega$ используют комплексный метод расчета цепей гармонического тока. При этом следует учитывать, что с ростом номера гармоник и их угловой частоты $k\omega$ индуктивное сопротивление увеличивается в k раз ($X_{Lk} = k\omega L$), а емкостное – уменьшается в k раз ($X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}$). Активное сопротивление от частоты не зависит.

Суммируют составляющие по принципу наложения, т. е. мгновенные значения токов и напряжений равны сумме мгновенных значений гармоник.

Пример 5.1. В табл. 5.1 приведены значения периодической негармонической ЭДС за половину периода через равные промежутки времени Δt . Функция $e(\omega t)$ симметрична относительно оси времени t ($n = 0, 1, 2, \dots, 12$).

Таблица 5.1

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $e_n(\omega t)$ | 0 | 6,57 | 9,05 | 7,43 | 5,19 | 4,46 | 5,19 | 4,46 | 5,19 | 7,43 | 9,05 | 6,57 | 0 |

Разложить негармоническую ЭДС в ряд Фурье до пятой гармоники включительно.

Решение.

В таблице 5.1 функция $e(\omega t)$ задана для моментов времени $t_n = n\Delta t$,

$$\text{где } \Delta t = \frac{T}{2 \cdot 12} = \frac{T}{24}.$$

1. Функцию $e(\omega t)$ представим в виде суммы пяти гармоник:

$$e(\omega t) \cong \sum_{k=0}^5 E_{km} \sin(k\omega t + \Psi_k) = \sum_{k=1}^5 (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t).$$

Так как функция $e(\omega t)$ симметрична относительно оси абсцисс, она не содержит постоянной составляющей и четных гармоник (т. е. $k = 1, 3, 5$).

Для вычисления коэффициентов B_{km} и C_{km} воспользуемся одним из методов приближенного вычисления определенных интегралов, например, методом трапеций. Тогда получим:

$$B_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T e(\omega t) \sin k\omega t dt \cong \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{12} e_n \sin k\omega t;$$

$$C_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T e(\omega t) \cos k\omega t dt \cong \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{12} e_n \cos k\omega t;$$

$$E_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad \Psi_k = \arctg \frac{C_{km}}{B_{km}}. \quad \text{Здесь } k\omega t_n = k \frac{2\pi}{T} n; \quad \Delta t = \frac{k\pi}{12} n.$$

Результаты расчета даны в табл. 5.2.

Таблица 5.2

| № гармоники (k) | $B_{km}, \text{ В}$ | $C_{km}, \text{ В}$ | $E_{km}, \text{ В}$ | $\Psi_k, \text{ град}$ |
|------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|------------------------|
| 1 | 7,5 | 0 | 7,5 | 0 |
| 3 | 4,5 | 0 | 4,5 | 0 |
| 5 | 4,5 | 0 | 1,5 | 0 |

Таким образом, $e(\omega t) = 7,5\sin\omega t + 4,5\sin 3\omega t + 1,5\sin 5\omega t$.

2. Комплексные действующие значения гармоник:

$$\underline{E}_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} e^{j\Psi_1} = \frac{7,5}{\sqrt{2}} = 5,3 \text{ В}; \quad \underline{E}_3 = \frac{E_{3m}}{\sqrt{2}} e^{j\Psi_3} = \frac{4,5}{\sqrt{2}} = 3,18 \text{ В};$$

$$\underline{E}_5 = \frac{E_{5m}}{\sqrt{2}} e^{j\Psi_5} = \frac{1,5}{\sqrt{2}} = 1,06 \text{ В}.$$

3. Действующее значение ЭДС равно: $E = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2} = 6,27 \text{ В}.$

Пример 5.2. Для цепи на рис. 5.5, а дано:

$e(\omega t) = 32 + 80\sin(\omega t + 90^\circ) + 48\sin(3\omega t + 20^\circ) \text{ В}; R_1 = R_2 = R_3 = 32 \text{ Ом};$
 $L = 0,16 \text{ Гн}; C = 320 \text{ мкФ}; f_1 = 50 \text{ Гц}.$

Определить мгновенные и действующие значения токов в ветвях и напряжение на конденсаторе U_C .

Решение.

1. Расчет постоянных составляющих.

Для постоянной составляющей входного напряжения $U_0 = 32$ В схема цепи дана на рис. 5.5, б. Тогда получим:

$$I_{01} = I_{02} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{32}{64} = 0,5 \text{ А}; I_{03} = 0; U_{0C} = I_{01}R_2 = 0,5 \cdot 32 = 16 \text{ В.}$$

2. Расчет первых гармоник ($f_1 = 50$ Гц).

На частоте 50 Гц $X_L^{(1)} = \omega_1 L_2 \pi f_1 L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,16 = 50,24$ Ом,

$$X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 320 \cdot 10^{-6}} = 9,95 \text{ Ом.}$$

Комплексные сопротивления ветвей цепи:

$$\underline{Z}_2^{(1)} = R_2 + jX_L^{(1)} = 32 + j50,24 = 59,56 e^{j57,6^\circ};$$

$$\underline{Z}_3^{(1)} = R_3 - jX_C^{(1)} = 32 - j9,95 = 33 e^{-j17,3^\circ} \text{ Ом.}$$

Входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_{\text{вх}}^{(1)} = R_1 + \frac{\underline{Z}_2^{(1)} \cdot \underline{Z}_3^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}} = 32 + \frac{59,56 e^{j57,6^\circ} \cdot 33 e^{-j17,3^\circ}}{32 + j50,24 + 32 - j9,95} = 32 + 26,39 e^{j8^\circ} = 58,25 e^{j3,6^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\text{Ток } \underline{I}_1^{(1)} = \frac{\underline{E}^{(1)}}{\underline{Z}_{\text{вх}}^{(1)}} = \frac{80}{58} e^{j90^\circ} e^{-j3,6^\circ} = 0,971 e^{j86,7^\circ} \text{ А.}$$

$$\text{Напряжение } \underline{U}_{\text{bc}}^{(1)} = \underline{I}_1^{(1)} \frac{\underline{Z}_2^{(1)} \cdot \underline{Z}_3^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}} = 25,25 e^{j94,4^\circ} \text{ В.}$$

Токи в ветвях:

$$\underline{I}_3^{(1)} = \frac{\underline{U}_{\text{bc}}^{(1)}}{\underline{Z}_3^{(1)}} = \frac{25,25 e^{j94,4^\circ}}{33 e^{-j17,3^\circ}} = 0,765 e^{j111,7^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2^{(1)} = \frac{\underline{U}_{\text{bc}}^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)}} = \frac{25,25 e^{j94,4^\circ}}{59,56 e^{j57,6^\circ}} = 0,427 e^{j36,9^\circ} \text{ А.}$$

Проверим правильность расчета по первому закону Кирхгофа для узла b :

$$\underline{I}_1^{(1)} = \underline{I}_2^{(1)} + \underline{I}_3^{(1)} = 0,427 e^{j36,9^\circ} + 0,765 e^{j111,7^\circ} = 0,961 e^{j86,8^\circ} \cong 0,971 e^{j86,7^\circ} \text{ А.}$$

Напряжение на конденсаторе: $\underline{U}_C^{(1)} = -jX_C^{(1)} \cdot \underline{I}_3^{(1)} = 7,52 e^{j21,7^\circ} \text{ В.}$

3. Расчет третьих гармоник.

Третьи гармоники токов рассчитываются аналогично первым гармоникам с учетом изменения сопротивлений реактивных элементов:

$$X_L^{(3)} = 3X_L^{(1)} = 150,7 \text{ Ом}; X_C^{(3)} = \frac{X_C^{(1)}}{3} = 3,32 \text{ Ом}; Z_2^{(3)} = R_2 + jX_L^{(3)} = 154e^{j77} \text{ Ом},$$

$$\underline{E}^{(3)} = \frac{E_m^{(3)}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_e^{(3)}} = 28,2e^{j20^\circ} \text{ В};$$

$$Z_3^{(3)} = R_3 - jX_C^{(3)} = 32,17e^{-j6^\circ} \text{ Ом}; Z_{bc}^{(3)} = \frac{Z_2^{(3)} \cdot Z_3^{(3)}}{Z_2^{(3)} + Z_3^{(3)}} = 31e^{j4,5^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{BX}^{(3)} = R_1 + Z_{bc}^{(3)} = 63e^{j2,2^\circ} \text{ Ом}; \underline{I}_1^{(3)} = \frac{\underline{E}^{(3)}}{Z_{BX}^{(3)}} = 0,447e^{j17,8^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{bc}^{(3)} = \underline{I}_1^{(3)} Z_{bc}^{(3)} = 0,447e^{j17,8^\circ} \cdot 31e^{j4,5^\circ} = 13,86e^{j22,3^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_2^{(3)} = \frac{\underline{U}_{bc}^{(3)}}{Z_2^{(3)}} = 0,09 \cdot e^{-j54,7^\circ} \text{ А}; \underline{I}_3^{(3)} = \frac{\underline{U}_{bc}^{(3)}}{Z_3^{(3)}} = 0,43e^{j28,2^\circ} \text{ А};$$

$$U_C^{(3)} = -jX_C^{(3)} \underline{I}_3^{(3)} = 1,42e^{-j61,8^\circ} \text{ В}.$$

4. Мгновенные значения токов в ветвях:

$$i_1 = I_{01} + i_1^{(1)} + i_1^{(3)} = 0,5 + \sqrt{2} \cdot 0,971 \sin(\omega t + 86,7^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,447 \sin(3 \omega t + 17,8^\circ), \text{ А};$$

$$i_2 = I_{02} + i_2^{(1)} + i_2^{(3)} = 0,5 + \sqrt{2} \cdot 0,427 \sin(\omega t + 36,9^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,09 \sin(3 \omega t - 54,7^\circ), \text{ А};$$

$$i_3 = i_3^{(1)} + i_3^{(3)} = \sqrt{2} \cdot 0,765 \sin(\omega t + 111,7^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0,43 \sin(3 \omega t + 28,2^\circ), \text{ А}.$$

При $t = 0$

$$i_1(0) = 0,5 + \sqrt{2} \cdot 0,971 \sin 86,4^\circ + \sqrt{2} \cdot 0,44 \sin 17,8^\circ = 2,064 \text{ А};$$

$$i_2(0) = 0,5 + \sqrt{2} \cdot 0,427 \sin 36,9^\circ + \sqrt{2} \cdot 0,09 \sin(-54,7^\circ) = 0,759 \text{ А};$$

$$i_3(0) = \sqrt{2} \cdot 0,756 \sin 111,7^\circ + \sqrt{2} \cdot 0,43 \sin 28,2^\circ = 1,227 \text{ А}.$$

По первому закону Кирхгофа:

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) = 0,759 + 1,227 = 2,046 \text{ А}.$$

5. Действующие значения токов и напряжений:

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{32^2 + 56,6^2 + 28,8^2} = 70,8 \text{ В};$$

$$I_1 = \sqrt{I_{01}^2 + (I_1^{(1)})^2 + (I_1^{(3)})^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,971^2 + 0,44^2} = 1,18 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{I_{02}^2 + (I_2^{(1)})^2 + (I_2^{(3)})^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,427^2 + 0,09^2} = 0,66 \text{ А};$$

$$I_3 = \sqrt{(I_3^{(1)})^2 + (I_3^{(3)})^2} = \sqrt{0,756^2 + 0,43^2} = 0,87 \text{ А};$$

$$U_C = \sqrt{(U_{0c})^2 + (U_C^{(1)})^2 + (U_C^{(3)})^2} = \sqrt{16^2 + 7,52^2 + 1,42^2} = 17,2 \text{ В}.$$

Глава VI. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

6.1. Длинные линии

Процессы, протекающие в линиях электропередач, связи, телемеханики и других электрических и радиотехнических устройствах при низких частотах, рассчитываются с помощью схем замещения, представляющих собой совокупность элементов с сосредоточенными параметрами R , L и C . В этом случае токи в проводах и напряжения между ними не зависят от координаты точки, в которой эти параметры определяют.

При большой протяженности проводов и кабелей, а также при высокой частоте токов и напряжений на их параметры оказывают влияние токи смещения и утечек, обусловленные емкостями и проводимостями изоляции проводов. Так как в действительности емкость и проводимость, а также сопротивление и индуктивность линии распределены вдоль нее, ток в проводах не одинаков в различных сечениях, а напряжение между проводами при переходе от одного участка линии к другому изменяется.

Рассмотрим линию связи длиной l , по которой передаются сигналы связи (рис. 6.1).

При передаче по линии ЭМ энергии, в силу конечной скорости распространения энергии $c < \infty$, изменение напряжения на нагрузке \underline{U}_2 будет происходить с запаздыванием относительно изменения напряжения на входе \underline{U}_1 на время t_3 , равное $t_3 = l/c$.

Между напряжениями \underline{U}_2 и \underline{U}_1 возникает сдвиг фаз $\delta = \omega t_3$, который зависит от длины линии и от длины волны сигнала, т. е. от его частоты:

$$\delta = \omega t_3 = 2\pi f \frac{l}{c} = 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{l}{c} = 2\pi \frac{l}{\lambda}.$$

Таким образом, является ли данная линия цепью с распределенными параметрами, зависит от соотношения l/λ .

Практически линию считают цепью с распределенными параметрами, если ее длина соизмерима с длиной волны передаваемого сигнала, т. е. $l \geq 0,1 \lambda$.

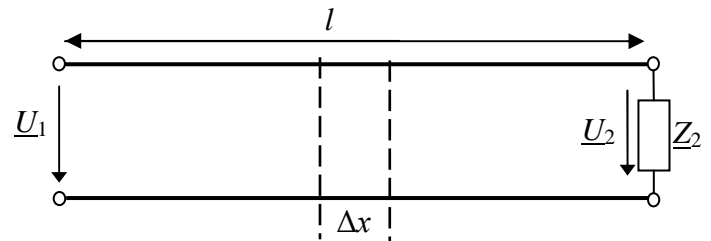


Рис. 6.1. Длинная линия

Линию (любой кабель) при этих условиях называют **длинной линией**.

Например, для ЛЭП, по которой передается энергия с частотой 50 Гц, найдем, что она представляет собой длинную линию при протяженности

$$l_{\text{дл}} \geq 0,1\lambda = 0,1 \frac{c}{f} = 0,1 \frac{300000 \text{ км/с}}{50} = 600 \text{ км.}$$

При частоте 10^3 Гц $l_{\text{дл}} \geq 0,1\lambda = 0,1 \frac{c}{f} = 0,1 \frac{300000 \text{ км/с}}{1000} = 30 \text{ км.}$

При частоте 10^6 Гц $l_{\text{дл}} \geq 0,1\lambda = 0,1 \frac{c}{f} = 0,1 \frac{300000 \text{ км/с}}{10^6} = 30 \text{ м.}$

При составлении схемы замещения такой линии учитывают, что каждый ее малый участок Δx обладает сопротивлением, индуктивностью, а также емкостью и проводимостью между проводниками (рис. 6.2). При этом считают, что параметры линий равномерно распределены по ее длине (**однородная длинная линия**).

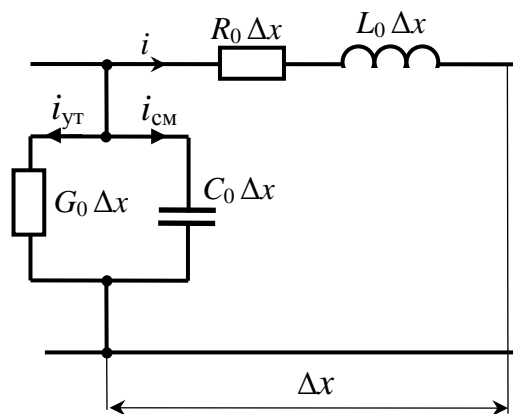


Рис. 6.2. Схема замещения длинной линии

Значения этих параметров на единицу длины (R_0 , L_0 , C_0 и G_0) зависят от конструкции кабеля и называются **первичными параметрами** кабеля.

Если параметры R_0 , L_0 , C_0 , G_0 равномерно распределены по длине линии, линия является однородной длинной линией.

По своей конструкции различают симметричные и несимметричные кабели. Симметричная конструкция представляет собой пару одинаковых изолированных проводников (рис. 6.3, а). Несимметричная конструкция – это совокупность (рис. 6.3, б) соосных проводников (коаксиал).

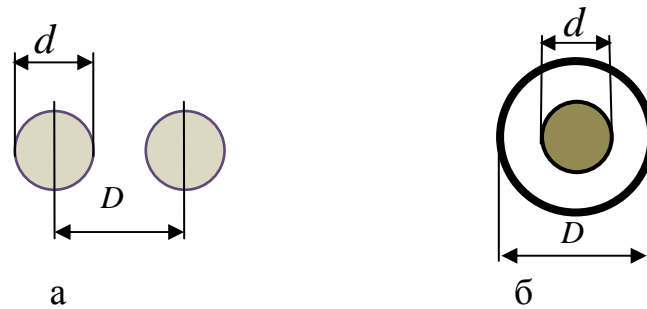


Рис. 6.3. Типовая конструкция кабелей: а – симметричная; б – несимметричная

6.2. Уравнения длинных линий

6.2.1. Уравнения длинной линии в комплексной форме

Задача расчета длинной линии состоит в определении напряжения и тока в любой момент времени t и в любой точке линии x (рис. 6.4) при заданном значении напряжения и тока в начале линии (u_1 и i_1) либо в конце линии (u_2 и i_2): $u = u(t, x)$; $i = i(t, x)$.

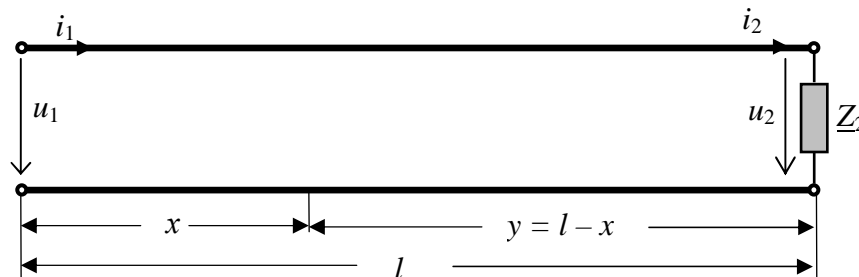


Рис. 6.4. К постановке решения задачи расчета длинной линии

Мгновенные значения напряжения и тока однородной линии связаны дифференциальными уравнениями в частных производных:

$$-\frac{dU}{dX} = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt}; \quad -\frac{di}{dX} = G_0 U + C_0 \frac{dU}{dt}.$$

При гармоническом напряжении источника в установившемся режиме уравнения линии записываются в комплексной форме:

$$-\frac{dU}{dX} = R_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad -\frac{d\underline{I}}{dX} = G_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U}.$$

Здесь $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ – продольное комплексное сопротивление; $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ – поперечная комплексная проводимость.

Из уравнений следует, что для расчета линии достаточно решить одно из уравнений, так как, найдя, например, напряжение \underline{U} , ток \underline{I} можно выразить через это напряжение, и наоборот:

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx}; \quad \underline{U} = -\frac{1}{\underline{Y}_0} \cdot \frac{d\underline{I}}{dx}.$$

Найдем напряжение \underline{U} , решив первое уравнение, для чего продифференцируем его и подставим в него 2-е уравнение:

$$-\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = (R_0 + j\omega L_0) \frac{d\underline{I}}{dx}; \quad \frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)\underline{U}.$$

Обозначим $\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta = \gamma e^{j\theta}$ (коэффициент распространения).

Действительную (α) и мнимую (β) части комплекса $\underline{\gamma}$ называют соответственно *коэффициентом ослабления* (затухания) и *коэффициентом фазы*.

Тогда получим: $-\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U}$ или $\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0$ – однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Общее решение этого дифференциального уравнения для комплексного действующего напряжения \underline{U} имеет вид:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{p_1 x} + \underline{A}_2 e^{p_2 x},$$

где \underline{A}_1 и \underline{A}_2 – постоянные интегрирования,

p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$:
 $p_{1,2} \pm \sqrt{\underline{\gamma}^2}$, $p_1 = -\underline{\gamma}$, $p_2 = \underline{\gamma}$.

Тогда $\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}$,

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \underline{A}_1 (-\underline{\gamma}) e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \underline{A}_2 \underline{\gamma} e^{\underline{\gamma}x} = \underline{B}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{B}_2 e^{\underline{\gamma}x},$$

где $\underline{B}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \underline{A}_1 \underline{\gamma}$, $\underline{B}_2 = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \underline{A}_2 \underline{\gamma}$.

$$\text{Здесь } \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} = \frac{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}}{\underline{Z}_0} = \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}} = \frac{1}{\underline{Z}_B},$$

где $\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = Z_B e^{j\varphi_B}$ – *волновое сопротивление*.

Тогда окончательно получим: $\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_B} \cdot e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_B} \cdot e^{\underline{\gamma}x}$.

Параметры $\underline{\gamma}$, α , β , \underline{Z}_B являются *вторичными параметрами* линии.

Итак, получили систему уравнений:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_B} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_B} \cdot e^{\gamma x}.$$

Найдем постоянные интегрирования \underline{A}_1 , \underline{A}_2 , для чего зададимся граничными условиями, в данном случае значениями тока и напряжения в начале линии, т. е. при $x \rightarrow 0$, когда напряжение и ток в начале линии равны \underline{U}_1 , \underline{I}_1 .

Из уравнений длинной линии в этом случае найдем:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \rightarrow \underline{A}_2 = \underline{U}_1 - \underline{A}_1 \\ \underline{I}_1 \underline{Z}_B &= \underline{A}_1 - \underline{A}_2 \rightarrow \underline{I}_1 \underline{Z}_B = \underline{U}_1 - \underline{A}_1 - \underline{A}_1 \rightarrow \underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) = \underline{A}_2 e^{j\Psi_1} \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B) = \underline{A}_2 e^{j\Psi_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, комплексное напряжение и ток в длинной линии в точке x от начала линии равны:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{\gamma x}; \\ \underline{I} \underline{Z}_B &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{\gamma x}. \end{aligned}$$

Полученные уравнения позволяют определить комплексные напряжение и ток в линии при известных значениях \underline{U}_1 , \underline{I}_1 в начале линии (при $x = 0$), т. е. когда задан источник электрической энергии (генератор).

Если известен режим работы приемника с сопротивлением $\underline{Z}_H = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$ (известны напряжение и ток \underline{U}_2 , \underline{I}_2 в конце линии), будем отсчитывать расстояние от конца линии y . Тогда очевидно равенство: $x = l - y$, и уравнения линии примут вид:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \underline{A}_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma y} + \underline{A}_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma y} = \underline{A}_3 e^{\gamma x} + \underline{A}_4 e^{-\gamma y}; \\ \underline{I} \underline{Z}_B &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \underline{A}_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma y} - \underline{A}_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma y} = \underline{A}_3 e^{\gamma y} - \underline{A}_4 e^{-\gamma y}. \end{aligned}$$

При $y = 0$ (т. е. при $x = l$) получим: $\underline{U}_1 = \underline{A}_3 + \underline{A}_4$, $\underline{I} \underline{Z}_B = \underline{A}_3 - \underline{A}_4$, откуда найдем:

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) = \underline{A}_3 e^{j\Psi_3}, \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B) = \underline{A}_4 e^{j\Psi_4}.$$

Уравнения длинной линии в этом случае примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{\gamma(l-x)} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma(l-x)}; \\ \underline{I} \underline{Z}_B &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{\gamma(l-x)} - \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma(l-x)}. \end{aligned}$$

Итак, полученные уравнения позволяют определить напряжение и ток в линии при известных значениях \underline{U}_2 , \underline{I}_2 в линии (при $y = 0$, $x = l$), т. е. когда задан приемник электрической энергии.

Перейдем от комплексных действующих токов и напряжений к их мгновенным значениям: $\underline{U} \rightarrow u(x,t)$; $\underline{I} \rightarrow i(x,t)$:

$$\underline{U} = A_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha+j\beta)x} + A_2 e^{j\psi_2} e^{(\alpha+j\beta)x} = A_1 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_1-\beta x)} + A_2 e^{\alpha x} e^{j(\psi_2+\beta x)};$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_B} A_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha+j\beta)x} - \frac{1}{\underline{Z}_B} A_2 e^{j\psi_2} e^{(\alpha+j\beta)x} = \frac{A_1}{Z_B} e^{-\alpha x} e^{j(\psi_1+\varphi_B-\beta x)} - \frac{A_2}{Z_B} e^{\alpha x} e^{j(\psi_2+\varphi_B+\beta x)}.$$

Тогда мгновенные значения напряжения и тока будут равны:

$$u(x,t) = \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2}A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2);$$

$$i(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{Z_B} A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi_B) + \frac{\sqrt{2}}{Z_B} A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi_B).$$

Из полученных формул видно, что мгновенные напряжение и ток состоят из двух составляющих:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t); \quad i(x,t) = i_1(x,t) + i_2(x,t).$$

Первое слагаемое мгновенного напряжения и тока представляет собой волну синусоидальной формы с затухающей по длине линии амплитудой и непрерывно изменяющейся фазой βx . Она называется **прямой**, или **падающей** волной напряжения и тока.

Второе слагаемое также является волной синусоидальной формы, но распространяющейся от конца линии к ее началу в направлении ее движения (x уменьшается). Она называется **обратной**, или **отраженной** волной.

Таким образом, в любой точке линии электромагнитная энергия есть результат наложения двух волн, движущихся в противоположных направлениях и затухающих в направлении движения.

Такой режим передачи энергии по линии называется режимом **смешанных волн**.

При отсутствии обратной волны возникает режим **бегущих волн**, когда энергия распространяется только от начала к концу линии.

Мгновенные значения прямой и обратной волны являются функциями двух переменных – времени t и расстояния от начала линии x :

$$u_1(x_1,t) = \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x_1} \sin[\omega t - (\beta x_1 - \psi_1)]; \quad u_2(x_1,t) = \sqrt{2}A_2 e^{\alpha x_1} \sin[\omega t + (\beta x_1 + \psi_2)].$$

В некоторой фиксированной точке x_1 падающие и отраженные волны будут представлять собой обычные синусоидальные функции времени (рис. 6.5):

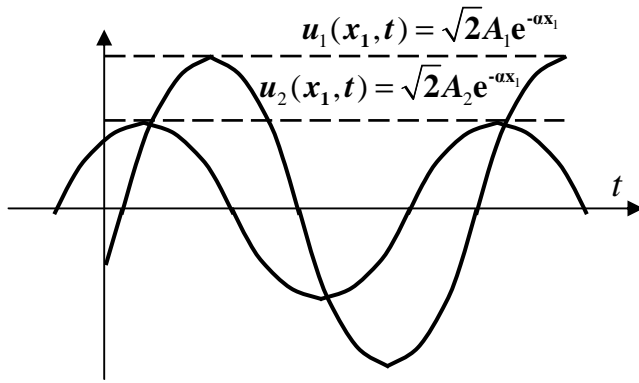


Рис. 6.5. Прямая и обратная волна в фиксированной точке

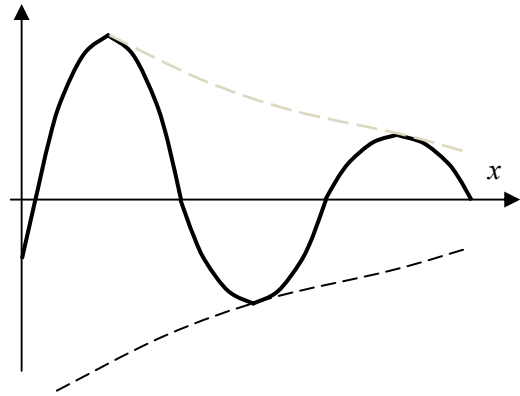


Рис. 6.6. Прямая волна вдоль линии в фиксированный момент времени

Изменение напряжения вдоль линии в фиксированный момент времени t_1 будет представлять собой синусоидальное колебание с затухающей амплитудой (рис. 6.6):

$$u_1(x, t_1) = \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} \sin[(\omega t_1 + \psi_1) - \beta x] = -\sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} \sin[\beta x - (\omega t_1 + \psi_1)];$$

$$u_2(x, t_1) = \sqrt{2}A_2 e^{\alpha x} \sin[\beta x - (\omega t_1 + \psi_2)].$$

С ростом t волны сдвигаются вдоль линии с одновременным уменьшением амплитуды. Аналогично можно рассматривать падающую волну и отраженную волну тока.

6.2.2. Уравнения длинной линии с гиперболическими функциями

При анализе длинных линий удобно воспользоваться гиперболическими функциями, значения которых табулированы. В полученных выражениях при заданных $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ после группировки получим:

$$\underline{U} = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x};$$

$$\underline{I} \underline{Z}_B = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{\gamma x} - \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x};$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{I}_1 \underline{Z}_B \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{I}_1 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \gamma x;$$

$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x.$$

При заданных $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ из соответствующих выражений

$$\underline{U} = \underline{A}_3 e^{\gamma x'} + \underline{A}_4 e^{-\gamma x'}; \quad \underline{I} \underline{Z}_B = \underline{A}_3 e^{\gamma x'} - \underline{A}_4 e^{-\gamma x'}.$$

Аналогично при заданном приемнике получим:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{I}_2 \underline{Z}_B \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} x;$$

$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x.$$

6.3. Основные характеристики и параметры длинных линий

Рассмотрим параметры длинной линии, определяющие характер изменения напряжения $u(x,t)$ и тока $i(x,t)$ вдоль линии. С этой целью рассмотрим линию бесконечной длины, в которой будет существовать только падающая волна напряжения и тока:

$$\underline{U}_\Pi = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} = \frac{1}{2} (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B) e^{-\gamma x}; \quad \underline{I}_\Pi = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma x}}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} + \underline{I}_1 \right) e^{-\gamma x}.$$

6.3.1. Волновое сопротивление

Рассмотрим отношение падающих волн напряжения и тока:

$$\frac{\underline{U}_\Pi}{\underline{I}_\Pi} = \frac{(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B)}{(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B)} \underline{Z}_B = \underline{Z}_B = \text{const.}$$

Таким образом, волновое сопротивление длинной линии \underline{Z}_B представляет собой отношение комплексных величин напряжения и тока падающей волны в любой точке линии, т. е. \underline{Z}_B одинаково в любой точке линии.

Волновое сопротивление определяется только конструкцией кабеля, т. е. зависит от первичных параметров:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega_0 L_0}{G_0 + j\omega_0 C_0}} = Z_B e^{j\varphi_B},$$

где φ_B – фазовый угол.

Рассмотрим зависимость Z_B и φ_B от частоты:

при $\omega = 0$ $\underline{Z}_B(0) = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$, $\varphi_B = 0$ – чисто активное;

при $\omega = \infty$ $\omega L_0 \gg R_0$, $\omega C_0 \gg G_0$, $\underline{Z}_B(\infty) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \rho$, $\varphi_B = 0$ – активное.

На практике $\frac{R_0}{G_0} > \frac{L_0}{C_0}$, следовательно, $\underline{Z}_B(0) > \underline{Z}_B(\infty)$.

Таким образом, по абсолютному значению Z_B с ростом частоты будет уменьшаться от $\sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$ до $\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ (рис. 6.7).

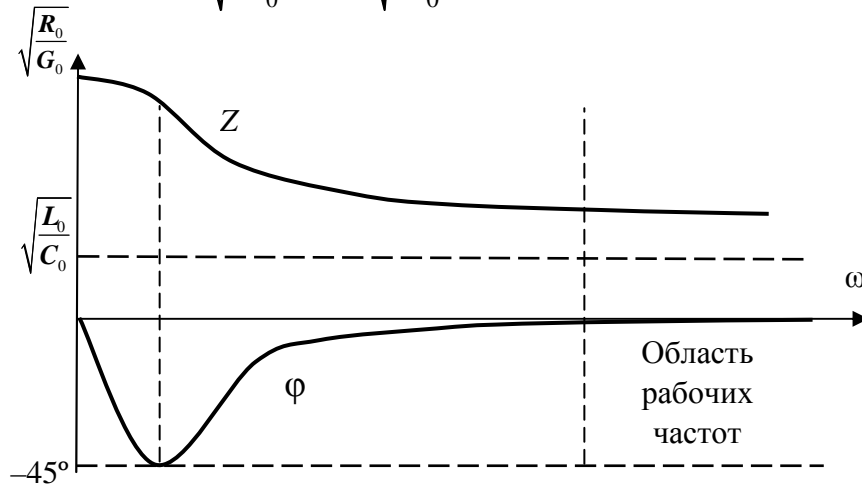


Рис. 6.7. Зависимость волнового сопротивления от частоты

Можно показать, что фазовый угол φ_B всегда отрицателен и будет иметь экстремум, равный (-45°) в области низких частот.

Из приведенной зависимости можно определить область рабочих частот данного типа кабеля, когда Z_B является чисто активным и постоянным.

Амплитуда и фазы волн тока и напряжения определяются величиной Z_B . Поэтому волновым сопротивлением называют сопротивление, которое оказывает линия распространяющейся вдоль нее волне напряжения (тока).

Величина волнового сопротивления зависит от геометрических размеров линии и свойств среза, в которой она находится.

6.3.2. Коэффициент затухания

При отсутствии отраженной волны модуль отношения между значениями напряжения и тока в точках линии, отстоящих друг от друга на расстоянии в один километр, будет равен:

$$\left| \frac{U_{\Pi}(x)}{U_{\Pi}(x+1)} \right| = \left| \frac{A_1 e^{-\gamma x}}{A_1 e^{-\gamma(x+1)}} \right| = \left| \frac{A_1 e^{-(\alpha+j\beta)x}}{A_1 e^{-(\alpha+j\beta)(x+1)}} \right| = \left| \frac{e^{-\alpha x} \times e^{-j\beta x}}{e^{-\alpha(x+1)} \times e^{-j\beta(x+1)}} \right| = \left| \frac{1}{e^{-\alpha} \times e^{-j\beta}} \right| = |e^{\alpha} \times e^{j\beta}| = e^{\alpha},$$

откуда найдем $\frac{U_{\Pi}(x)}{U_{\Pi}(x+1)} = \frac{I_{\Pi}(x)}{I_{\Pi}(x+1)} = e^{-\alpha}$, $\alpha = \ln \frac{U_{\Pi}(x)}{U_{\Pi}(x+1)}$.

Коэффициент α является вещественной частью комплексного числа (коэффициента распространения) $\gamma = \alpha + j\beta$:

$$\alpha = \operatorname{Re}[\underline{\gamma}] = \operatorname{Re}\left[\sqrt{\underline{Z}_0 Y_0}\right] = \operatorname{Re}\left[\sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}\right] = \sqrt{\frac{1}{2}(Z_0 Y_0 + R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0)},$$

$$\text{где } Z_0 = \sqrt{R_0^2 + (\omega L_0)^2}, \quad Y_0 = \sqrt{G_0^2 + (\omega C_0)^2}.$$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{j\omega L_0 \left(1 + \frac{R_0}{j\omega L_0}\right) j\omega C_0 \left(1 + \frac{G_0}{j\omega C_0}\right)} = \left\| \sqrt{1 + \frac{R_0}{j\omega L_0}} \approx 1 + \frac{R_0}{2j\omega L_0} \right\| \left\| \sqrt{1 + \frac{G_0}{j\omega C_0}} \approx 1 + \frac{G_0}{2j\omega C_0} \right\| \approx \\ &\approx j\omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left(1 + \frac{R_0}{2j\omega L_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{G_0}{2j\omega C_0}\right) = j\omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left(1 + \frac{R_0}{2j\omega L_0} + \frac{G_0}{2j\omega C_0} - \frac{R_0 G_0}{4\omega^2 L_0 C_0}\right). \end{aligned}$$

Отбросив член второго порядка малости $\frac{R_0 G_0}{4\omega^2 L_0 C_0}$, получим:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \frac{R_0}{2\rho} + \frac{G_0 \rho}{2} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \frac{R_0}{2\rho} + j\omega \sqrt{L_0 C_0},$$

где коэффициент затухания $\alpha = \frac{R_0}{2\rho} \left[\frac{\text{дБ}}{\text{м}} \right], \left[\frac{\text{Нп}}{\text{м}} \right]$ (в кабелях, применяемых в радиотехнических устройствах, проводимостью утечки G_0 можно пренебречь).

Таким образом, коэффициент затухания или ослабления α характеризует степень уменьшения напряжения и тока на 1 км линии.

Коэффициент α , вычисленный по приведенной формуле, измеряется в **неперах на км** (Нп/км). Непер весьма крупная единица измерения. Поэтому на практике α измеряют в децибелах на единицу длины:

$$\alpha = 20 \lg \frac{U(x)}{U(x+1)} \text{ дБ / км.}$$

Соотношение между этими единицами измерения составляет:

$$1 \text{ Нп} = 8,69 \text{ дБ}, \quad 1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп.}$$

Ослабление равно 1 Б, если при $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_B$ полная мощность на входе

больше полной мощности на выходе линии в 10 раз, т. е. $\frac{S_1}{S_2} = 10$.

С ростом частоты α монотонно возрастает пропорционально корню квадратному из частоты $\sqrt{\omega}$ (рис. 6.8).

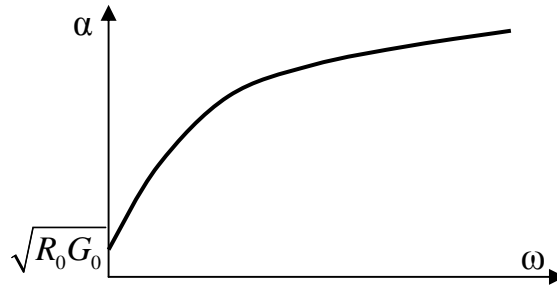


Рис. 6.8. Зависимость α от частоты

$$\text{При } \omega = 0 \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(R_0 G_0 + R_0 G_0)} = \sqrt{R_0 G_0}.$$

Для каждого типа кабеля зависимость $\alpha(\omega)$ приводится в справочниках.

6.3.3. Коэффициент фазы

Из выражений для падающей волны напряжения и тока следует, что аргумент отношения их комплексных значений равен:

$$\arg \left[\frac{U_{\Pi}(x_1)}{U_{\Pi}(x_2)} \right] = \arg \left[\frac{A_1 e^{-(\alpha+j\beta)x_1}}{A e^{-(\alpha+j\beta)x_2}} \right] = \arg \left[\frac{e^{-\alpha x_1} \times e^{-j\beta x_1}}{e^{-\alpha x_2} \times e^{-j\beta x_2}} \right] = \arg \left[e^{-\alpha(x_1-x_2)} \times e^{-j\beta(x_1-x_2)} \right] = -j\beta(x_1-x_2).$$

Для мгновенных напряжений в этих точках получим:

$$u_{\Pi}(x_1, t) = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x_1} \sin(\omega t - \beta x_1 + \psi_1); \quad u_{\Pi}(x_2, t) = \sqrt{2} A e^{-\alpha x_2} \sin[\omega t - \beta(x_1 - x_2) + \psi_1].$$

Если $x_1 - x_2 = 1$ км, то очевидно, что коэффициент фазы β характеризует изменение фазы волны напряжения и тока на каждом километре линии и измеряется рад/км или град/км.

Так как β является мнимой частью коэффициента распространения $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$, то после преобразования выражения

$$\beta = \text{Im}(\underline{\gamma}) = \text{Im} \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \text{Im} \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{\frac{1}{2}(\underline{Z}_0 Y_0 - R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0)}.$$

найдем, что с ростом частоты β монотонно возрастает.

6.3.4. Фазовая скорость и длина волны

Фазовой скоростью (v_{ϕ}) распространения напряжения и тока вдоль линии называется скорость перемещения некоторой точки «а» падающей волны с начальной фазой Ψ_a (рис. 6.9).

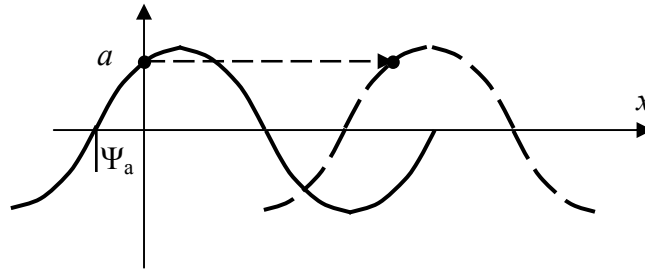


Рис. 6.9. К определению фазовой скорости

Для падающей волны напряжения

$$u_n(x, t) = \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) = U_m(x) \sin(\omega t + \psi_a)$$

фазовая скорость v_ϕ есть скорость перемещения фазы $(\omega t - \beta x + \psi_1)$.

Для ее определения продифференцируем аргумент падающей волны и приравняем дифференциал нулю:

$$\frac{d(\omega t - \beta x + \psi_1)}{dt} = 0; \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0; \quad v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta}.$$

Длиной волны λ называется расстояние между двумя точками волны напряжения или тока в направлении ее движения, фазы в которых отличаются на 2π радиан. Тогда найдем:

$$(\omega t - \beta x + \psi_1) - [\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1] = 2\pi; \quad \beta \lambda = 2\pi; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{v_\phi}{\beta}.$$

6.3.5. Коэффициент отражения

Из уравнений длинной линии при заданном приемнике

$$\underline{U} = \underline{A}_3 e^{\gamma x'} + \underline{A}_4 e^{-\gamma x'} \quad \text{и} \quad \underline{I} \underline{Z}_B = \underline{A}_3 e^{\gamma x'} - \underline{A}_4 e^{-\gamma x'}$$

и при произвольном сопротивлении нагрузки $\underline{Z}_H = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$ следует, что

при $\underline{A}_4 \neq 0$ в линии возникает обратная волна (часть падающей волны, которая отражается от конца линии).

Отражение части энергии количественно характеризуется коэффициентом отражения ρ , который равен отношению комплексов напряжения или тока обратной и прямой волн в любой точке линии:

- коэффициент отражения по напряжению

$$\rho_{-2}^u = \frac{\underline{U}_0}{\underline{U}_n} = \frac{-\underline{A}_4 e^{-\gamma x'}}{\underline{A}_3 e^{\gamma x'}} = -\frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_B}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_B} e^{-2\gamma x'} = -\frac{\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} - \underline{Z}_B}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} + \underline{Z}_B} e^{-2\gamma x'} = -\frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B} e^{-2\gamma x'};$$

- коэффициент отражения по току

$$\rho_{\underline{2}}^i = \frac{\underline{I}_0}{\underline{I}_{\text{п}}} = \frac{-\underline{A}_4 e^{-\gamma x'}}{\underline{A}_3 e^{\gamma x'}} = -\frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_B}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_B} e^{-2\gamma x'} = -\frac{\underline{U}_2 / \underline{I}_2 - \underline{Z}_B}{\underline{U}_2 / \underline{I}_2 + \underline{Z}_B} e^{-2\gamma x'} = -\frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B} e^{-2\gamma x'}.$$

Знак минус означает, что фаза тока при отражении меняется на противоположную. Таким образом, $\rho_{\underline{2}}^i = -\rho_{\underline{2}}^u$.

Из приведенных формул следует, что $\rho \neq 0$ при $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_B$. В общем случае $\rho \neq 0$ в любой точке линии, если есть какая-либо неоднородность, т. е. имеется повреждение линии.

$$\text{В конце линии при } x' = 0 \quad \rho_{\underline{2}}^u = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B}.$$

При $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_B$ часть энергии отражается от нагрузки, возвращается и также может от нее отразиться с коэффициентом отражения

$$\rho_{\underline{1}}^u = \frac{\underline{U}_{01}}{\underline{U}_{\text{п.1}}} = \frac{\underline{A}_2 e^{\gamma x}}{\underline{A}_1 e^{\gamma x}} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B} = \frac{\underline{U}_1 / \underline{I}_1 - \underline{Z}_B}{\underline{U}_1 / \underline{I}_1 + \underline{Z}_B} = \frac{\underline{Z}_{\text{вх}} - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_{\text{вх}} + \underline{Z}_B} = \rho_{\underline{1}}^u,$$

где $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$ – входное сопротивление линии.

При $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$ коэффициент $\rho = 0$. Такой режим работы линии называется **согласованным**, когда вся мощность в конце линии поглощается нагрузкой. Из приведенных формул следует, что в этом случае в любой точке линии отношение комплексов $\underline{U}_2 / \underline{I}_2 = \underline{Z}_B = \underline{Z}_H$.

В этом случае

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_B) = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}) = \underline{U}_2, \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_B) = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}) = 0,$$

т. е. $\underline{U}_{\text{отр.}} = 0$ и $\underline{I}_{\text{отр.}} = 0$.

Достоинства согласованного режима:

1. Отраженная волна создает в начале линии эффект эха, что ухудшает качество связи. При согласованном режиме этот эффект отсутствует.

2. Исключаются дополнительные потери мощности в линии за счет отраженных волн.

3. При отраженных волнах в отдельных точках линии может возникать значительное увеличение напряжения (при синфазном сложении падающей и отраженной волн напряжений).

При проведении измерений на линии, а также при практическом использовании отрезков длинных линий (см. ниже) линию переводят в режим короткого замыкания и холостого хода.

При коротком замыкании $\underline{U}_{2кз} = 0$, $\underline{\rho}^u = -1$ $\underline{\rho}^i = 1$. В режиме холостого хода $\underline{I}_{2хх} = 0$, $\underline{\rho}^i = 1$ $\underline{\rho}^u = -1$.

6.4. Линии без искажений и линии без потерь

6.4.1. Линии без искажений

Сигналы, передаваемые по линиям связи (телефонные, телеграфные, любые модулированные сигналы), являются сигналами несинусоидальной формы. Токи и напряжения этих сигналов могут быть представлены рядом Фурье в виде суммы гармоник различной частоты: $f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + A_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n)$.

Так как коэффициенты ослабления, фазы и фазовая скорость зависят от частоты, передаваемые по линиям сигналы претерпевают амплитудные и фазовые искажения. Действительно:

$$\gamma(\omega) = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)};$$

$$\alpha(\omega); \beta(\omega); v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{2\pi f}{\beta(f)}.$$

В результате форма сигнала на выходе линии будет отличаться от формы сигнала на ее входе, что приведет к нарушению работы систем связи (рис. 6.10).

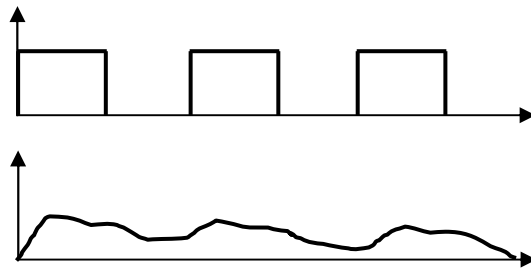


Рис. 6.10. Искажения сигналов в линии

Чтобы линия была неискажающей, коэффициент ослабления, фазы и фазовая скорость не должны зависеть от частоты. Это имеет место при условии $R_0/L_0 = G_0/C_0$ или $\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}$ (условие Хевисайда). В этом случае:

$$\begin{aligned}
\gamma(\omega) &= \sqrt{R_0 G_0 + j\omega L_0 G_0 + j\omega C_0 R_0 - \omega^2 L_0 C_0} = \sqrt{R_0 G_0 + j\omega L_0 G_0 + j\omega C_0 R_0 - \omega^2 L_0 C_0} = \\
&= \sqrt{(R_0 G_0 + j\omega L_0 G_0) \left(1 + \frac{j\omega C_0 R_0 - \omega^2 L_0 C_0}{R_0 G_0 + j\omega L_0 G_0}\right)} = \sqrt{(R_0 G_0 + j\omega L_0 G_0) \left(1 + \frac{j\omega C_0 R_0 (1 + j\omega L_0/R_0)}{R_0 G_0 (1 + j\omega L_0/R_0)}\right)} = \\
&= \sqrt{(R_0 G_0 + j\omega L_0 G_0)(1 + j\omega C_0/G_0)} = \sqrt{R_0 G_0 (1 + j\omega L_0/R_0)(1 + j\omega C_0/G_0)} = \\
&= \sqrt{R_0 G_0 (1 + j\omega C_0/G_0)^2} = \sqrt{R_0 G_0} (1 + j\omega C_0/G_0) = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{R_0 G_0} C_0/G_0 = \\
&= \sqrt{R_0 G_0} + j\omega C_0 \sqrt{R_0/G_0} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta. \quad (\text{Учтено равенство } \frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}).
\end{aligned}$$

Таким образом, получили: $\underline{\gamma} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta$,

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} = \text{const}, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \quad v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \text{const}.$$

В этом случае Z_B будет активным сопротивлением:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{R_0 (1 + j\omega L_0/R_0)}{G_0 (1 + j\omega C_0/G_0)}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_B.$$

Следовательно, токи прямой и обратной волны совпадают по фазе с напряжением. Взяв производную от известного выражения

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(Z_0 Y_0 + R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0)} \quad \text{по } Z_0 \text{ и приравняв ее нулю } \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Z_0} = 0 \right),$$

найдем, что при условии $R_0/L_0 = G_0/C_0$ коэффициент затухания $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$ будет минимален.

6.4.2. Линии без потерь

При использовании длинных линий на высоких частотах, когда $\omega L_0 \gg R_0$ и $\omega C_0 \gg G_0$, значения R_0 и G_0 можно принять равными нулю. Такие линии называют *линиями без потерь*.

Тогда из известных выражений для вторичных параметров получим:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(Z_0 Y_0 + R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0)} \quad \text{где } Z_0 = \sqrt{R_0^2 + (\omega L_0)^2} \approx \omega L_0, \quad Y_0 = \sqrt{G_0^2 + (\omega C_0)^2} \approx \omega C_0,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 L_0 C_0 + R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0)} \approx 0.$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \approx 0, \quad v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_B, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Таким образом, все вторичные параметры либо от частоты не зависят, либо зависят линейно. Следовательно, линия без потерь одновременно является линией без искажений.

В этом случае:

$$\underline{Z}_0 = j\omega L_0; \quad \underline{Y}_0 = j\omega C_0; \quad \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = \sqrt{L_0 / C_0} = Z_B$ – волновое сопротивление является активным.

Если заданы напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 в начале линии, то получим:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \cos \beta x - j \underline{I}_1 Z_B \sin \beta x; \quad \underline{I} = -j \frac{\underline{U}_1}{Z_B} \sin \beta x + \underline{I}_1 \cos \beta x.$$

При заданных \underline{U}_2 и \underline{I}_2 в конце линии

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{I}_2 Z_B \sin \beta y; \quad \underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y.$$

Мгновенные значения напряжения и тока при $\underline{U}_2 = U_2$ и $\underline{I}_2 = I_2 e^{-j\varphi}$:

$$u = U_2 \sqrt{2} \cos \beta y \cdot \sin \omega t + \sqrt{2} I_2 Z_B \sin \beta y \cdot \sin(\omega t + \pi/2 - \varphi_2);$$

$$i = \frac{\sqrt{2} U_2}{Z_B} \sin \beta y \cdot \sin(\omega t + \pi/2) + \sqrt{2} I_2 \cos \beta y \cdot \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Распределение напряжения и тока вдоль линии в конкретный момент времени t является синусоидальным.

Г л а в а VII. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

7.1. Общие сведения о нелинейных цепях

Нелинейными электрическими цепями называются цепи, содержащие хотя бы один нелинейный элемент (НЭ).

Нелинейными являются элементы (нелинейные резистивные, индуктивные и емкостные элементы), у которых основные параметры R , L , C зависят от режимов их работы. Эта зависимость определяется следующими характеристиками:

- для нелинейных резистивных элементов – вольт-амперными характеристиками (ВАХ) вида $R(i) = u/i$ или $R(u) = u/i$;
- для нелинейных индуктивностей – вебер-амперными характеристиками (ВБАХ) вида $L(i) = \Psi/i$ или $\Psi(i) = f(i)$;
- для нелинейных емкостных элементов – кулон-вольтными характеристиками (КЛВХ) вида $C(u) = q/u$ или $q(u) = f(u)$.

Характеристики НЭ задаются в виде графических зависимостей или таблицами.

По виду действующего в цепях источника ЭДС или тока различают нелинейные цепи постоянного и переменного тока.

Процессы, протекающие в нелинейных цепях, описывают системой нелинейных уравнений, составляемых по законам Кирхгофа. Решение этих уравнений проводится графическими, графоаналитическими или аналитическими методами с использованием компьютера.

7.2. Нелинейные электрические цепи постоянного тока и методы их расчета

НЭ в таких цепях являются нелинейные резистивные элементы в виде нелинейных резисторов, диодов, транзисторов и др.

Процессы в нелинейных цепях постоянного тока описывают системой *нелинейных алгебраических уравнений*. Задача расчета таких цепей состоит в определении токов и напряжений на всех участках цепи при заданных ВАХ НЭ, сопротивлениях линейных резисторов и параметрах источников (ЭДС, тока).

Каждой т.к. ВАХ НЭ (рис. 7.1) соответствует определенное сопротивление $R_{ст} = U_k/I_k = \operatorname{tg} \alpha m_u/m_i$, которое называется статическим сопротивлением.

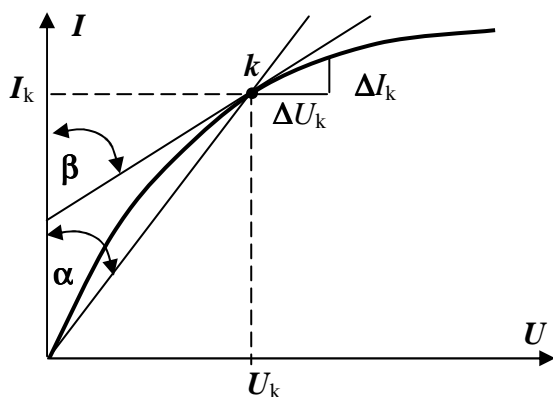


Рис. 7.1. Статическое и дифференциальное сопротивление

Отношение приращения напряжения в т. k ΔU_k к приращению тока ΔI_k при $\Delta U_k \rightarrow 0$ и $\Delta I_k \rightarrow 0$ является дифференциальным сопротивлением НЭ, которое характеризует НЭ при малых изменениях напряжения и тока: $R_{\text{диф}} = dU_k/dI_k = \text{tg}\beta \ m_w/m_i$.

7.2.1. Графические методы расчета

В схеме цепи (рис. 7.2) при заданном напряжении U_0 и ВАХ НЭ в виде зависимостей $I(U_1)$ и $I(U_2)$ (рис. 7.3) требуется определить ток цепи I_0 и напряжения на НЭ U_1 и U_2 . Рассмотрим два способа расчета цепи.

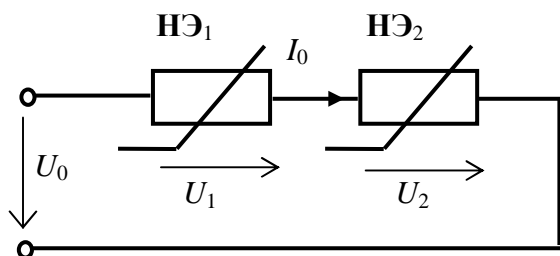


Рис. 7.2. Последовательное соединение НЭ

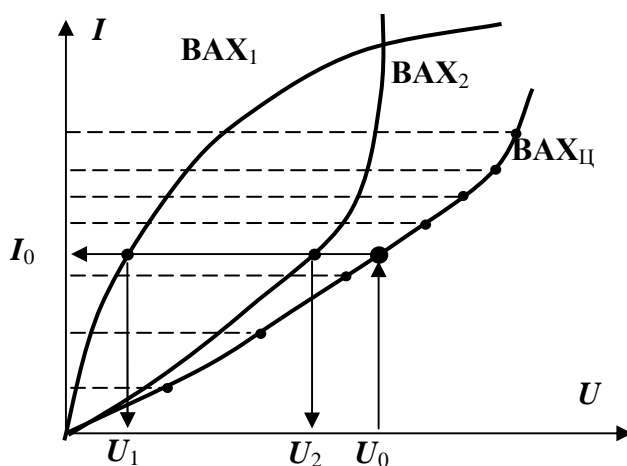


Рис. 7.3. Графический расчет цепи

Решим графически уравнение 2-го закона Кирхгофа $U = U_1 + U_2$.

В общей системе координат строятся ВАХ двух НЭ. Затем, задаваясь несколькими произвольными значениями токов, суммируем графически соответствующие им значения напряжений на НЭ и находим общее напряжение цепи при каждом значении тока. Соединив плавной линией полученные точки, строим общую ВАХ цепи $I = f(U)$. Тем самым два НЭ заменяются одним НЭ с эквивалентной ВАХ_ц.

По эквивалентной ВАХ_ц при заданном напряжении источника U_0 находим ток цепи I_0 . Затем по ВАХ₁ и ВАХ₂ при токе I_0 определяем напряжения на каждом НЭ U_1 и U_2 .

Расчет цепи методом пересечения характеристик. Из уравнения второго закона Кирхгофа найдем $U_1 = U_0 - U_2$, что позволяет построить график зависимости $I = f(U_0 - U_2)$. Точка пересечения кривых $I = f(U_0 - U_2)$ и $I(U_1)$ (точка N) определяет ток I_0 , так как ток в цепи один (рис. 7.4).

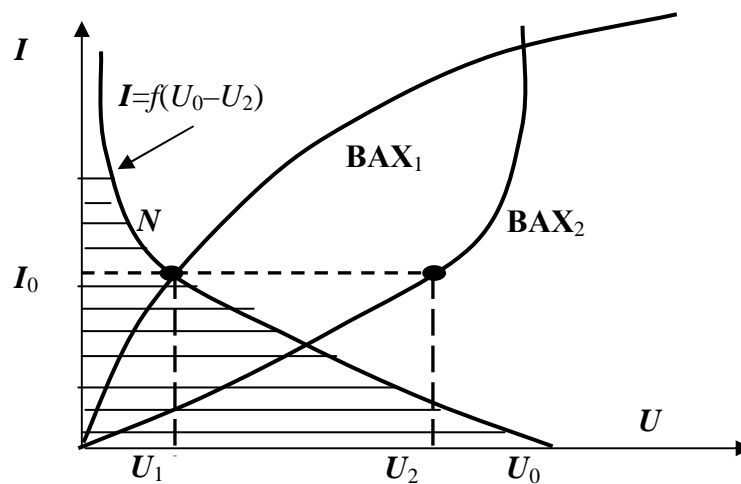


Рис. 7.4. Метод пересечения

Затем по ВАХ₁ и ВАХ₂ определяем напряжения на НЭ U_1 и U_2 . При параллельном соединении НЭ (рис. 7.5) общий ток в цепи по первому характеристическому закону Кирхгофа равен $I = I_1 + I_2$.

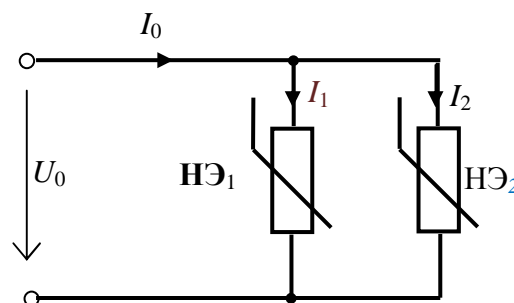


Рис. 7.5. Параллельное соединение НЭ

Задаваясь несколькими произвольными значениями напряжений, по ВАХ суммируем графически соответствующие им значения токов I_1 и I_2 на НЭ и находим общий ток цепи при каждом значении напряжения (рис. 7.6). Соединив линией полученные точки, строим общую ВАХ цепи $U = f(I)$.

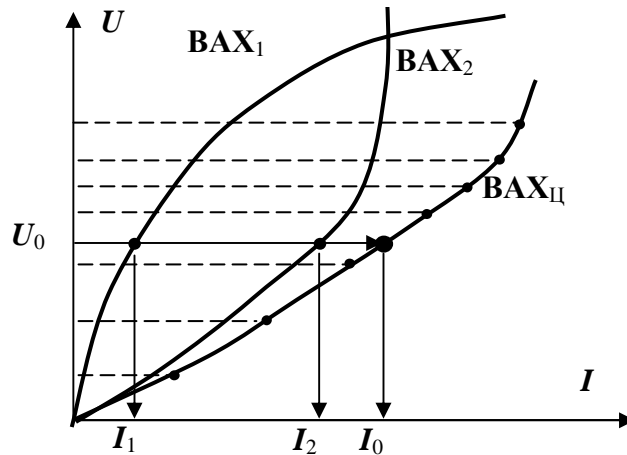


Рис. 7.6. Графический расчет цепи

По эквивалентной ВАХ_ц при заданном токе I_0 находим напряжение источника U_0 , а по ВАХ₁ и ВАХ₂ определяем токи через каждый НЭ I_1 и I_2 .

7.2.2. Аналитические методы расчета

При расчете цепи аналитическими методами ВАХ НЭ выражают (аппроксимируют) аналитическими функциями, достаточно точно отражающими зависимости $U = f(I)$ или $I = f(U)$ этих элементов.

Симметричные ВАХ НЭ во многих случаях удачно аппроксимируются степенным полиномом с нечетными степенями $I = \sum a_m U^n$, где $m = 1, 2, 3, \dots$, а $n = 1, 3, 5, \dots$. Нелинейные алгебраические уравнения в этих случаях обычно решают численными методами.

На первом этапе расчета цепи при аппроксимации ВАХ степенным полиномом $I = \sum a_m U^n$ определяют коэффициенты полинома a_m . Затем по схеме цепи составляют систему уравнений по законам Кирхгофа, решение которой может быть выполнено одним из численных методов: методами простых итераций, методами дихотомии (деления отрезка пополам), Зейделя и др.

Коэффициенты полинома могут быть найдены при помощи известных математических методов, например, методом наименьших квадратов.

По методу наименьших квадратов коэффициенты полинома a_m определяются по условию: сумма квадратов ошибок (ρ) должна быть минимальной.

Если $I_j(U_j)$ – значение тока и напряжения в точке j в соответствии с заданной ВАХ НЭ $I=f(U)$, а $I_j=\sum a_m U_j^n$ – значение тока, определяемое по кривой аппроксимирующей функции при том же значении U_j , то при трех слагаемых этой функции ($m=3$) и $n=1, 3, 5$ должно выполняться условие:

$$\rho = \sum_{j=1}^N \delta_j^2 = \sum_{j=1}^N (a_1 U_j + a_2 U_j^3 + a_3 U_j^5 - I_j(U_j))^2 = \min,$$

где N – число заданных значений тока и напряжения по ВАХ, δ_j – ошибка, представляющая собой разность между истинным значением функции $U_j = f(I_j)$ в точке j и ее приближенным значением $I_j = a_1 U_j + a_2 U_j^3 + a_3 U_j^5$ в той же точке (рис. 7.7).

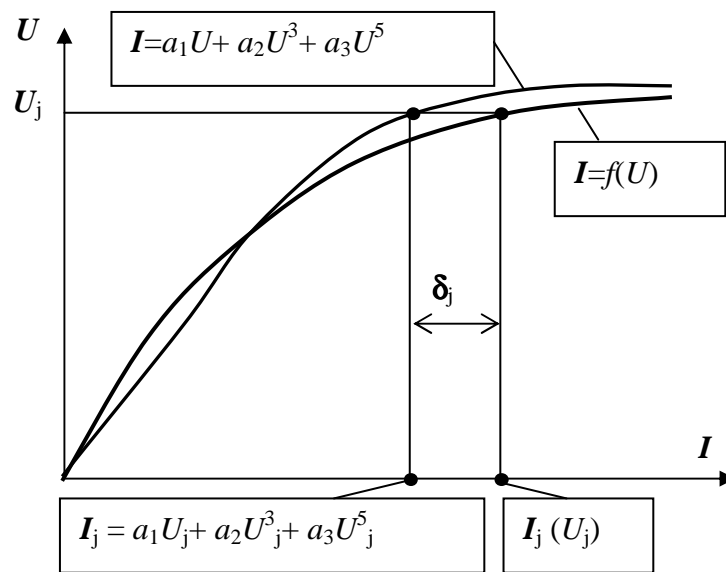


Рис. 7.7. Пояснение метода наименьших квадратов

Взяв частные производные от ρ по коэффициентам a_1, a_2, a_3 и приравняв их к нулю, в итоге получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$a_1 \sum_{j=1}^N U_j^4 + a_2 \sum_{j=1}^N U_j^6 + a_3 \sum_{j=1}^N U_j^8 = \sum_{j=1}^N I_j(U_j) \cdot U_j^3;$$

$$a_1 \sum_{j=1}^N U_j^6 + a_2 \sum_{j=1}^N U_j^8 + a_3 \sum_{j=1}^N U_j^{10} = \sum_{j=1}^N I_j(U_j) \cdot U_j^5.$$

Решение этих уравнений дает значения коэффициентов a_1, a_2, a_3 .

Решение нелинейного уравнения степени n вида $F(x) = 0$ заключается в отыскании одного или всех его корней на отрезке $[a, b]$ изменения x .

Пример 7.1.

В схеме (рис. 7.8) рассчитать токи при заданных значениях E , R_1 , R_2 и ВАХ НЭ $I_2 = f(U_2)$.

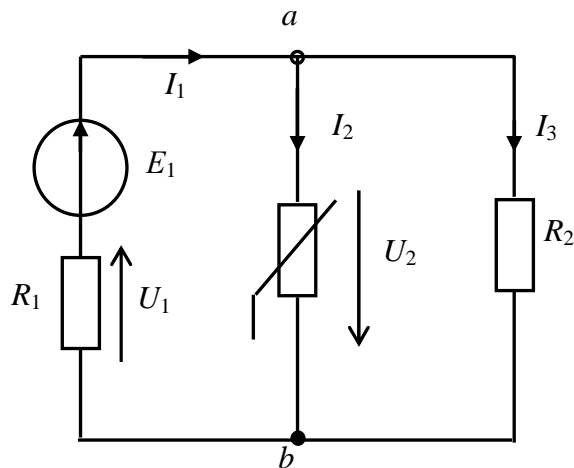


Рис. 7.8. Заданная схема цепи

Решение.

1. Преобразуем исходную схему, объединив две ветви в эквивалентную ветвь с $E_{\text{Э}}$ и $R_{\text{Э}}$ (рис. 7.9).

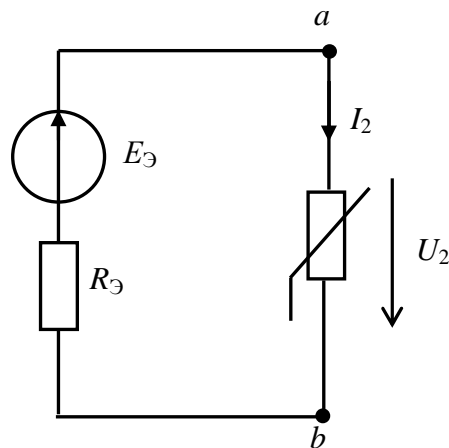


Рис. 7.9. Преобразованная схема

$$E_{\text{Э}} = \frac{EG_1}{G_1 + G_2}, \quad R_{\text{Э}} = \frac{1}{G_1 + G_2}.$$

2. ВАХ НЭ аппроксимируем функцией $I_2 = a_1 U_2 + a_2 U_2^3 + a_3 U_2^5$, где коэффициенты a_1, a_2, a_3 определяются по методу наименьших квадратов.

3. Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$I_2 R_{\Sigma} + U_2 = E_{\Sigma}.$$

После подстановки в него аппроксимирующей функции получим:

$$(a_1 U_2 + a_2 U_2^3 + a_3 U_2^5) R_{\Sigma} + U_2 - E_{\Sigma} = 0.$$

Полученное уравнение – уравнение вида $F(U_2) = 0$, которое решается одним из численных методов, например, методом дихотомии.

Определив напряжение U_2 , находим токи цепи:

$$I_1 = a_1 U_2 + a_2 U_2^3 + a_3 U_2^5; \quad I_2 = \frac{E_{\Sigma} - U_2}{R_1}; \quad I_3 = \frac{U_2}{R_2}.$$

Пример 7.2.

В схеме (рис. 7.10) рассчитать токи при $E_1 = 60$ В, $E_2 = 70$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 15$ Ом. ВАХ НЭ задана в табличной форме.

Зависимость $U_3 = f(I_3)$

| | | | | | |
|-----------------|---|------|------|------|------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $U_3, \text{В}$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
| $I_3, \text{А}$ | 0 | 1,65 | 2,75 | 3,25 | 3,75 |

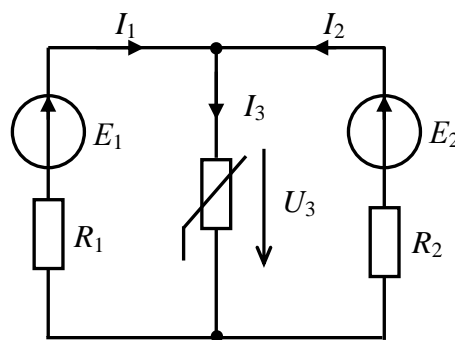


Рис. 7.10. Заданная схема цепи

Решение.

1. Зависимость $U_3 = f(I_3)$, заданную таблицей, аппроксимируем функцией $I_3 = a_1 U_3 + a_2 U_3^3 + a_3 U_3^5$. Коэффициенты a_1, a_2, a_3 определим по методу наименьших квадратов путем решения следующей системы уравнений при подстановке в нее табличных значений напряжения U_3 и тока I_3 :

$$a_1(10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2) + a_2(10^4 + 20^4 + 30^4 + 40^4) + a_3(10^6 + 20^6 + 30^6 + 40^6) = 1,65 \times 10 + 2,75 \times 20 + 3,25 \times 30 + 3,75 \times 40;$$

$$a_1(10^4 + 20^4 + 30^4 + 40^4) + a_2(10^6 + 20^6 + 30^6 + 40^6) + a_3(10^8 + 20^8 + 30^8 + 40^8) = 1,65 \times 10^3 + 2,75 \times 20^3 + 3,25 \times 30^3 + 3,75 \times 40^3;$$

$$a_1(10^6 + 20^6 + 30^6 + 40^6) + a_2(10^8 + 20^8 + 30^8 + 40^8) + a_3(10^{10} + 20^{10} + 30^{10} + 40^{10}) = 1,65 \times 10^5 + 2,75 \times 20^5 + 3,25 \times 30^5 + 3,75 \times 40^5.$$

В результате решения уравнений найдем:

$$a_1 = 0,1738, a_2 = -1,023 \times 10^{-4}, a_3 = 3,269 \times 10^{-8}.$$

2. Составляем уравнения по законам Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0; I_1 R_1 + U_3 = E_1; I_2 R_2 + U_3 = E_2.$$

Из двух последних уравнений определяем токи I_1 и I_2 :

$$I_1 = (E_1 - U_3) / R_1; I_2 = (E_2 - U_3) / R_2.$$

Подставив значения токов I_1 , I_2 и I_3 в первое уравнение, получим:

$$[E_1 R_2 + E_2 R_1 - U_3(R_1 + R_2 + a_1 R_1 R_2)] / R_1 \times R_2 - (a_1 U_3 + a_2 U_3^3 + a_3 U_3^5) = 0.$$

Полученное уравнение вида $F(U_3) = 0$ решаем методом дихотомии, ограничивая зону локализации корня уравнения отрезком $[a, b]$. Очевидно, что корни этого уравнения, т. е. значения напряжения U_3 , не могут быть меньше нуля и больше ЭДС E_2 . Тогда примем, что $a = 0$ и $b = E_2$.

Значения рассчитанных токов цепи и напряжения U_3 :

$$U_3 = 40,902 \text{ В}, I_1 = 1,909 \text{ А}, I_2 = 1,939 \text{ А}, I_3 = 3,849 \text{ А}.$$

7.2.3. Графоаналитический метод

В ряде случаев приемлемая точность расчета нелинейной цепи достигается при представлении ВАХ НЭ отрезками прямых линий (линеаризация ВАХ). В этом случае исходная система нелинейных уравнений сводится к линейным уравнениям, и расчет цепи может быть выполнен как расчет линейной электрической цепи. Поясним этот метод.

При малых отклонениях рабочей точки (P_1 и P_2) от границ рабочего участка НЭ (участки $A-B$ и $C-D$ на ВАХ двух НЭ, рис. 7.11, а) можно рабочий участок ВАХ заменить отрезком прямой, параллельной касательной к ВАХ в этих точках.

Тогда каждой точке участка $A-B$ соответствует уравнение:

$$U = IR_{\text{диф.}} - U_{10} = IR_{\text{диф.}} + E_{\text{Э}}, \text{ или } I = UG_{\text{диф.}} + I_{10} = UG_{\text{диф.}} + J_{\text{Э}},$$

где $R_{\text{диф.}} = du/di$ дифференциальное сопротивление, $G_{\text{диф.}}$ — дифференциальная проводимость.

НЭ₁ в схеме электрической цепи можно изобразить в виде последовательно соединенных источника ЭДС $E_{\text{Э}} = U_{10}$ и линейного сопротивления $R_{\text{диф.}}$, или источником тока $J_{\text{Э}} = I_{10}$ и $R_{\text{диф.}}$ (рис. 7.11, б).

Аналогично для НЭ₂ участку $C-D$ будет соответствовать уравнение $U = IR_{\text{диф.}} + U_{20} = IR_{\text{диф.}} - E_{\text{Э}}$ или $I = UG_{\text{диф.}} - I_{10} = UG_{\text{диф.}} - J_{\text{Э}}$, и его также можно представить соответствующей схемой.

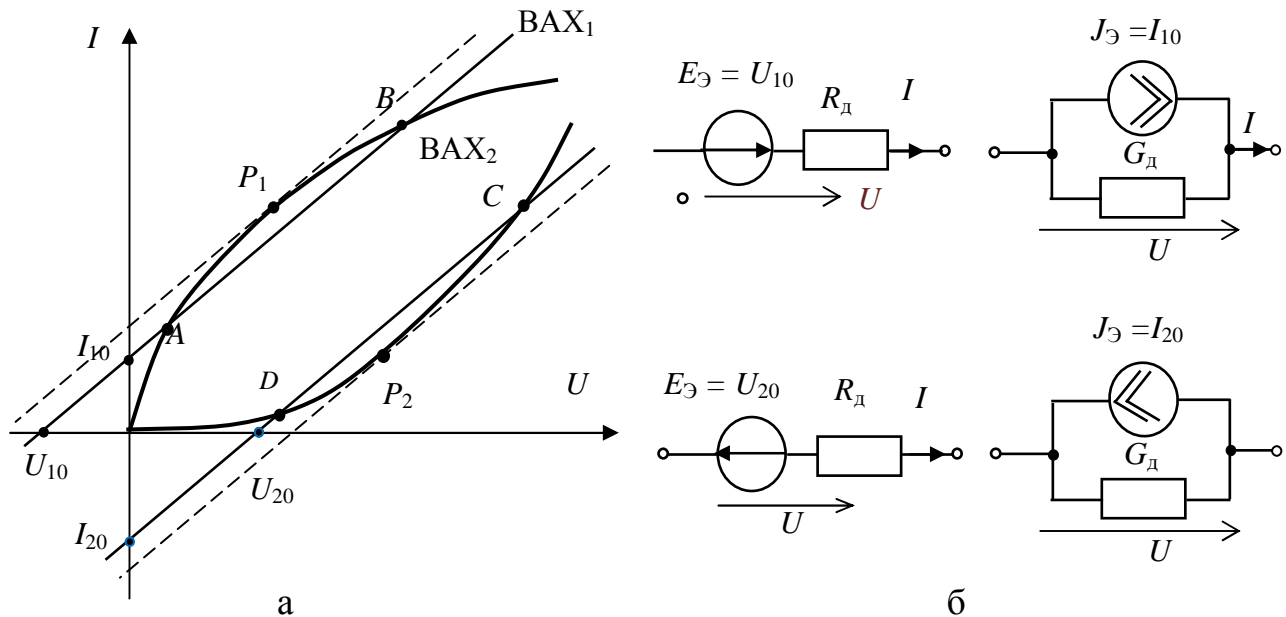


Рис. 7.11. Линеаризация ВАХ

Пример 7.3. Построить эквивалентную схему замещения диода, ВАХ которого дана на рис. 7.12, а, в рабочем диапазоне напряжений ($0,2 \leq u \leq 0,6$) В.

Решение.

Рабочий участок ВАХ представляем отрезком прямой, проходящей через точки $A-B$. Тогда каждой точке ВАХ на этом участке соответствует уравнение $U = IR_{\text{диф.}} + U_0 = IR_{\text{диф.}} - E_{\text{Э}}$ или $I = UG_{\text{диф.}} - I_0 = UG_{\text{диф.}} - J_{\text{Э}}$. Следовательно, в схемах электрических цепей данный диод как НЭ можно изобразить в виде линейных элементов – источника ЭДС $E_{\text{Э}} = U_0 = 0,15$ В и линейного сопротивления $R_{\text{диф.}} = \Delta U / \Delta I = 0,4 / 6,5 \cdot 10^{-3} = 61,5$ Ом (рис. 7.12, б), или источника тока $J_{\text{Э}} = I_0 = 30 \cdot 10^{-6}$ А и проводимости $G_{\text{диф.}} = 1 / R_{\text{диф.}} = 0,163$ См (рис. 7.12, в).

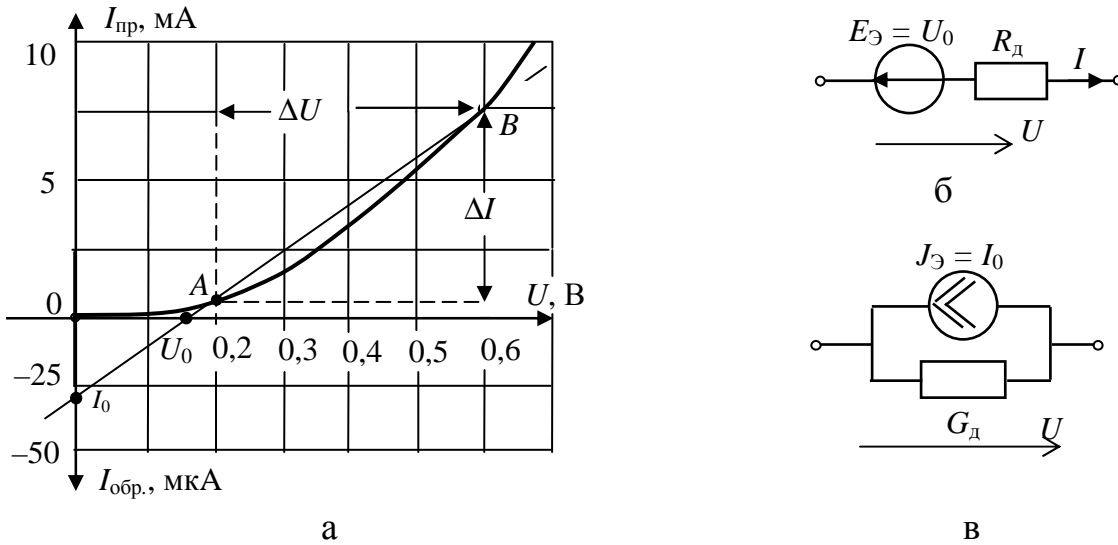


Рис. 7.12. Эквивалентные линейные схемы НЭ

Пример 7.4.

В схеме (рис. 7.10) рассчитать токи при заданных значениях E, R_1, R_2 . ВАХ НЭ $I_2 = f(U_2)$ задана графически (рис. 7.13).

Решение.

1. Кривую $I_2 = f(U_2)$ аппроксимируем двумя отрезками прямых линий, один из которых лежит на оси U_2 , а второй является касательной к кривой и пересекает ось U_2 в точке k . Тогда зависимость $I_2 = f(U_2)$ может быть выражена линейной функцией $U_2 = U_k + I_2 \times \text{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к оси I_2 , $\text{tg}\alpha = U_{mn}/I_n$.

В результате получим:

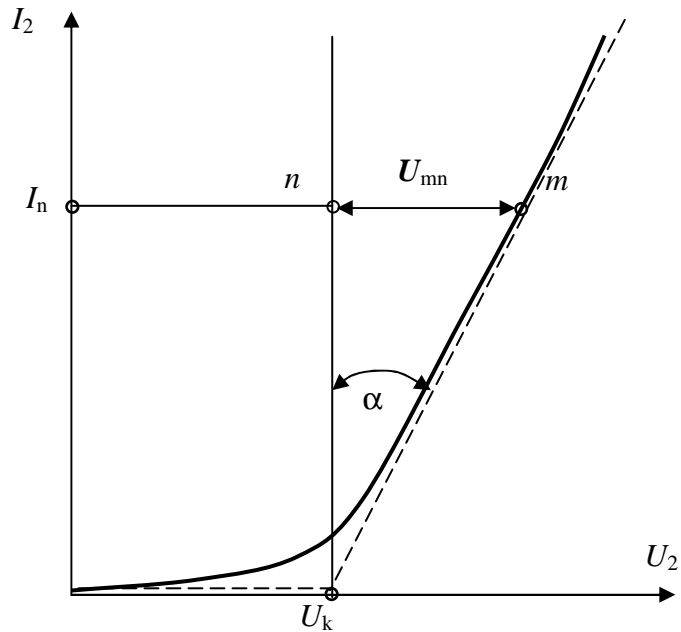


Рис. 7.13. ВАХ НЭ

$$U_2 = U_k + I_2 \times U_{mn}/I_n = U_k + I_2 R_{\text{диф.м}},$$

где $R_{\text{диф.м}}$ – дифференциальное сопротивление в точке m .

2. Составляем уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0, & \text{или} & & I_1 - I_2 - I_3 &= 0, \\ I_1 R_1 + U_2 &= E, & & & I_1 R_1 + (U_k + R_{\text{диф.м}} I_2) &= E, \\ I_3 R_3 - U_2 &= 0, & & & I_3 R_3 - (U_k + R_{\text{диф.м}} I_2) &= 0. \end{aligned}$$

После преобразования получим:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0, \\ I_1 R_1 + R_{\text{диф.м}} I_2 &= E - U_k, \\ I_3 R_3 - R_{\text{диф.м}} I_2 &= U_k. \end{aligned}$$

Заменяв напряжение U_k источником ЭДС $E_k = U_k$, окончательно получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0, \\ I_1 R_1 + R_{\text{диф.м}} I_2 &= E - E_k, \\ I_3 R_3 - R_{\text{диф.м}} I_2 &= E_k. \end{aligned}$$

Полученным уравнениям соответствует следующая эквивалентная схема линейной электрической цепи (рис. 7.14), которая может быть рассчитана любым известным методом (методом контурных токов, узловых потенциалов и др.).

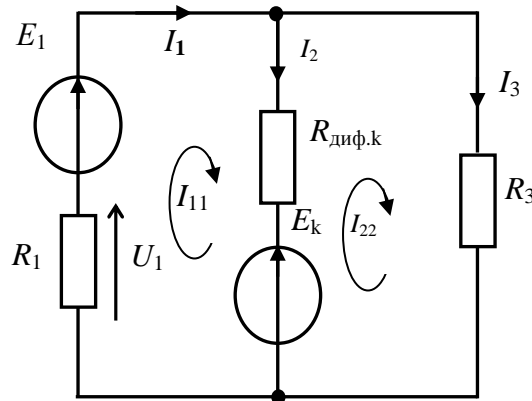


Рис. 7.14. Эквивалентная линейная схема замещения нелинейной цепи

Например, составим уравнения по методу контурных токов:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_{\text{диф.к}}) - I_{22}R_{\text{диф.к}} &= E_1 - E_k; \\ I_{22}(R_2 + R_{\text{диф.к}}) - I_{11}R_{\text{диф.к}} &= E_k. \end{aligned}$$

В результате решения получим:

$$I_1 = I_{11}; \quad I_2 = I_{11} - I_{22}; \quad I_3 = I_{22}.$$

Пример 7.5 (метод эквивалентного генератора).

Если имеется разветвленная цепь с одним НЭ (рис. 7.15, а), ток через который надо определить, целесообразно применить метод эквивалентного генератора (активного двухполюсника). Для этого выделяется в схеме ветвь с НЭ, а оставшаяся часть цепи представляется в виде активного двухполюсника.

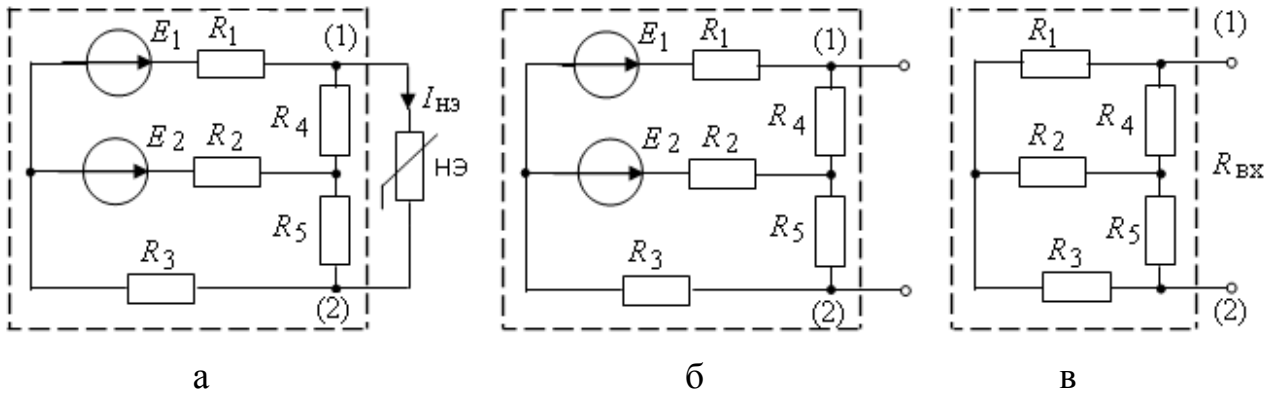


Рис. 7.15. Преобразование схем по методу эквивалентного генератора

Решение.

1. Исключается из цепи ветвь с НЭ, и любым известным методом определяется напряжение на разомкнутых зажимах U_{12} (рис. 7.15, б).

2. Определяется входное сопротивление двухполюсника $R_{ВХ}$ при закороченных источниках ЭДС (рис. 7.15, в).

3. Строится эквивалентная схема цепи (рис. 7.16, а), где $E_{\text{Э}} = U_{12}$, $R_{\text{Э}} = R_{\text{ВХ}}$.

4. Графически определяется ток $I_{\text{НЭ}}$ и $U_{\text{НЭ}}$ как при последовательном соединении элементов (рис. 7.16, б). Для этого в одной системе координат строится внешняя (рабочая) характеристика цепи. Уравнение характеристики:

$$U_{12} = E_{\text{Э}} - IR \quad (\text{при } I = 0 \quad U_{12} = E_{\text{Э}}, \text{ при } U_{12} = 0 \quad I = E_{\text{Э}} / R_{\text{ВХ}}).$$

Точка пересечения характеристик есть решение: $U_{\text{НЭ}}, I_{\text{НЭ}}$.

При найденном значении тока $I_{\text{НЭ}}$ аналитически определяются остальные токи в цепи. При этом ветвь с НЭ целесообразно представить источником тока $J_{\text{НЭ}} = I_{\text{НЭ}}$ (рис. 7.17).

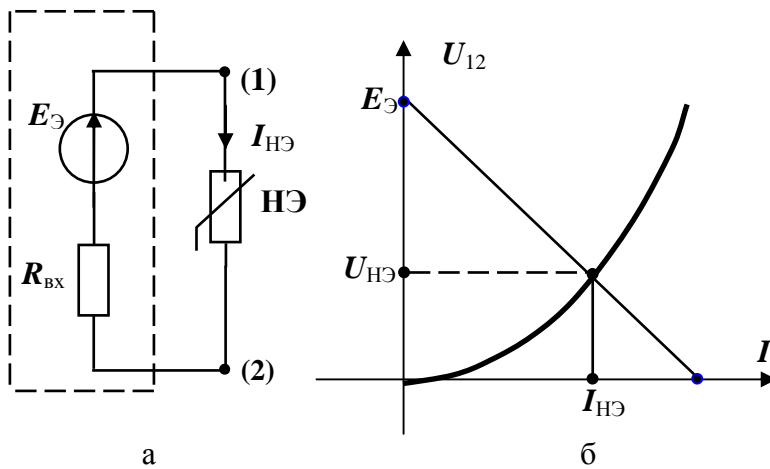


Рис. 7.16. Графическое решение задачи

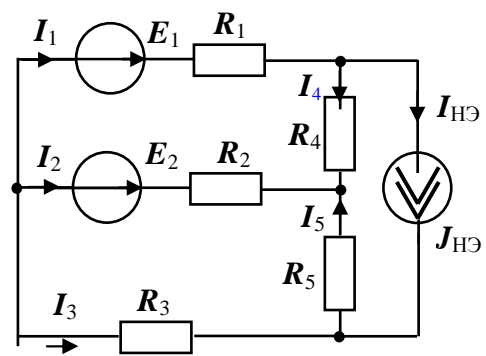


Рис. 7.17. Применение теоремы компенсации

Глава VIII. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

В настоящее время почти вся электрическая энергия вырабатывается, передается и потребляется с помощью трехфазных источников, линий электропередач и потребителей переменного тока. Это объясняется следующими преимуществами трехфазных систем переменного тока:

- возможностью получения вращающегося магнитного поля, получаемого в генераторах и двигателях переменного тока;
- возможностью получения двух рабочих напряжений (линейного и фазного) в одной сети;
- меньшим расходом металла для линий передач.

Несмотря на общность теории переменных токов, расчет и анализ трехфазных цепей имеет свои особенности, так как они содержат несколько ЭДС и токов. Поэтому необходимо учитывать способ соединения источников и приемников энергии.

8.1. Схемы соединений цепи

Трехфазной системой синусоидального тока называется совокупность электрических цепей, в которой действуют три синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые относительно друг друга по фазе и создаваемые общим источником.

Так как три источника вырабатывают ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, то единственным отличием является начальная фаза этих ЭДС. Поэтому составные части трехфазной цепи названы *фазами*. Следовательно, термин *фаза* имеет двойкий смысл. Во-первых, фазой называют аргумент синусоидальных токов, напряжений и ЭДС, во-вторых, в трехфазной цепи фазой называют часть трехфазной системы.

Цепи, образующие трехфазную систему, не соединенные электрически, называют несвязанными.

На практике, как правило, применяют связанные трехфазные цепи. Один из проводов каждой фазы выполняет одну и ту же функцию: соединяет концы фаз источника и нагрузки. Это позволяет объединить три обратных провода в один, что превращает трехфазную цепь в связанную. Связанная трехфазная цепь фактически представляет собой одну разветвленную цепь.

8.2. Трехфазный синхронный генератор

Создателем трехфазной системы является выдающийся русский инженер и ученый М. О. Доливо-Добровольский (1862–1919). В 1891 г. им были разработаны все звенья трехфазной системы: генератор,

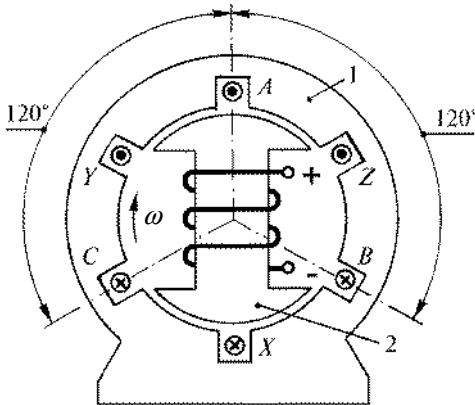


Рис. 8.1. Схема трехфазного генератора

трансформатор и двигатель. Первичным источником электроэнергии в трехфазной цепи является трехфазный синхронный генератор. Он состоит (рис. 8.1) из неподвижного статора 1 и вращающегося ротора 2. Обмотка ротора питается от источника постоянного тока и создает неизменный во времени магнитный поток, замыкающийся через статор. На статоре размещают три обмотки, смещенные относительно друг друга на угол 120° . На рис. 8.1 они показаны в виде двух проводов, залож

женных в диаметрально противоположные пазы. Начала и концы обмоток обозначают соответственно A, B, C и X, Y, Z , а сами обмотки называют фазами.

По закону электромагнитной индукции в этих обмотках (фазах) наводятся ЭДС, сдвинутые во времени на треть периода, т. е. по фазе на угол 120° . Их мгновенные значения

$$e_A = E_m \sin \omega t, \quad e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ). \quad (8.1)$$

Здесь начальной (первой) фазой принята, как обычно, ЭДС фазы A . Эти ЭДС можно представить графически в зависимости от времени (рис. 8.2, а) и на комплексной плоскости (рис. 8.2, б). Тогда

$$\underline{E}_A = E; \quad \underline{E}_B = Ee^{-j120^\circ}; \quad \underline{E}_C = Ee^{-j240^\circ}. \quad (8.2)$$

Система синусоидальных ЭДС одной частоты, равных по амплитуде и сдвинутых относительно друг друга по фазе на угол 120° , называется *симметричной трехфазной системой ЭДС*.

Причинами несимметрии ЭДС могут быть неравенства амплитуд или отличия разности фаз от 120° .

Основным свойством симметричной трехфазной системы ЭДС (8.1) является то, что суммы их мгновенных значений в любой момент времени равны нулю

$$e_A + e_B + e_C = 0. \quad (8.3)$$

В этом можно убедиться по графикам мгновенных значений (рис. 8.2, а) для любого момента времени, а также по равенству

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0. \quad (8.4)$$

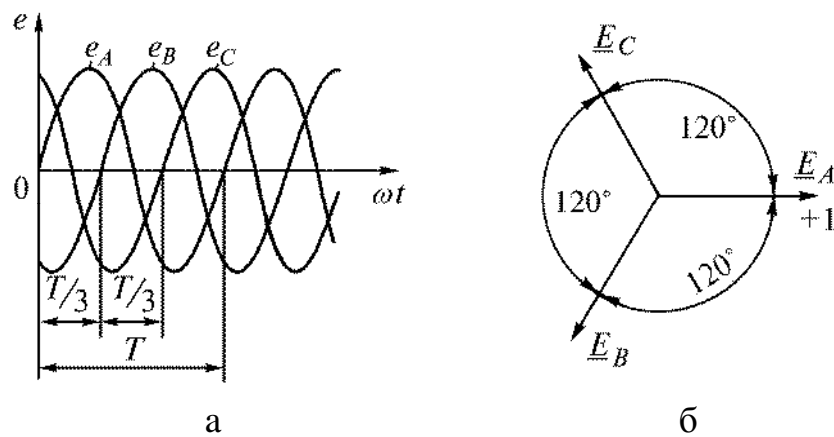


Рис. 8.2. Симметричность трехфазной системы ЭДС

Порядок, в котором наведенные ЭДС в фазах генератора проходят через одинаковые значения, называется последовательностью фаз, или порядком чередования фаз. При указанном на рис. 8.1 направлении вращения ротора получаем последовательность фаз *ABC*.

При изменении направления вращения ротора на противоположное последовательность фаз получается обратной *ACB*. У генераторов роторы вращаются всегда в одном направлении, поэтому последовательность фаз остается неизменной.

Частота ЭДС зависит от числа пар полюсов генератора и частоты вращения ротора $f = \frac{pn}{60}$, где p – число пар полюсов; n – частота вращения.

8.3. Схемы соединения трехфазных цепей

Существуют две схемы соединения обмоток генераторов, двигателей, трансформаторов и приемников в трехфазных цепях: *звездой* и *треугольником*.

Если соединить вместе концы обмоток генератора, то получается соединение звездой (рис. 8.3, а). На щитках электрических машин достаточно переключкой соединить между собой выводы концов обмоток (рис. 8.3, б). Общая точка фазных обмоток называется *нейтральной точкой* генератора и обозначается буквой *N*. В дальнейшем фазы генератора для простоты на схемах будем изображать не под углом 120° , а параллельно (рис. 8.3, в).

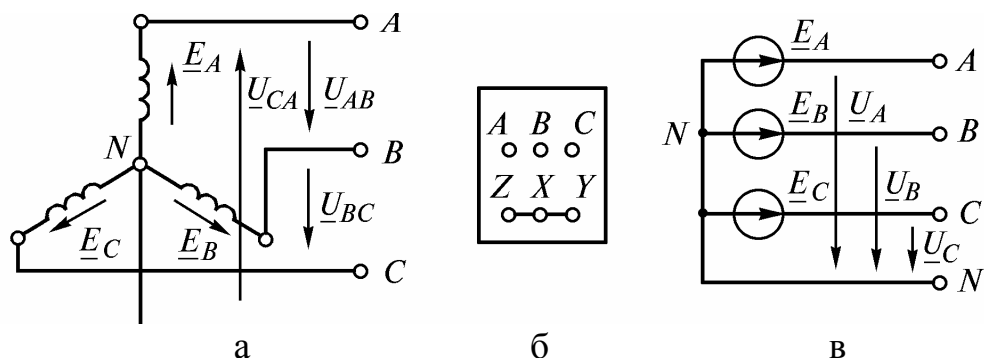


Рис. 8.3. Схема соединения трехфазного источника звездой

Фазы потребителя в трехфазной цепи также могут быть соединены звездой (рис. 8.4). Общая точка соединения фаз приемника называется *нейтральной точкой* приемника n . Провод Nn , соединяющий нейтральные точки генератора и приемника, называется *нейтральным проводом*. Провода AA' , BB' , CC' , соединяющие начала фаз генератора и приемника, называются *линейными*, а токи в них I_A , I_B , I_C – *линейными токами*. Напряжения между *линейными* проводами U_{AB} , U_{BC} , U_{CA} называют *линейными* (рис. 8.4). За положительное направление токов в линейных проводах принимается направление от источника к нагрузке, а в нейтральном проводе – от нагрузки к источнику (рис. 8.4). Электрический ток, направленный от начала к концу фазы приемника (или от конца к началу фазы генератора), называется *фазным*. Очевидно, что для соединений звезда-звезда линейные и фазные токи одинаковы.

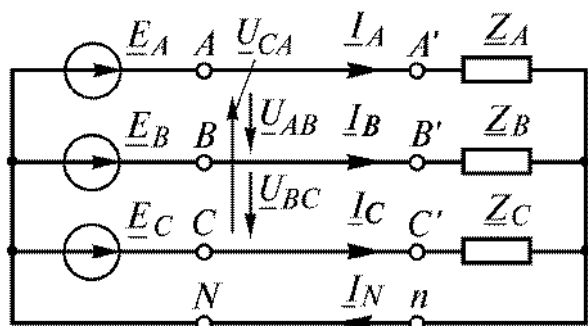


Рис. 8.4. Схема соединения трехфазной цепи звездой

Соединение треугольником получают путем последовательного соединения фазных обмоток источника, как показано на рис. 8.5. Несмотря на то, что обмотки образуют замкнутую цепь, в контуре ток отсутствует, так как геометрическая сумма трех ЭДС равна нулю (8.4). Если ошибочно одну из фаз включить наоборот, то в замкнутом треугольнике потечет недопустимо большой ток. Соединение фаз нагрузки в треугольник выполняют аналогично. При соединении фаз треугольником фазное напряжение равно соответствующему линейному напряжению $U_{\phi} = U_{\text{л}}$.

Соединение треугольником получают путем последовательного соединения фазных обмоток источника, как показано на рис. 8.5. Несмотря на то, что обмотки образуют замкнутую цепь, в контуре ток отсутствует, так как геометрическая сумма трех ЭДС равна нулю (8.4). Если ошибочно одну из фаз включить наоборот, то в замкнутом треугольнике потечет недопустимо большой ток. Соединение фаз нагрузки в треугольник выполняют аналогично. При соединении фаз треугольником фазное напряжение равно соответствующему линейному напряжению $U_{\phi} = U_{\text{л}}$.

Токи в фазах нагрузки \underline{I}_{AB} , \underline{I}_{BC} , \underline{I}_{CA} называются *фазными* (рис. 8.5).

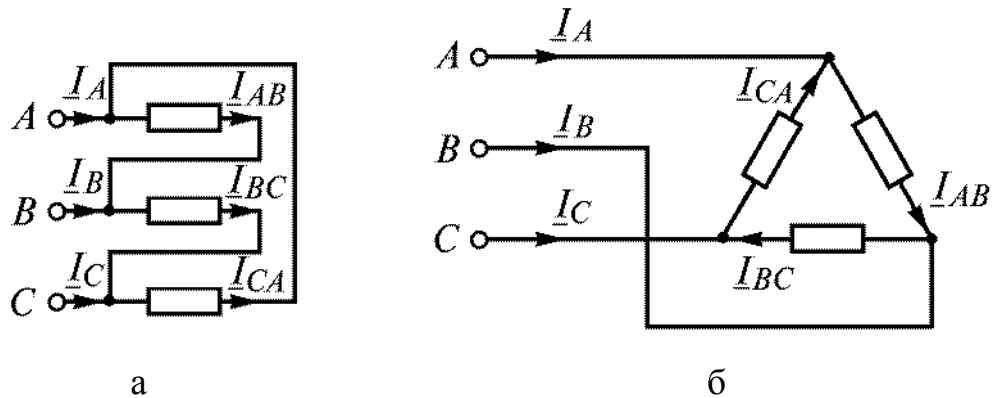


Рис. 8.5. Схема соединения фаз приемника энергии трехфазной цепи треугольником

Положительное направление фазных и линейных токов принимают в соответствии с рис. 8.6.

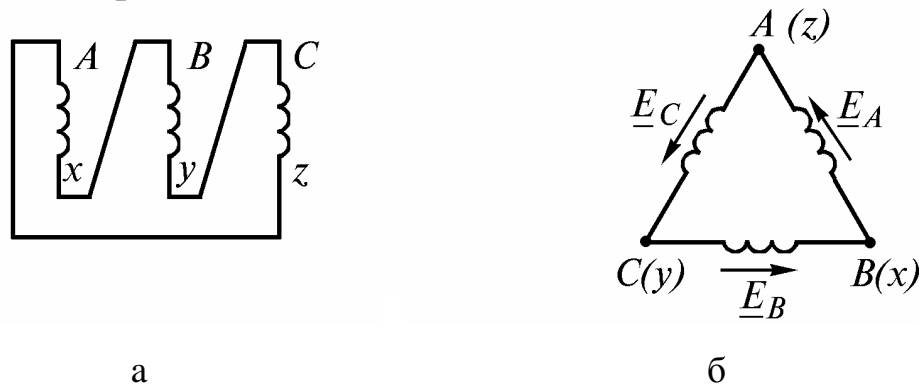


Рис. 8.6. Схема соединения приемника энергии трехфазной цепи треугольником

В электроэнергетике применяют различные комбинации соединения обмоток генератора и нагрузки: звезда–треугольник, треугольник–звезда, звезда–звезда, треугольник–треугольник.

Соотношения между линейными и фазными напряжениями и токами при соединении звездой и треугольником можно установить, рассматривая конкретные режимы работы трехфазной цепи. Различают симметричный и несимметричный режимы работы трехфазных цепей.

8.4. Векторные диаграммы трехфазной цепи

Трехфазная цепь называется симметричной, если сопротивления каждой фазы одинаковы. *Симметричным* режимом трехфазной цепи называется режим, когда к симметричной цепи приложена симметричная система напряжений. В такой цепи протекает симметричная система токов.

Соединение нагрузки звездой

При симметричной нагрузке, соединенной звездой (рис. 8.8),

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Ze^{j\varphi}.$$

Пусть сопротивление нагрузки имеет индуктивный характер: $\varphi > 0$. Построим векторную диаграмму напряжений и токов.

Фазные напряжения $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ образуют симметричную систему векторов: $\underline{U}_A = \underline{U}'_A = \underline{U}_\varphi$; $\underline{U}_B = \underline{U}'_B = \underline{U}_\varphi e^{-j120^\circ}$; $\underline{U}_C = \underline{U}'_C = \underline{U}_\varphi e^{-j240^\circ}$.

Фазные токи отстают от фазных напряжений на угол φ и образуют симметричную систему токов. По первому закону Кирхгофа (рис. 8.7) их сумма равна току в нейтральном проводе $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$.

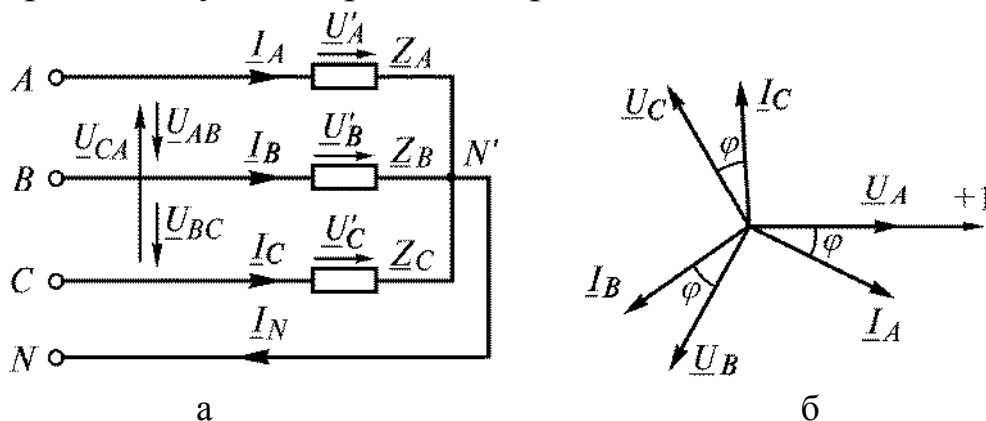


Рис. 8.7. Соединение нагрузки звездой: а – схема; б – векторная диаграмма

Так как сумма трех равных по модулю векторов, сдвинутых относительно друг друга на 120° , равна нулю, то $\underline{I}_N = 0$, т. е. нейтральный провод в трехфазной симметричной

системе не нужен.

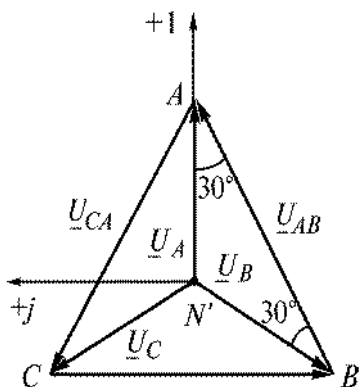


Рис. 8.8. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 8.7

Построим топографическую диаграмму напряжений. За точку нулевого потенциала принимаем точку N' . Векторы $N'A, N'B, N'C$ (рис. 8.8) соответствуют фазным напряжениям $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$. Соединив между собой точки A, B, C , получим соответственно векторы линейных напряжений $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$.

Из диаграммы на рис. 8.8 следует, что линейные векторы напряжений равны между собой и сдвинуты относительно друг друга на 120° . Напомним, что \underline{U}_{AB} – это вектор, начинающийся в точке B и кончающийся в точке A , т. е. первая буква индекса обозначает точку конца вектора, вторая – начало. Установим

соотношение между линейными и фазными напряжениями. Из диаграммы (рис. 8.9) имеем

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A, \quad (8.5)$$

т. е. векторы линейных напряжений равны разности векторов соответствующих фазных напряжений

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_A - \underline{U}_B = U_\phi - U_\phi e^{-j120^\circ} = U_\phi \left(1 - e^{-j120^\circ}\right) = \\ &= U_\phi \left(1 + 0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = U_\phi \left(1,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} U_\phi e^{j30^\circ}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Аналогично

$$\underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \underline{U}_B e^{j30^\circ} = \sqrt{3} U_\phi e^{-j90^\circ}; \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \underline{U}_C e^{j30^\circ} = \sqrt{3} U_\phi e^{-j210^\circ}.$$

Таким образом, линейные напряжения при симметричном режиме в $\sqrt{3}$ раз *больше* фазных напряжений. Кроме того, из уравнения (8.6) следует, что напряжение \underline{U}_{AB} опережает напряжение \underline{U}_A на угол 30° .

Сумма линейных напряжений всегда равна нулю

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0, \quad (8.7)$$

так как всегда образует замкнутый треугольник (рис. 8.8).

Следовательно, при соединении звездой

$$I_\phi = I_l; U_l = \sqrt{3} U_\phi$$

В цепях напряжением до 1000 В Госстандартом предусмотрены следующие номинальные напряжения:

$$U = 660 \text{ В}; U_{\text{ТМ}} = 380 \text{ В};$$

$$U = 380 \text{ В}; U_{\text{ТМ}} = 220 \text{ В};$$

$$U = 220 \text{ В}; U_{\text{ТМ}} = 127 \text{ В}.$$

Соединение нагрузки треугольником

При соединении нагрузки треугольником (рис. 8.9, а) симметричный режим имеет место при условии $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}e^{j\varphi}$.

Линейные (они же фазные) напряжения \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{BC} , \underline{U}_{CA} симметричные и образуют симметричную звезду. Векторная диаграмма этих напряжений приведена на рис. 8.9, б.

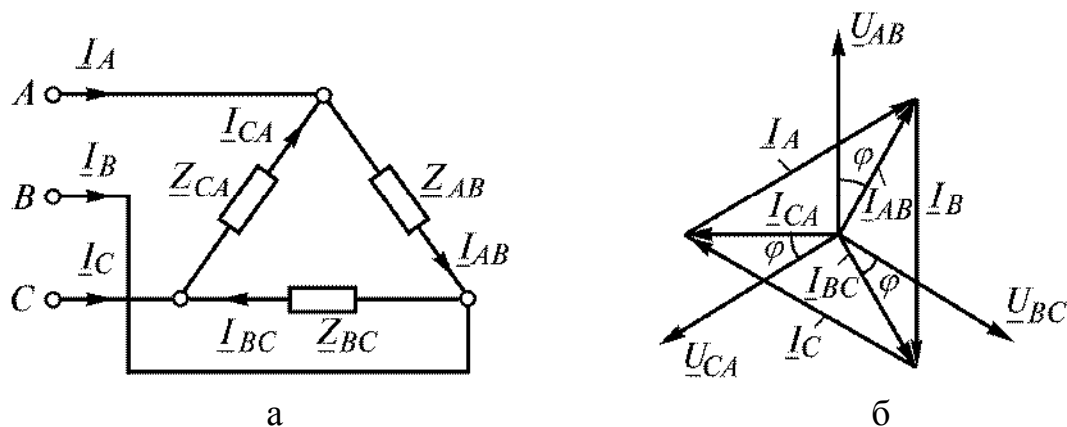


Рис. 8.9. Симметричная трехфазная цепь, соединенной треугольником:
а – схема; б – векторная диаграмма

$I_\phi = I_l$; $U_l = \sqrt{3} U_\phi$ Система фазных токов будет также симметричная $\underline{I}_{AB} + \underline{I}_{BC} + \underline{I}_{CA} = 0$.

Выразим линейные токи по первому закону Кирхгофа для узлов треугольника

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} \\ + \underline{I}_B &= \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} \cdot \\ \hline \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, линейные токи образуют симметричную систему векторов.

На векторной диаграмме (рис. 8.9) фазные токи отстают от фазных напряжений на угол φ (полагаем, что нагрузка носит индуктивный характер $\varphi > 0$). Тогда система трех замыкающих векторов даст линейные токи: вектор линейного тока \underline{I}_A начинается в конце вектора \underline{I}_{CA} и кончается в конце вектора \underline{I}_{AB} и т. д. Выразим линейный ток \underline{I}_A через фазные токи

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{AB} e^{-j240^\circ} = \underline{I}_{AB} (1 - e^{-j240^\circ}) = \sqrt{3} \underline{I}_{AB} e^{-j30^\circ}.$$

Таким образом, линейный ток для симметричной нагрузки в $\sqrt{3}$ раз больше фазного.

Следовательно, при соединении треугольником

$$U_l = U_\phi; I_l = \sqrt{3} I_\phi$$

Несимметрия в трехфазной цепи может быть вызвана различными причинами: неодинаковыми сопротивлениями фаз (несимметричная нагрузка); неравенством ЭДС; несимметричным коротким замыкани-

ем (например, между двумя фазами или между фазой и нейтралью); размыканием фазы и т. п. Расчет токов и напряжений в трехфазной цепи при несимметричном режиме может производиться теми же методами, что и расчет однофазных цепей.

8.5. Мощности трехфазной системы

Активная мощность, как и во всякой сложной цепи, равна сумме активных мощностей отдельных приемников, т. е. сумме активных мощностей фаз:

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi. \quad (8.8)$$

При расчетах трехфазных цепей удобно пользоваться линейными значениями напряжений и токов. Так как при соединении звездой

$$U_{\phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}; \quad I_{\phi} = I_{\text{л}}, \quad \text{а при соединении треугольником } U_{\phi} = U_{\text{л}}; \quad I_{\phi} = \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}},$$

то независимо от схемы соединения активная мощность симметричного трехфазного приемника равна

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi. \quad (8.9)$$

Аналогично определяют реактивную и полную мощности симметричной трехфазной цепи

$$Q = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi; \quad S = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}. \quad (8.10)$$

При этом следует иметь в виду, что здесь φ – угол сдвига фаз между фазным напряжением и фазным током.

Г л а в а IX. ТРАНСФОРМАТОРЫ

Трансформатор – это статический электромагнитный аппарат, предназначенный для преобразования напряжения и тока по уровню (без изменения частоты). Трансформаторы применяются для передачи и распределения электрической энергии, обеспечения нужной схемы включения приборов в различных устройствах и согласования напряжений на входе и выходе электрооборудования, для различных технологических целей: сварки, питания электротермических установок и др. и в источниках питания различных цепей радиоаппаратуры, электронно-вычислительной и телевизионной аппаратуры, устройств связи, автоматики и телемеханики, электробытовых приборов, для разделения электрических цепей различных элементов этих устройств и т. д.

9.1. Магнитные материалы и магнитные цепи

По магнитным свойствам все материалы разделяют на две группы: ферромагнитные (железо, кобальт, никель и их сплавы и др.) и неферромагнитные материалы (все материалы, за исключением ферромагнитных).

Особенностью неферромагнитных материалов является то, что зависимость между магнитной индукцией B и напряженностью магнитного поля H в них является линейной. Их абсолютная магнитная проницаемость есть величина постоянная и практически равна магнитной постоянной

$$\mu_a = \frac{B}{H} = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma H}{м}. \quad (9.1)$$

Материалы, магнитная проницаемость которых достигает больших значений и зависит от внешнего магнитного поля и предшествующего состояния, называют *ферромагнитными*. Свойства ферромагнитных материалов принято характеризовать зависимостью магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H . Если перемагничивать образец в периодическом магнитном поле, то кривая $B(H)$ имеет вид петли, называемой *петлей гистерезиса* (рис. 9.1). Участок Oa является кривой намагничивания, поскольку поле возникает при нулевом значении индукции. Точки b и d соответствуют остаточной индукции B_r , а напряженность в точках e и e называют задерживающей, или *коэрцитивной*, силой H_c .

В зависимости от магнитной проницаемости ферромагнитные материалы разделяют на две группы:

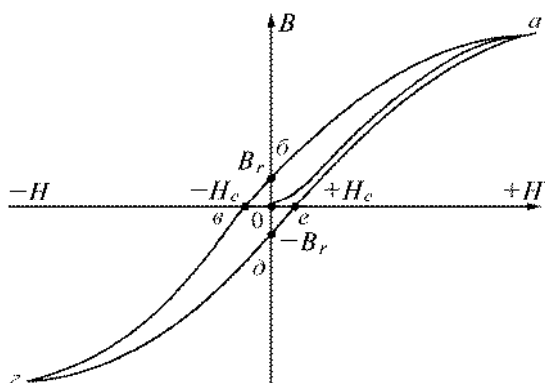


Рис. 9.1. Кривая перемагничивания (гистерезиса) ферромагнитного материала

1) магнитомягкие с большой магнитной проницаемостью и с малой коэрцитивной силой $H_c < 400$ А/м. К ним относят электротехнические стали, пермаллой и ферриты;

2) магнитотвердые с малой магнитной проницаемостью, большой коэрцитивной силой $H_c = 5000 \dots 8000$ А/м и большой остаточной индукцией $B_r = 0,8 \dots 1$ Тл.

Магнитотвердые материалы применяют для изготовления постоянных

магнитов. К ним относятся углеродистые, вольфрамовые, хромистые и кобальтовые сплавы.

Ферромагнитные материалы играют важную роль в электротехнике, так как дают возможность при относительно небольших напряжениях получать сильные магнитные поля и конструировать электромагнитные устройства, обладающие заданными характеристиками.

Ферромагнитные магнитопроводы используют во всех электрических машинах, трансформаторах, электромагнитах, реле и др.

Магнитной цепью называется совокупность магнитодвижущих сил (МДС), ферромагнитных тел или каких-либо иных сред, по которым замыкается магнитный поток.

Произведение числа витков катушки на протекающий в ней ток называют *магнитодвижущей силой* (МДС)

$$F = Iw, A. \quad (9.2)$$

МДС вызывает в магнитной цепи магнитный поток подобно тому, как ЭДС вызывает ток в электрической цепи. На схемах МДС указывают стрелкой, положительное направление которой совпадает с направлением движения правоходного винта, если его вращать по направлению тока в обмотке (рис. 9.2, а). Магнитная цепь, во всех сечениях которой магнитный поток одинаков, называется неразветвленной (рис. 9.2, б). В разветвленной магнитной цепи потоки на различных участках неодинаковы (рис. 9.2, в).

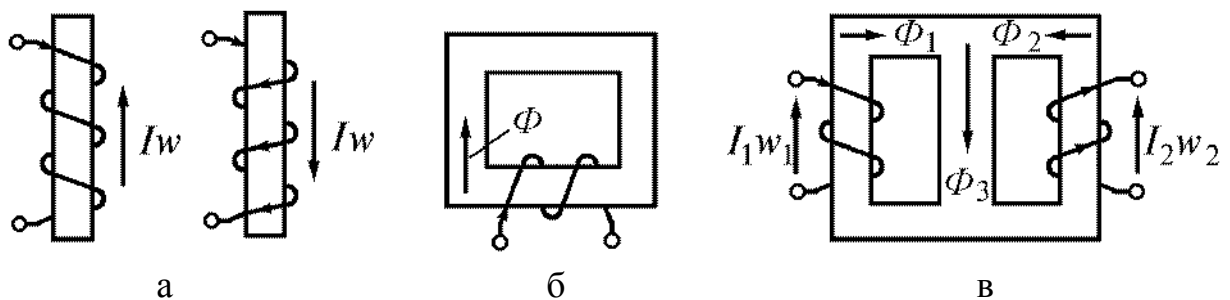


Рис. 9.2. Виды магнитных цепей

Одним из основных законов, используемых при расчете магнитной цепи, является закон полного тока: *циркуляция вектора напряженности магнитного поля H по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, которые охвачены этим контуром*

$$\oint \underline{H} \, dl = \sum I. \quad (9.3)$$

Если контур интегрирования охватывает l витков катушки, по которым протекает ток I , то закон полного тока принимает вид

$$\oint \underline{H} \, d\underline{l} = Iw. \quad (9.4)$$

Между величинами, характеризующими магнитные и электрические цепи, существует формальная аналогия. Эта аналогия распространяется и на методы расчета магнитных цепей. В электрических цепях постоянные токи возникают под действием ЭДС. В магнитных цепях магнитные потоки создаются МДС обмоток. По аналогии с сопротивлением электрическому току часто используют сопротивление магнитному потоку, называемое *магнитным сопротивлением*.

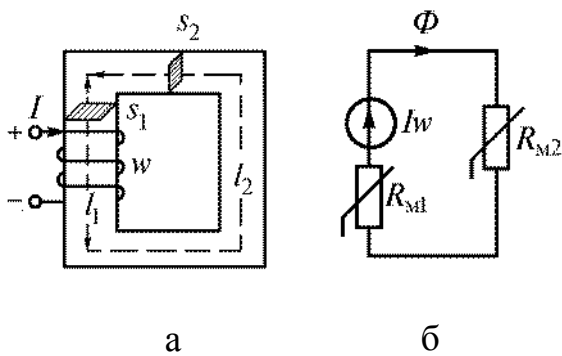


Рис. 9.3. Неразветвленная магнитная цепь

Рассмотрим неразветвленную магнитную цепь (рис. 9.3, а).

По закону полного тока имеем

$$Iw = H_1 l_1 + H_2 l_2, \quad (9.5)$$

где H_1 , H_2 , l_1 , l_2 – напряженности магнитного поля и длины однородных (постоянного сечения) участков.

Учитывая, что $H_1 = \frac{B_1}{\mu_{a1}}$; $H_2 = \frac{B_2}{\mu_{a2}}$,

$$а \quad B_1 = \frac{\Phi}{s_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{s_2}, \quad \text{уравнение (9.3)}$$

запишем в виде

$$Iw = \frac{\Phi}{\mu_{a1} s_1} l_1 + \frac{\Phi}{\mu_{a2} s_2} l_2 = \Phi R_{m1} + \Phi R_{m2}, \quad (9.6)$$

где $R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_{a1} s_1}$; $R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_{a2} s_2}$, Γ_H^{-1} – магнитные сопротивления участков.

Уравнению (9.6) соответствует эквивалентная схема замещения магнитной цепи (рис. 9.3, б).

Произведение магнитного потока на магнитное сопротивление называют по аналогии с электрической цепью *магнитным напряжением*

$$U_{m2} = \Phi R_{m2} = H_2 l_2.$$

Из уравнения (9.4) определим магнитный поток и получим формулу, которая представляет собой закон Ома для магнитной цепи

$$\Phi = \frac{Iw}{R_{m1} + R_{m2}} = \frac{Iw}{\sum R_m}. \quad (9.7)$$

Тогда для участка магнитной цепи без МДС

$$U_M = \Phi R_M = Hl. \quad (9.8)$$

Ввиду нелинейности магнитного сопротивления применять закон Ома для ферромагнитных участков нельзя. Его можно применять только для участков с воздушными зазорами.

Для разветвленных магнитных цепей справедливы законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа – алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю.

$$\sum \Phi_k = 0$$

Второй закон Кирхгофа – алгебраическая сумма МДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме падений магнитных напряжений на участках этого контура

$$\sum Iw = \sum U_M = \sum Hl$$

Рассмотрим разветвленную несимметричную магнитную цепь (рис. 9.4, а) и ее схему замещения (рис. 9.4, б).

Произвольно выбрав направление магнитных потоков в ветвях, запишем *первый закон Кирхгофа* $\sum \Phi = 0$ или $\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$.

Произвольно выбрав направление обхода контура (по часовой стрелке), запишем уравнения по второму закону Кирхгофа:

для первого контура $F_1 = \sum U_M = U_{M1} + U_{M3}$ или $I_1 w_1 = H_1 l_1 + H_3 l_3$;

для второго контура $F_2 = \sum U_M = -U_{M2} - U_{M3}$ или $I_2 w_2 = -H_2 l_2 - H_3 l_3$.

9.2. Устройство и принцип действия трансформатора

Трансформатор представляет собой статический электромагнитный аппарат, предназначенный для преобразования переменного тока одного напряжения в переменный ток другого напряжения той же частоты. Трансформатор имеет не менее двух обмоток, у которых есть общий магнитопровод и которые электрически изолированы друг от друга.

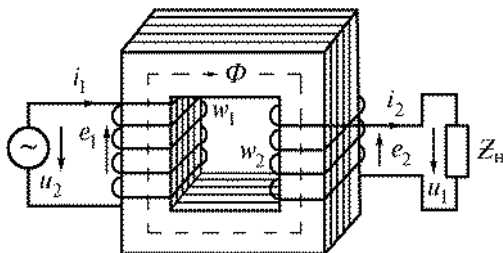


Рис. 9.5. Устройство однофазного трансформатора

Обмотки размещаются на магнитопроводе, собранном из листов электротехнической стали (рис. 9.5). Магнитопровод отсутствует лишь в воздушных трансформаторах, которые применяются при частотах около 20 кГц

и выше, когда магнитопровод почти не намагничивается из-за увеличения вихревых токов.

Обмотка трансформатора, соединенная с источником питания, называется *первичной*, а обмотка, к которой подключается потребитель электроэнергии, называется *вторичной*. Параметры, относящиеся к первичной обмотке, обозначаются индексом 1, например, w_1 , u_1 , i_1 параметры, относящиеся к вторичной обмотке, обозначаются индексом 2.

Различают однофазные (рис. 9.5) и трехфазные трансформаторы.

В паспорте трансформатора указывают его номинальное напряжение, полную мощность, токи, напряжение короткого замыкания, число фаз, частоту, схему соединения, режим работы и способ охлаждения.

В зависимости от напряжения различают обмотку высшего напряжения (ВН) и обмотку низшего напряжения (НН).

Если первичное напряжение U_1 больше вторичного U_2 , трансформатор называют *понижающим*, если $U_1 < U_2$ – *повышающим*.

Принцип действия трансформатора основан на явлении электромагнитной индукции. Под воздействием переменного тока первичная обмотка создает в магнитопроводе переменный магнитный поток

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t, \quad (9.9)$$

который пронизывает обмотки и индуцирует в них ЭДС

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{d\Psi_1}{dt} = -w_1 \frac{d}{dt} (\Phi_m \sin \omega t) = -\omega w_1 \Phi_m \cos \omega t = \\ &= \omega w_1 \Phi_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right); \\ e_2 &= -\frac{d\Psi_2}{dt} = -w_2 \frac{d}{dt} (\Phi_m \sin \omega t) = -\omega w_2 \Phi_m \cos \omega t \\ &= \omega w_2 \Phi_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_{2m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (9.10)$$

где $E_{1m} = \omega w_1 \Phi_m$; $E_{2m} = \omega w_2 \Phi_m$ – амплитудные значения ЭДС.

Разделив максимальные значения ЭДС на $\sqrt{2}$, получим действующее значение ЭДС в обмотках

$$E_1 = \frac{\omega w_1 \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44 f w_1 \Phi_m; \quad E_2 = \frac{\omega w_2 \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44 f w_2 \Phi_m. \quad (9.11)$$

Из (9.10) и (9.11) следует, что ЭДС обмоток отстают по фазе от магнитного потока на 90° и пропорциональны числу витков.

Соотношение ЭДС обмоток называется коэффициентом трансформации

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2} = n. \quad (9.12)$$

Если $n > 1$, то вторичная ЭДС меньше первичной, и трансформатор называется понижающим, при $n < 1$ трансформатор называется повышающим.

Применяют и другое определение для коэффициента трансформации: *отношение номинального высшего напряжения трансформатора к номинальному низшему напряжению*. В этом случае коэффициент трансформации всегда больше единицы $n > 1$.

Так как во вторичной обмотке индуцируется ЭДС, то при подключении нагрузки к ее выводам в контуре обмотка-нагрузка протекает ток и выделяется электрическая энергия. Таким образом, с помощью магнитной связи поток электрической энергии передается из первичной цепи во вторичную. В этом и состоит принцип работы трансформаторов.

Идеальным трансформатором называют трансформатор, у которого активное сопротивление обмоток равно нулю, отсутствуют магнитные потоки рассеяния, потери мощности в магнитопроводе равны нулю. При таких допущениях схема трансформатора и векторная диаграмма показаны на рис. 9.6. В режиме холостого хода ток вторичной обмотки равен нулю: $I_2 = 0$, а ток и МДС первичной обмотки равны I_0 и $I_0 w_1$.

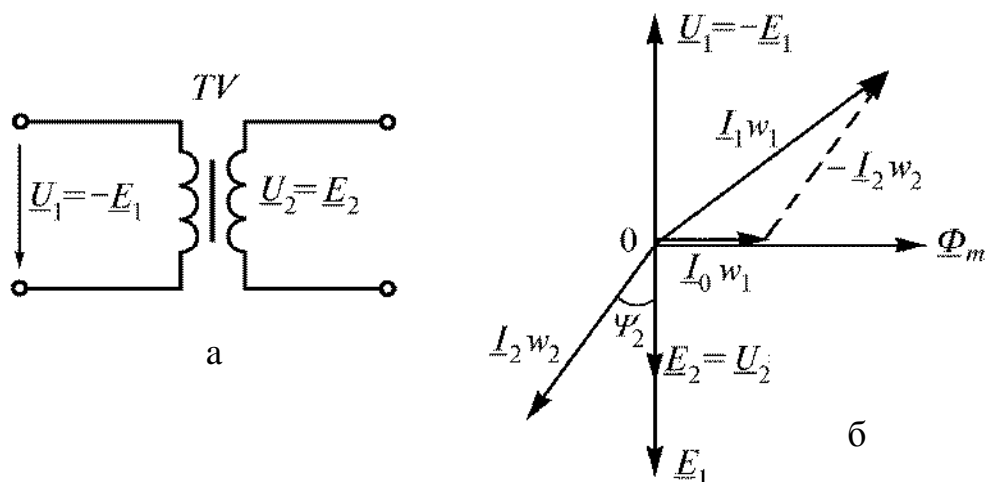


Рис. 9.6. Схема (а) и векторная диаграмма (б) трансформатора

Уравнение электрического равновесия выражается равенствами
 $u_1 = -e_1; u_2 = e_2$ или $U_1 = -E_1; U_2 = E_2$ (9.13)

В рабочем режиме ток вторичной обмотки оказывает размагничивающее действие, геометрическая сумма МДС обмоток равна результирующей МДС (рис. 9.6, б)

$$i_0 w_1 = i_1 w_1 - i_2 w_2 \quad \text{или} \quad \underline{I}_0 w_1 = \underline{I}_1 w_1 - \underline{I}_2 w_2 \quad (9.14)$$

Соотношение (9.13) $\underline{U}_1 = -\underline{E}_1$ справедливо как для холостого тока, так и при нагрузке. Следовательно, при $U_1 = const$ магнитный поток $\Phi_m = const$ и результирующая МДС также постоянна ($\underline{I}_0 w_1 = const$) независимо от нагрузки. Так как $\underline{I}_0 w_1 = const$, то возрастающий ток нагрузки I_2 автоматически приводит к увеличению тока в первичной цепи трансформатора за счет ЭДС самоиндукции первичной обмотки.

Так как ток холостого хода мал и не превышает 5 % от номинального, то $\underline{I}_1 w_1 + \underline{I}_2 w_2 \approx 0$. Отсюда:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{U_1}{U_2} = n.$$

Следовательно, в трансформаторе отношение токов обмоток обратно пропорционально их напряжениям. Это соотношение справедливо при нагрузках, близких к номинальным и неприменимо в режиме, близком к холостому ходу.

9.3. Режимы трансформатора

Параметры трансформатора можно определить по опытам холостого хода и короткого замыкания.

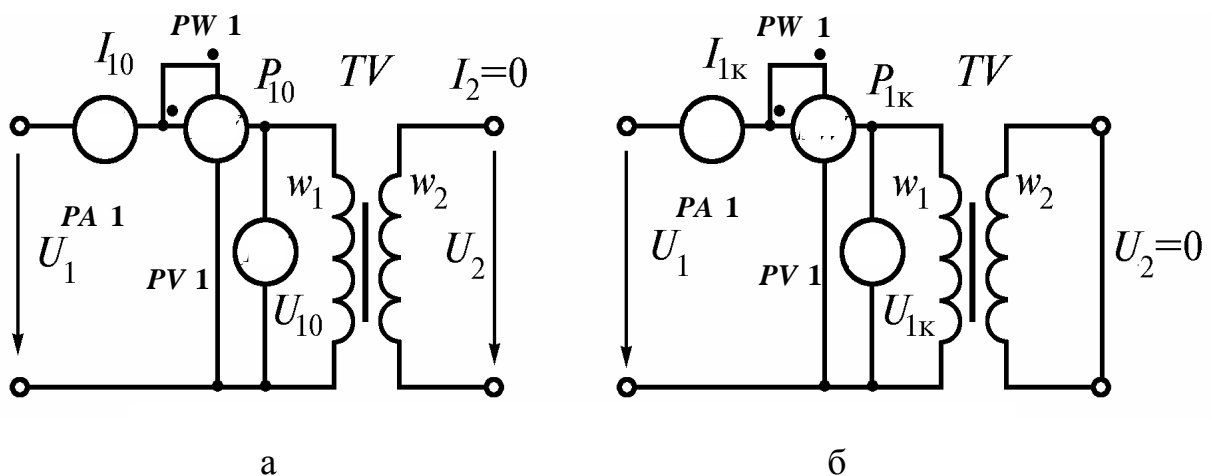


Рис. 9.7. Режимы трансформатора

При опыте холостого хода (рис. 9.7, а) вторичная обмотка разомкнута, а к первичной обмотке подводится номинальное напряжение. В первичной цепи измеряют напряжение U_{10} , ток I_{10} , мощность P_{10} . Так как ток холостого хода мал, то потерями мощности в обмотках можно пренебречь и считать показание ваттметра равным потерям в магнитной цепи.

По данным опыта определяют полное, активное и индуктивное сопротивление холостого хода

$$z_{10} = |z_1 + z_0| = \frac{U_{10}}{I_{10}}; \quad R_{10} = R_1 + R_0 = \frac{P_{10}}{I_{10}^2}; \quad X_{10} = \sqrt{z_{10}^2 - R_{10}^2}.$$

При этом сопротивления холостого хода примерно равны сопротивлениям намагничивающей ветви

$$z_{10} \approx z_0; \quad R_{10} \approx R_0; \quad X_{10} \approx X_0.$$

При опыте короткого замыкания (рис. 9.7, б) вторичная обмотка замкнута накоротко через амперметр, к первичной обмотке подводится такое напряжение, чтобы во вторичной обмотке протекал номинальный ток. В первичной цепи измеряются напряжение $U_{1к}$, ток $I_{1к}$, мощность $P_{1к}$. Подводимое напряжение мало, поэтому мал и магнитный поток. Значит, магнитными потерями можно пренебречь и считать показание ваттметра равным электрическим потерям в обмотках.

По результатам опыта короткого замыкания определяют параметры

$$z_k = \frac{U_{1к}}{I_{1к}}; \quad P_k = \frac{P_{1к}}{I_{1к}^2}; \quad X_k = \sqrt{z_k^2 - R_k^2}.$$

$$\text{Считают, что } R_1 \approx R'_2 = \frac{R_k}{2}; \quad X_1 \approx X'_2 = \frac{X_k}{2}.$$

Опыт короткого замыкания позволяет определить важный параметр трансформатора – напряжение короткого замыкания. Это выраженное в процентах напряжение на первичной обмотке, при котором в накоротко замкнутой вторичной обмотке протекает номинальный ток

$$U_k \% = \frac{U_{1к}}{U_{1н}} \cdot 100. \quad (9.15)$$

Для силовых трансформаторов напряжение $U_k = 5 \dots 8 \%$.

9.4. Внешняя характеристика и КПД трансформатора

Зависимость между вторичным напряжением и током нагрузки при заданном первичном напряжении представляет собой внешнюю характеристику трансформатора $U_2 = f(I_2)$ при $U_1 = const$.

Изменение вторичного напряжения определяют в процентах

$$\Delta U \% = \frac{U_{2н} - U_2}{U_{2н}} \cdot 100 = \frac{U_{1н} - U'_2}{U_{1н}} \cdot 100. \quad (9.16)$$

Если ввести понятие коэффициента нагрузки трансформатора $\beta = I_1 / I_{1н} = I_2 / I_{2н}$, то с учетом векторной диаграммы (рис. 9.6, б) и (9.15) уравнение (9.16) можно привести к виду

$$\Delta U \% = \beta \frac{I_{1н} R_k}{U_{1н}} \cdot 100 \cos \varphi_2 + \beta \frac{I_{1н} X_k}{U_{1н}} \cdot 100 \sin \varphi_2 \quad (9.17)$$

после подстановки (9.15) получим

$$\Delta U \% = \beta (U_{ак} \cos \varphi_2 + U_{рк} \sin \varphi_2). \quad (9.18)$$

По известному значению $\Delta U \%$ определяют вторичное напряжение.

КПД трансформатора:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_m + P_э} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_2 I_2 \cos \varphi_2 + P_m + P_э}. \quad U_2 = U_{2н} \left(1 - \frac{\Delta U \%}{100} \right). \quad (9.19)$$

где P_1 – активная мощность, подведенная к первичной обмотке; P_2 – мощность, отдаваемая трансформатором; $P_m = P_{10}$ – мощность магнитных потерь при холостом ходе; $P_э = P_{1к} = P_k I_1^2$ – мощность электрических потерь в обмотках при коротком замыкании.

Баланс мощности трансформатора определяется равенством

$$P_1 = P_2 + \Delta P = P_2 + P_m + P_э.$$

Г л а в а X. МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Машины постоянного тока применяют в электротранспорте, в мобильных сельскохозяйственных агрегатах, в системах автоматического регулирования и др. Генераторы постоянного тока используются в качестве источников питания мобильных машин (тракторов и автомобилей), внутрицеховых сетей постоянного тока, в частности, для питания электромагнитов, зарядки аккумуляторов, сварки, в качестве преобразователей частоты вращения и др.

Широкое применение машин постоянного тока обусловлено следующими причинами: возможностью плавного регулирования частоты вращения вала, хорошими пусковыми свойствами, большим пусковым моментом при сравнительно небольшом пусковом токе.

10.1. Устройство и принцип действия машин постоянного тока

На рис. 10.1 показана схема машины постоянного тока, а на рис. 10.2 она изображена в осевом направлении.

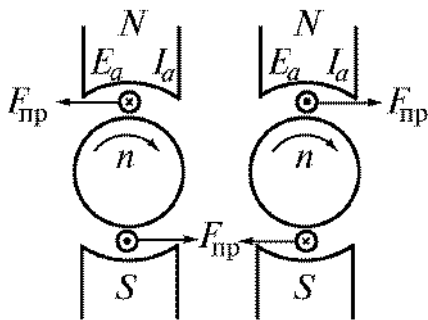


Рис. 10.1. Схема машины постоянного тока

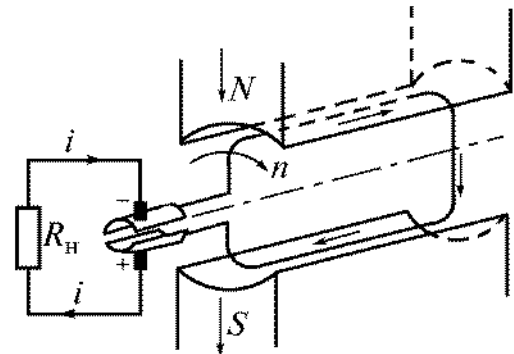


Рис. 10.2. Осевое изображение машины постоянного тока

Неподвижная часть машины состоит из *станины* (рис. 10.3), на которой укреплены основные (главные) полюсы для возбуждения основного магнитного потока и дополнительные – для улучшения коммутации. На основных полюсах размещена обмотка возбуждения, на дополнительных – обмотка, которая соединяется последовательно с якорем. Станина (ядро) и основные полюсы являются частью магнитной цепи основного потока.

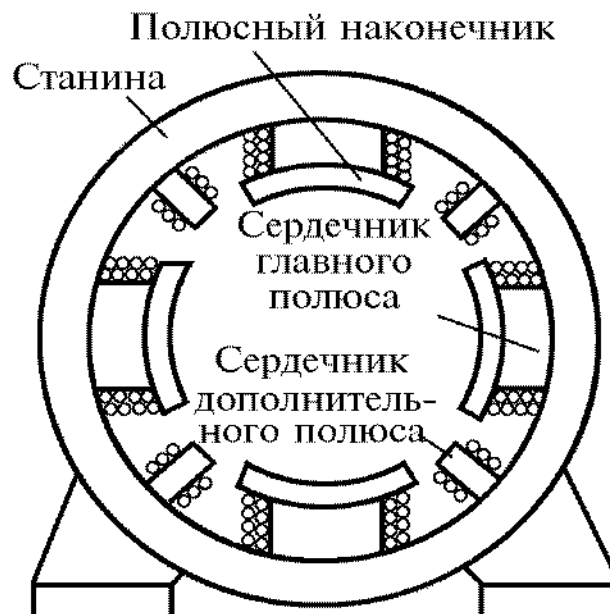


Рис. 10.3. Конструкция машины постоянного тока

В целом неподвижная часть называется индуктором. Вращающаяся часть машины называется *якорем* (рис. 10.4). Он состоит из зубчатого сердечника, обмотки и коллектора. Сердечник якоря набирается из листов электротехнической стали, изолированных друг от друга. В пазы сердечника уложена обмотка якоря. *Коллектор* представляет собой полый цилиндр из медных пластин, которые присоединены к выводам секций обмотки. Пластины изолированы друг от друга и от вала машин. Для отвода тока от коллектора служат щетки, прижимаемые к коллектору пружиной. Щеткодержатели крепятся к щеточной траверсе. Вал якоря опирается на подшипники, помещенные в подшипниковые щиты, обеспечивающие совпадение осей якоря и станины. В проводниках вращающегося якоря индуцируется ЭДС, направление которой определяется по правилу правой руки.

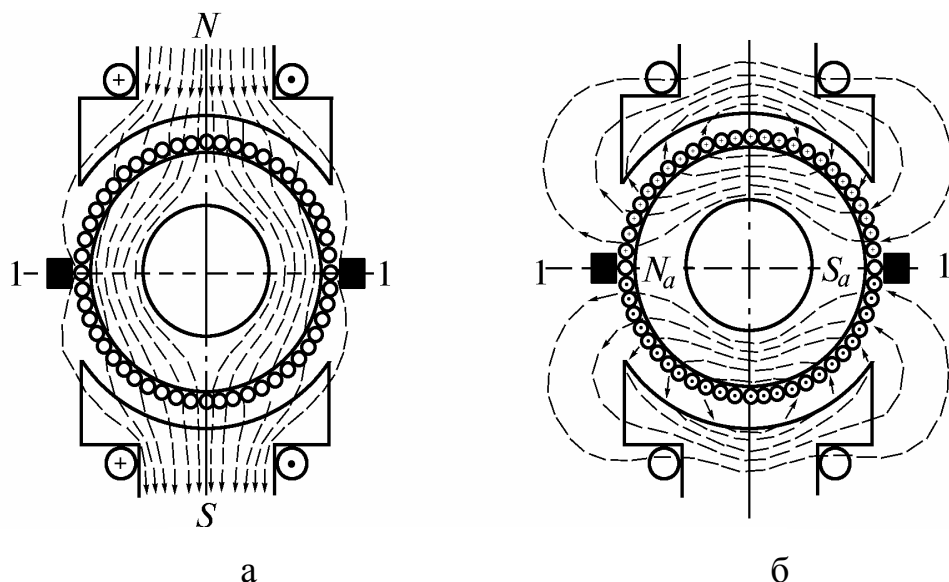


Рис. 10.4. Объяснение реакции якоря

Мгновенное значение ЭДС пропорционально магнитной индукции, изменение которой на полюсном делении показано на рис. 10.9. Среднее значение ЭДС за половину периода

$$e_{\text{ср}} = B_{\text{ср}} v l = \frac{\Phi}{\tau l} v l = \frac{v}{\tau} \Phi,$$

где $B_{\text{ср}}$ – среднее значение магнитной индукции в воздушном зазоре; Φ – магнитный поток одного полюса; v – скорость вращения; τ – полюсное деление.

ЭДС каждой секции имеет свой знак, и ее частота

$$f = \frac{pn}{60},$$

где p – число пар полюсов; n – частота вращения якоря.

Несмотря на то что ток в обмотке якоря переменный, во внешней цепи полярность ЭДС и направление тока неизменны, что обеспечивается коллектором, представляющим собой механический выпрямитель.

Машина постоянного тока может работать как в режиме генератора, так и в режиме двигателя. Такое свойство машин постоянного тока называется *обратимостью*. Переход из одного режима в другой осуществляется изменением направления тока в обмотке якоря.

10.2. Реакция якоря машины постоянного тока

Явление воздействия магнитного поля, создаваемого током якоря, на магнитное поле главных полюсов называют *реакцией якоря*. Распределение магнитного поля при холостом ходе показано на рис. 10.4, а. Оно симметрично относительно оси полюсов. При нагрузке машины обмотка якоря создает собственное магнитное поле, показанное на рис. 10.4, б при отсутствии тока возбуждения. Ось поля якоря направлена по оси щеток 1–1. Из рис. 10.4 можно убедиться, что в режиме генератора полярность якоря N_a-S_a предшествует по ходу вращения полярности главных полюсов $N-S$, а в режиме двигателя – наоборот.

Взаимодействие полей якоря и индуктора образует результирующее поле, характер которого показан на рис. 10.5.

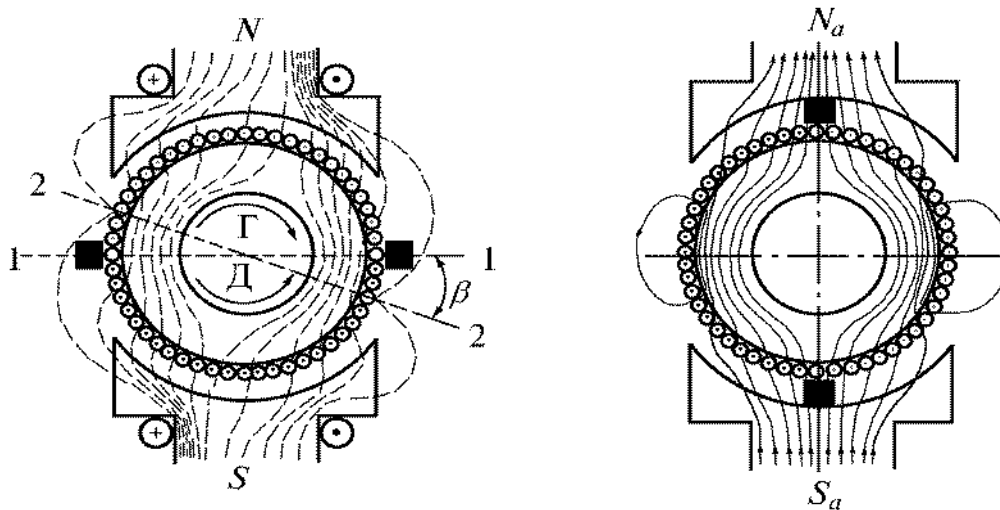


Рис. 10.5. Результирующее поле якоря и основных полюсов

При установке щеток на геометрической нейтрали 1–1 поле якоря направлено поперек оси полюсов, реакция якоря называется поперечной. Как видно из рис. 10.5, а, поперечная реакция якоря ослабляет поле под одним краем полюса и усиливает его под другим, вследствие чего ось 2–2 результирующего поля поворачивается в генераторе на некото-

рый угол в направлении вращения якоря, а в двигателе – в обратную сторону. Новое положение линии 2–2, соответствующее переходу магнитной индукции на поверхности якоря через нулевое значение, называется линией *физической нейтрали*. При сдвиге щеток с геометрической нейтрали на некоторый угол ось поля якоря также смещается на этот угол.

Таким образом, при смещении щеток генератора с геометрической нейтрали в направлении вращения и щеток двигателя против направления вращения возникает размагничивающая продольная реакция якоря. Результирующий магнитный поток уменьшается. При смещении щеток в обратном направлении возникает намагничивающая продольная реакция якоря, вызывающая увеличение результирующего потока.

Влияние поперечной реакции якоря на результирующий магнитный поток можно было бы считать нейтральным, так как ослабление поля под одним краем полюса и усиление под другим краем компенсируются. Однако это справедливо лишь для ненасыщенного состояния магнитопровода полюсов. С учетом насыщения поперечная реакция якоря всегда вызывает некоторое уменьшение магнитного потока полюсов, т. е. действует размагничивающим образом.

Для уменьшения влияния реакции якоря на работу машины применяют дополнительные полюсы. Их размещают по геометрической нейтрали между главными полюсами. Их обмотка включается последовательно в цепь якоря и создает встречную МДС по отношению к обмотке якоря.

Эффективным средством борьбы с искажением поля является применение компенсационной обмотки. Ее размещают в пазах полюсных наконечников и включают последовательно с обмоткой якоря. Магнитное поле компенсационной обмотки направлено навстречу магнитному полю якоря. Влияние поперечной реакции якоря в пределах полюсного наконечника устраняется. Компенсационная обмотка применяется в машинах средней и большой мощности.

Основным способом улучшения коммутации является создание коммутирующего потока с помощью дополнительных полюсов, которые устанавливают между главными полюсами. Их МДС должна быть направлена против МДС поперечной реакции якоря, чтобы скомпенсировать ее и создать коммутирующее поле для компенсации ЭДС самоиндукции. Так как МДС реакции якоря и ЭДС самоиндукции пропорциональны току якоря, то и МДС дополнительных полюсов долж-

на быть пропорциональна току якоря. Поэтому обмотку дополнительных полюсов соединяют последовательно с якорем, а сами полюсы выполняют ненасыщенными. Полярность дополнительных полюсов должна совпадать с полярностью главных полюсов по направлению вращения якоря в режиме двигателя и предшествовать им – в режиме генератора.

Для улучшения коммутации устраняют механические причины искрения, увеличивают сопротивление цепи коммутации, уменьшают реактивную ЭДС и др.

10.3. Схемы возбуждения машин постоянного тока

Машины постоянного тока выполняют с *независимым, параллельным, последовательным и смешанным возбуждением*.

Обмотка возбуждения машины с независимым возбуждением (рис. 10.6, а) получает питание от независимого источника. Мощность возбуждения составляет 0,3...5 % номинальной мощности машины. У машины с параллельным возбуждением (рис. 10.6, б) обмотка возбуждения включается на напряжение самой машины. Ток якоря равен сумме токов нагрузки I и тока возбуждения I_B

$$I_a = I + I_B. \quad (10.1)$$

Такие машины изготавливают на малые и средние мощности. Обмотка возбуждения машины с последовательным возбуждением (рис. 10.6, в) включена в цепь якоря, поэтому токи возбуждения и нагрузки равны: $I_B = I_a = I$. Такие машины почти не применяют.

Машина со смешанным возбуждением (рис. 10.6, г) имеет две обмотки возбуждения – параллельную и последовательную. Если они создают МДС одинакового направления, то их соединение называют согласным, противоположного – встречным. Основная часть МДС создается параллельной обмоткой возбуждения.

Схемы возбуждения двигателей и генераторов аналогичны. Отличие в том, что обмотки возбуждения в схемах с параллельным, последовательным и смешанным возбуждением получают питание от того же источника, что и двигатель. Поэтому при параллельном и смешанном возбуждении ток якоря меньше тока нагрузки на ток возбуждения $I_a = I - I_B$.

Направление токов в режиме двигателя показано на рис. 10.6 штриховыми стрелками.

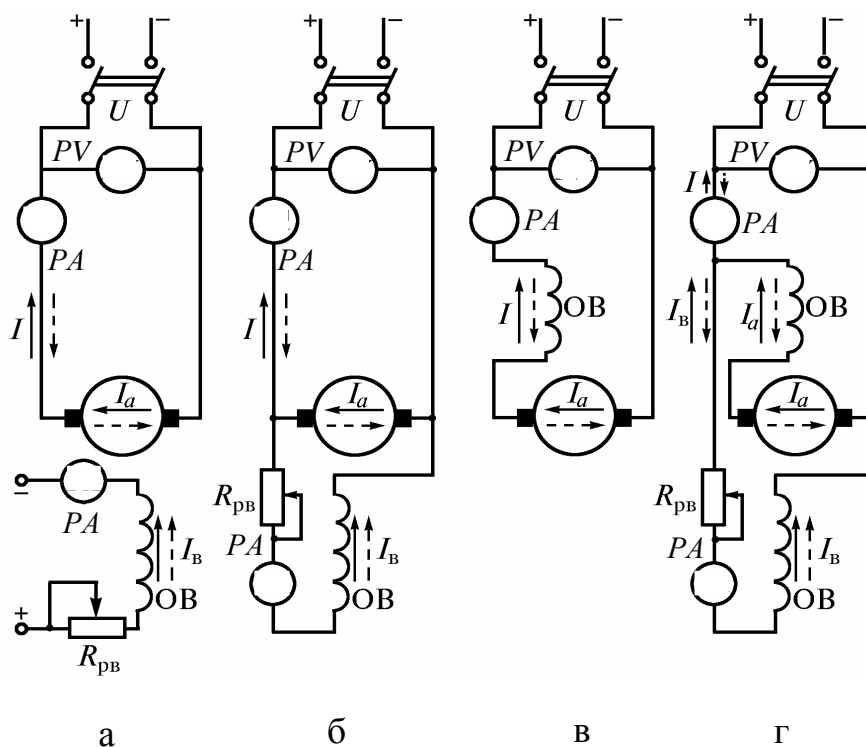


Рис. 10.6. Схемы возбуждения машин постоянного тока: а – независимая; б – параллельная; в – последовательная; г – смешанная

10.4. Выходные (внешние) характеристики машин постоянного тока

Характеристики *генераторов* определяют зависимости между основными параметрами – напряжением на выходе U током возбуждения I_B , током якоря I_a или током нагрузки I , скоростью вращения n .

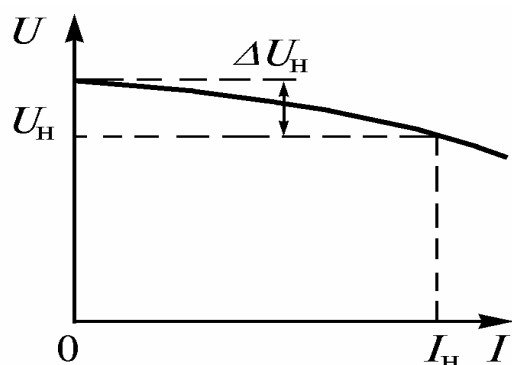


Рис. 10.7. Внешняя характеристика генератора независимого возбуждения

Внешняя характеристика *генератора независимого возбуждения* (рис. 10.6, а) – это зависимость $U = f(I)$ при $I_B = const$ и $n = const$ (рис. 10.6). При увеличении тока напряжение несколько падает вследствие падения напряжения в цепи якоря и уменьшения ЭДС из-за воздействия поперечной реакции якоря. Внешнюю характеристику рекомендуется снимать при увеличении напряжения. В

этом случае сначала устанавливают номинальный режим $U = U_H$, $I = I_H$, а затем уменьшают ток нагрузки до нуля. При этом напряжение

возрастает на ΔU_H называемое номинальным изменением напряжения

$$\Delta U_H = \frac{\Delta U_H}{U_H} 100 = 5...15 \%$$

В генераторе параллельного возбуждения обмотка возбуждения подключена к выводам якоря (рис. 10.6, б). Для самовозбуждения такой машины необходимы следующие условия: 1) наличие остаточного магнитного потока полюсов; 2) правильное подключение концов обмотки возбуждения; 3) сопротивление цепи возбуждения при данной скорости вращения якоря должно быть ниже некоторого критического значения.

В генераторах последовательного возбуждения (рис. 10.6, г) $I_B = I_a = I$ и поэтому при $n = const$ имеются только две независимые переменные U и I . Такой генератор имеет внешнюю характеристику, показанную на рис. 10.9, и поэтому применяется только в специальных устройствах. Характеристики холостого хода и характеристики короткого замыкания могут быть получены только при питании обмотки возбуждения от постороннего источника, как и генератора независимого возбуждения.

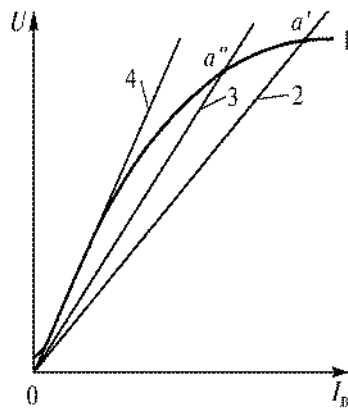


Рис. 10.8. Внешняя характеристика генератора параллельного возбуждения

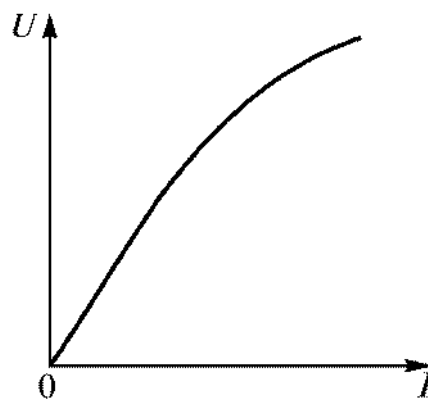


Рис. 10.9. Внешняя характеристика генератора последовательного возбуждения

Генератор смешанного возбуждения возбуждается так же, как генератор параллельного возбуждения. Их характеристики холостого хода аналогичны. Внешние и регулировочные характеристики зависят от способа соединения последовательной обмотки. При согласном соединении они являются более жесткими по сравнению с характеристиками генератора независимого возбуждения. При встречном соединении внешняя характеристика становится крутопадающей. Такое соединение применяют, например, в генераторах дуговой сварки.

10.5. Пуск и регулирование скорости вращения двигателей

При *пуске* следует обеспечить необходимый для трогания вращающий момент и ограничить большие пусковой ток и момент, опасные для двигателя и агрегата.

Возможны три способа пуска: прямой, пуск при включении реостата в цепь якоря и пуск при пониженном напряжении цепи якоря.

При прямом пуске якорь (сопротивлением R_a) включается на полное напряжение. Так как в первый момент якорь неподвижен, ЭДС самоиндукции, сопротивление цепи якоря мало (порядка 1 Ом), то пусковой ток большой, в 5...10 раз превышающий номинальный. Поэтому прямой пуск применяется только для двигателей мощностью до нескольких сотен ватт, у которых сопротивление цепи якоря относительно велико и пусковой ток ограничен. Двигатели большой мощности пускают с помощью пускового реостата R_{Π} , включаемого последовательно с обмоткой якоря. При пуске с помощью пускового реостата ток в якоря

$$I_a = \frac{U - E_a}{R_a + R_{\Pi}}, \quad (10.2)$$

а в начальный момент пуска, при $n = 0$

$$I_a = \frac{U}{R_a + R_{\Pi}}. \quad (10.3)$$

Сопротивление пускового реостата выбирают таким, чтобы ограничить пусковой ток до требуемого значения.

Способы *регулирования* скорости вращения двигателей следующие:

1. Изменением магнитного потока, т. е. током возбуждения. Этот способ обеспечивает регулирование скорости вверх от номинальной. Верхний предел ограничивается механической прочностью и условиями коммутации.

2. Включением в цепь якоря регулирующего резистора. Этот способ обеспечивает регулирование скорости вниз от номинальной. Недостатками способа являются значительные потери мощности и зависимость диапазона регулирования от нагрузки двигателя.

3. Регулирование напряжения цепи якоря. Этим способом обеспечивается регулирование скорости вниз от номинальной и высокий КПД двигателя.

В двигателе последовательного возбуждения регулирование осуществляется шунтированием обмотки возбуждения с помощью активного сопротивления или изменением числа витков (с помощью отпаек). Второй и

третий способ регулирования включением в цепь якоря регулируемого сопротивления и регулирования напряжения цепи якоря аналогичны приведенным выше.

Уменьшение скорости вращения двигателя последовательного возбуждения возможно шунтированием обмотки якоря активным сопротивлением. Однако такой способ очень неэкономичен из-за потерь мощности в резисторе.

10.6. Генераторы постоянного тока для систем электропитания автомобилей и тракторов

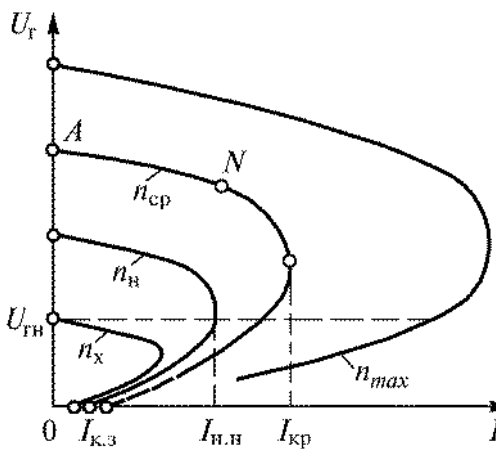


Рис. 10.10. Внешние характеристики автотракторного генератора с параллельным возбуждением

Автотракторный генератор в отличие от генератора общепромышленного назначения работает при переменной частоте вращения с регулятором напряжения. Внешние характеристики генератора с параллельным возбуждением представлены на рис. 10.10. Напряжение на выходе генератора уменьшается при увеличении тока нагрузки под действием реакции якоря, уменьшения напряжения в цепи якоря $I_a R_a$ и уменьшения тока возбуждения. При насыщении магнитной цепи с увеличением тока нагрузки напряжение генератора уменьшается (участок AN) в основном за счет падения напряжения в цепи якоря.

При насыщенной магнитной цепи влияние реакции якоря и уменьшение тока возбуждения более значительные. Напряжение генератора резко уменьшается, ток нагрузки достигает критического значения $I_{кр}$, а затем уменьшается до тока короткого замыкания $I_{к.з} = E_0/R_a$, т. е. ЭДС E_0 зависит от остаточного магнитного потока и сопротивления цепи якоря R_a . Этот режим не является аварийным. В случае внезапного короткого замыкания из-за инерционности цепи возбуждения бросок тока короткого замыкания может в десятки раз превысить номинальный ток нагрузки.

Конструктивные особенности автотракторных генераторов постоянного тока обусловлены только технологией массового производства и условиями эксплуатации. Генераторы мощностью до 400 Вт выполняются двухполюсными, более 400 Вт — четырехполюсными.

Глава XI. АСИНХРОННЫЕ МАШИНЫ

Асинхронная машина – это бесколлекторная машина переменного тока, у которой при работе возбуждается вращающееся магнитное поле, но ротор вращается асинхронно, т. е. с угловой скоростью, отличной от угловой скорости поля.

Асинхронные двигатели являются самыми распространенными из всех двигателей. Их преимущества состоят в простоте устройства, большой надежности и сравнительно низкой стоимости.

Асинхронные машины могут работать в режиме генератора. Но как источники электрической энергии они почти не применяются, так как не имеют собственного источника возбуждения магнитного потока и по своим показателям уступают синхронным генераторам.

Асинхронные машины применяют в качестве регуляторов напряжения, фазорегуляторов, преобразователей частоты и др.

11.1. Устройство асинхронного двигателя

Асинхронный двигатель состоит из статора, ротора и подшипниковых щитов (рис. 11.1).

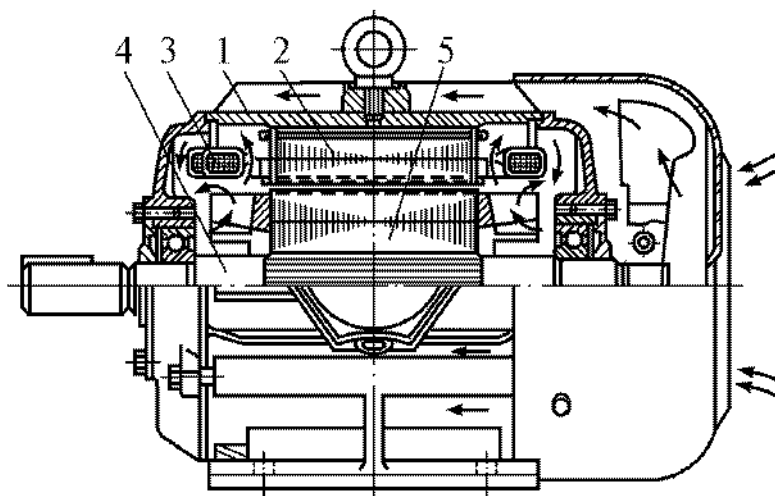


Рис. 11.1. Устройство асинхронной машины

Статор, неподвижная часть двигателя, имеет цилиндрическую форму. Он состоит из корпуса 1, сердечника 2 и обмотки 3. Корпус литой стальной или чугунный. Магнитопровод статора собирается из тонких листов электротехнической стали. На внутренней поверхности он имеет пазы, в которые укладывается обмотка статора. *Ротор* асинхронного двигателя, вращающаяся часть, состоит из стального вала 4, магнитопровода 5, набранного из листов электротехнической

стали с выштампованными пазами. Обмотка ротора бывает короткозамкнутой или фазной. Короткозамкнутая обмотка выполняется из алюминиевых или медных стержней, накоротко замкнутых с обоих торцов ротора. Фазный ротор имеет трехфазную обмотку, соединенную в звезду.

Выводы обмотки подсоединены к кольцам на валу и с помощью щеток подсоединяются к реостату или другому устройству. Вращающийся ротор размещают на общем валу со статором. Вал вращается в подшипниковых щитах. Соединение обмотки статора осуществляется в коробке, в которую выведены начала фаз C_1, C_2, C_3 и концы фаз C_4, C_5, C_6 . На рис. 11.2 показаны схемы расположения этих выводов (рис. 11.2, а) и способы соединения их между собой при соединении фазных обмоток звездой (рис. 11.2, б) и треугольником (рис. 11.2, в).

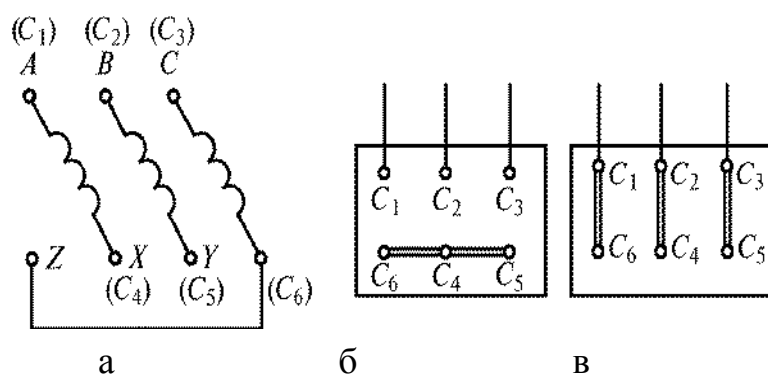


Рис. 11.2. Схемы расположения – а; способы соединения – б и выводов – в обмоток асинхронной машины

Если в паспорте двигателя указаны два напряжения, например, 380/220, то большему напряжению соответствует соединение звездой, меньшему – треугольником. В обоих случаях напряжение на фазе двигателя равно 220 В.

11.2. Вращающееся магнитное поле

Основой действия асинхронного двигателя является вращающееся магнитное поле. Принцип получения вращающегося магнитного поля заключается в том, что если по системе проводников, распределенных в пространстве по окружности, протекают токи, сдвинутые по фазе, то в пространстве создается вращающееся поле.

На рис. 11.3 показаны три фазные обмотки $A - X, B - Y, C - Z$, каждая в виде одного витка.

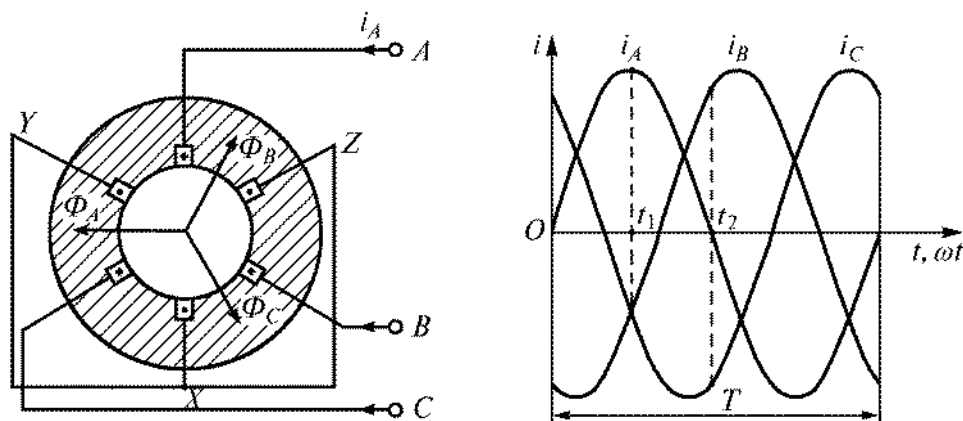


Рис. 11.3. Объяснение получения вращающегося магнитного поля

От источника питания к обмоткам подводится трехфазная система токов

$$i_A = I_m \sin \omega t; \quad i_B = I_m \sin(\omega t - 120^\circ); \quad i_C = I_m \sin(\omega t + 120^\circ). \quad (11.1)$$

Положительные направления токов приняты от начала обмотки к концу, а соответствующие им магнитные потоки образуют трехфазную звезду $\Phi_A = 0; \Phi_B = -\frac{\sqrt{3}\Phi_m}{2}; \Phi_C = \frac{\sqrt{3}\Phi_m}{2}$,

где Φ_m – максимальное значение потока в фазе.

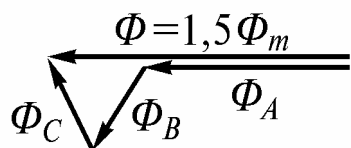


Рис. 11.3. Результирующий магнитный поток и его составляющие для момента $t=0$

Результирующий магнитный поток в каждый момент времени в 1,5 раза больше фазного.

На рис. 11.3 показаны векторы результирующего магнитного потока и его составляющие для момента $t=0$.

Таким образом, трехфазная обмотка, питаемая сдвинутыми на 120° токами, создает в каждый момент времени результирующий магнитный поток, что соответствует вращению результирующего вектора, т. е. созданию вращающегося магнитного поля. Результирующий поток остается неизменным и равным 1,5 от максимального потока фазы. Направление этого потока всегда совпадает с направлением магнитного потока той фазы, ток в которой в данный момент максимален. Поэтому для изменения направления вращения необходимо поменять местами любые две фазы.

11.3. Принцип действия асинхронного двигателя

Трехфазная обмотка статора создает магнитное поле, вращающееся со скоростью

$$n_1 = \frac{60f}{p} \quad (11.2)$$

где p – число пар полюсов машины; f – частота тока статора.

Электромагнитное взаимодействие между статором и ротором возникает только при неравенстве скорости поля статора и скорости вращения ротора.

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \times 100 \% \quad (11.3)$$

Отношение называется *скольжением* асинхронной машины.

В зависимости от соотношения n_1 и n различают три режима работы асинхронной машины: в режиме двигателя; в режиме генератора; в режиме электромагнитного тормоза.

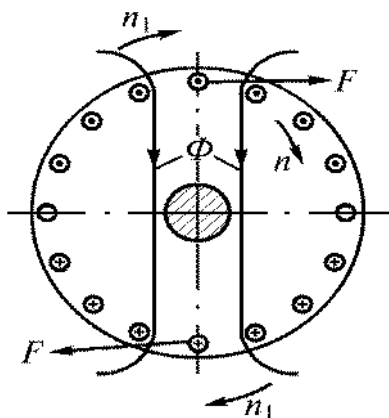


Рис. 11.4. Магнитное поле статора, вращающееся по часовой стрелке

Работа в режиме двигателя. На рис. 11.4 показано магнитное поле статора, вращающееся по часовой стрелке. При $n < n_1$ линии поля статора перемещаются относительно ротора также по часовой стрелке со скоростью $n_1 - n$. Согласно правилу правой руки ЭДС в проводниках ротора под северным полюсом направлены к нам, в проводниках под южным полюсом – от нас. То же направление имеют и активные составляющие токов в проводниках. Элек-

тромагнитные силы взаимодействия магнитных полей статора и ротора создают вращающий момент в направлении вращения поля статора. Скорость n , с которой вращается двигатель, зависит от его нагрузки. При холостом ходе скорость n становится почти равной n_1 , так как при $n_1 - n = 0$ ЭДС и токи в роторе равны нулю и электромагнитное взаимодействие исчезает. Таким образом, асинхронная машина работает в режиме двигателя в пределах от $n = 0$ до $n \approx n_1$, т. е. при скольжении от $s = +1$ до $s \approx 0$. При этом электрическая энергия, подводимая к статору из сети, преобразовывается в механическую энергию на валу.

11.4. Энергетический баланс асинхронного двигателя

Асинхронный двигатель потребляет из сети активную и реактивную мощность. Рассмотрим каждую из них.

Активная мощность

$$P_1 = m_1 U_1 I_1 \cos \varphi_1, \quad (11.4)$$

где m_1 – порядковый номер фазы двигателя.

Часть этой мощности расходуется в виде электрических потерь в активном сопротивлении обмотки

$$P_{\varepsilon 1} = m_1 I_1^2 R_1, \quad (11.5)$$

часть – в виде магнитных потерь P_{M1} в магнитопроводе статора

$$P_{M1} = m_1 I_0^2 R_0. \quad (11.6)$$

Оставшаяся часть мощности

$$P_{\varepsilon 2} = P_1 - P_{\varepsilon 1} - P_{M1} \quad (11.7)$$

представляет собой электромагнитную мощность, передаваемую с помощью магнитного поля из статора в ротор.

Механическая мощность P_2 на валу двигателя меньше механической мощности P_{Mx} на величину механических p_{Mx} и добавочных потерь p_D

$$P_2 = P_{Mx} - p_{Mx} - p_D. \quad (11.8)$$

Из уравнений (11.5) и (11.8) следует, что

$$P_{\varepsilon 2} = s P_{\varepsilon 2}, \quad (11.9)$$

$$P_{Mx} = (1 - s) P_{\varepsilon 2}. \quad (11.10)$$

Таким образом, активная мощность P_1 представляет собой среднюю мощность преобразования в двигателе электрической энергии, потребляемой из сети, в механическую, тепловую и другие виды энергии. Процесс преобразований активной энергии в режиме двигателя изображен на рис. 11.5 в виде энергетической диаграммы.

Сумма потерь в двигателе $\sum p = p_{\varepsilon 1} + p_{M1} + p_{\varepsilon 2} + p_{Mx} + p_D$ вычитается из потребляемой мощности и определяет полезную мощность на валу $P_2 = P_1 - \sum p$.

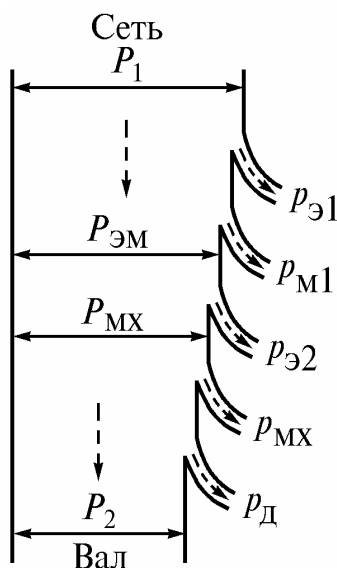


Рис. 11.5. Энергетическая диаграмма асинхронного двигателя

КПД двигателя

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{\sum P}{P_1}. \quad (11.11)$$

Электромагнитная мощность равна произведению электромагнитного вращающего момента M и угловой скорости вращения ω_1 магнитного потока $P_{эм} = M\omega_1$.

Механическая мощность на валу ротора равна произведению момента M на угловую скорость вращения ω ротора $P_{мх} = M\omega$.

Как следует из рис. 11.5, разность электромагнитной и механической мощностей, затрачиваемая на электрические потери в активном сопротивлении ротора, равна $P_{эм} - P_{мх} = M(\omega_1 - \omega) = P_{э2}$.

Электромагнитный вращающий момент зависит от скольжения (рис. 11.6).

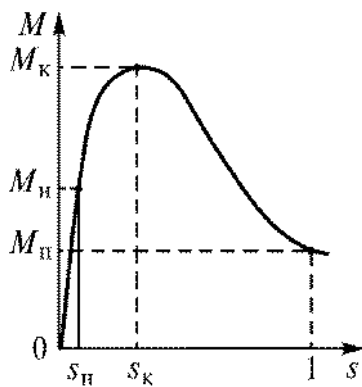


Рис. 11.6. Зависимость $M = f(s)$

Характерными точками для режима двигателя являются:

режим холостого хода: $s = 0, M = 0$;

номинальный режим: $s_н = 0,02 \dots 0,06, M = M_н$;

режим максимального (критического) момента: $s_к = 0,06 \dots 0,15, M = M_к = (1,7 \dots 3) M_н$;

режим пуска: $s_п = 1,0, M_п = (1,1 \dots 1,8) M_н$.

Максимум вращающего момента разделяет кривую на устойчивую часть от $s = 0$ до $s_к$ и неустойчивую – от $s_к$ до $s = 1$. Увеличение тормозного момента выше максимального ведет к остановке двигателя.

11.5. Механическая характеристика асинхронного двигателя

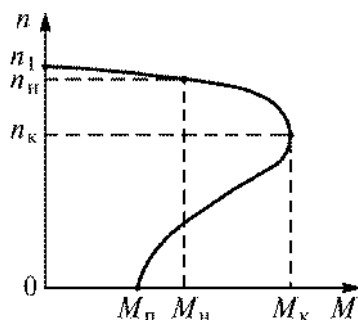


Рис. 11.7. Механическая характеристика асинхронного двигателя

Механической характеристикой двигателя называется зависимость частоты вращения ротора от момента на валу $n = f(M_2)$. Так как при нагрузке момент холостого хода мал, то $M_2 \approx M$, и механическая характеристика представляется зависимостью $n = f(M)$.

Если учесть взаимосвязь $s = \frac{n_1 - n}{n_1}$, то

механическую характеристику можно представить в координатах n и M (рис. 11.7).

11.6. Пуск и регулирование скорости асинхронного двигателя

Способы пуска. При пуске ротор разгоняется от частоты вращения $n = 0$ до некоторой частоты n . Пуск возможен только тогда, когда вращающий момент двигателя больше момента сопротивления. Ниже рассмотрены основные способы пуска.

Прямой пуск осуществляется включением обмотки статора на напряжение сети. В первый момент скольжение $s = 1$, пусковой ток максимальный. Кратность пускового тока $k_I = \frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{н}}} = 5 \dots 7$. Пусковой

момент $M_{\text{п}} \approx (1,1 \dots 1,8)M_{\text{н}}$.

Анализ этого соотношения показывает, что при прямом пуске возникают большой бросок тока и относительно небольшой пусковой момент. Это оказывает отрицательное влияние на возможность пуска самого электродвигателя и на устойчивость работы других потребителей электрической энергии из-за снижения напряжения.

Пуск переключением обмотки статора применяется для двигателей, работающих при соединении обмоток статора в треугольник. При пуске обмотка статора с помощью переключателя соединяется в звезду. В результате линейный пусковой ток уменьшается примерно в три раза, пусковой момент также уменьшается в три раза. Если пусковой момент достаточен для разгона электропривода, то такой пуск допустим. После пуска обмотку статора переключают на схему треугольника, и двигатель работает в нормальном режиме.

При *автотрансформаторном* пуске обмотка статора включается на пониженное напряжение с помощью автотрансформатора. Двигатель разгоняется при пусковом токе и моменте в k^2 раз меньше по сравнению с прямым пуском, где k – коэффициент трансформации понижающего автотрансформатора. В конце разгона двигатель переключается на напряжение сети.

Пуск двигателя с *фазным ротором* осуществляется путем включения пускового реостата в цепь ротора через контактные кольца и щетки. Сопротивление пускового резистора R_p в фазе выбирают таким, чтобы пусковой момент был максимальным. Такой способ пуска применяют, как правило, для двигателей большой мощности при ограниченном пусковом токе и высоких требованиях к приводу. Недостатками способа являются значительные потери электрической энергии в пусковом резисторе и сложность устройства ротора.

Регулирование частоты вращения двигателя. Частота вращения ротора асинхронного двигателя $n = n_1(1 - s) = \frac{60f(1 - s)}{p}$. Из этого

уравнения следует, что изменять частоту вращения можно изменением частоты f числом пар полюсов p и скольжением s .

Регулирование *изменением частоты тока статора* (частотное регулирование) требует применения источников питания с регулируемой частотой. В качестве такого источника может быть использован синхронный генератор с переменной скоростью вращения или полупроводниковый преобразователь частоты. В этом случае частота вращения двигателя и частота вращения ротора изменяются пропорционально частоте сети. Частотное регулирование обычно совмещают с изменением напряжения по закону $\frac{U_1}{f} = const$.

К недостаткам частотного регулирования относятся громоздкость и высокая скорость питающей установки.

Для регулирования частоты вращения *изменением числа пар полюсов* применяют двигатели с короткозамкнутым ротором, у которых на статоре всех обмоток, размещенных в общих пазах, имеется возможность получить различные числа пар полюсов путем изменения (переключения) их схемы соединения. Такое регулирование возможно, так как у короткозамкнутого двигателя число полюсов ротора всегда равно числу полюсов вращающегося магнитного поля. Регулирование изменением числа пар полюсов является ступенчатым и применяется для уменьшения числа ступеней в коробках скоростей, вентиляторах, насосах и др. Двигатели с изменяемым числом пар полюсов называют многоскоростными. Их выпускают на две, три или четыре скорости вращения, причем двухскоростные изготавливают с одной обмоткой на статоре с переключением числа пар полюсов в отношении $p_2/p_1 = 2/1$; трехскоростные – с двумя обмотками на статоре, из которых одну выполняют двухскоростной с $p_2/p_1 = 2/1$; четырехскоростные – с двумя обмотками, каждая из которых выполняется с переключением числа полюсов в отношении 2/1.

Масса и стоимость многоскоростных двигателей больше, чем односкоростных двигателей. Но их часто применяют в установках дискретного изменения частоты вращения.

Регулирование скорости *уменьшением напряжения на статоре.* При уменьшении напряжения U_1 момент двигателя изменяется про-

порционально U_1^2 , что изменяет его механические характеристики, следовательно, и скольжение. Как видно из рис. 11.6, пределы регулирования скорости соответствуют изменению скольжения в интервале $0 < s < s_k$. Схемы автоматического регулирования позволяют расширить зону регулирования в области $s > s_k$ и обеспечить при этом жесткие механические характеристики.

Г л а в а XII. СИНХРОННЫЕ МАШИНЫ

Синхронные машины – это машины переменного тока, у которых частота вращения ротора равна частоте вращения магнитного поля, создаваемого магнитодвижущей силой обмотки статора. Синхронные машины, как и все электрические машины, обратимы, т. е. они могут работать как в режиме генератора, так и в режиме двигателя.

Основная часть производимой и используемой электрической энергии вырабатывается с помощью синхронных трехфазных турбогенераторов и гидрогенераторов, приводимых во вращение соответственно паровыми и гидротурбинами.

Особенностями синхронных генераторов являются:

- способность вырабатывать как активную, так и реактивную мощность (с возможностью ее регулирования);
- возможность регулирования выходного напряжения;
- возможность работы как с сетью, так и в автономном режиме без применения каких-либо сложных дополнительных устройств;
- высокий КПД.

Синхронные двигатели имеют постоянную частоту вращения и поэтому применяются там, где не требуется регулирование частоты или она должна быть постоянной. Мощность синхронных двигателей составляет десятки, сотни и тысячи киловатт.

12.1. Устройство синхронной машины

Синхронная машина состоит из двух основных частей: неподвижного статора, выполняющего функции якоря, и вращающегося ротора, служащего индуктором. *Статор* (как и у асинхронной машины) представляет собой полый цилиндр, набранный из листов электротехнической стали со штампованными на внутренней поверхности пазами, в которые укладывается трехфазная обмотка. *Ротор* представляет собой электромагнит, обмотка которого питается постоянным током через два изолированных контактных кольца, вращаю-

щихся вместе с ротором. Постоянный ток подводится к ротору через неподвижные щетки, скользящие по контактному кольцу.

Роторы бывают *явнополюсный* (рис. 12.1, а) и *неявнополюсный* (рис. 12.1, б).

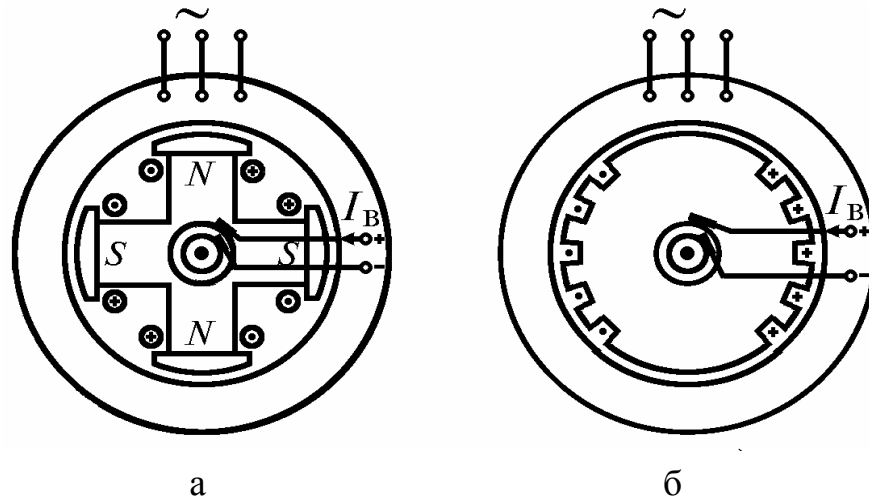


Рис. 12.1. Типы роторов синхронных машин:
а – явнополюсный; б – неявнополюсный

Явнополюсный ротор, имеющий выступающие полюсы, применяют у машин с частотой вращения до 1000, 1500 *об/мин*. Неявнополюсный ротор, имеющий вид цилиндра, применяют при скоростях 1500 и 3000 *об/мин*.

12.2. Принцип действия синхронной машины

Рассмотрим действие машины при холостом ходе. При этом обмотка якоря (статора) разомкнута, магнитное поле машины создается только обмоткой возбуждения ротора. Форма наконечников полюсов ротора выполняется такой, чтобы распределение магнитной индукции в воздушном зазоре было близким к синусоидальному.

Если выполнить распределенную обмотку статора с укороченным шагом и соединить ее звездой, то наведенная в каждой фазной обмотке ЭДС будет изменяться по синусоидальному закону (синхронный генератор). Ее действующее значение

$$E = 4,44k_{об}wf\Phi_0, \quad (12.1)$$

где $k_{об}$ – обмоточный коэффициент; w – число витков одной фазы обмотки статора; $f = \frac{pn_1}{60}$ – частота синусоидальных ЭДС; p – число пар полюсов; Φ_0 – максимальный магнитный поток полюса ротора; n_1 – синхронная частота вращения. При этом ЭДС статора при неизмен-

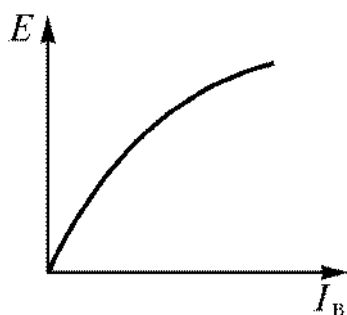


Рис. 12.2. Зависимость ЭДС синхронной машины от тока возбуждения

ной частоте пропорциональна потоку. Изменяя ток возбуждения, можно регулировать магнитный поток и ЭДС генератора.

Зависимость $E = f(I_{\text{в}})$ при $I = 0$ называется *характеристикой холостого хода* (рис. 12.2). Она применяется при расчете других характеристик и анализе режимов работы синхронных генераторов и двигателей.

12.3. Реакция якоря синхронной машины

В машине, работающей под нагрузкой, магнитное поле создается в отличие от холостого хода не только в роторе, но и магнитодвижущей силой (МДС) токов статора. Эти МДС, вращаясь с одной и той же синхронной частотой, взаимодействуют между собой и образуют результирующее вращающееся магнитное поле машины. Воздействие МДС статора на магнитное поле машины называется *реакцией якоря*.

Рассмотрим реакцию якоря на примере двухполюсного синхронного генератора с явновыраженными полюсами. На рис. 12.3 каждая фаза обмотки изображена в виде одного витка ($A - X, B - Y, C - Z$), северный полюс ротора обозначен буквой N , южный – буквой S , магнитные линии этого поля не показаны.

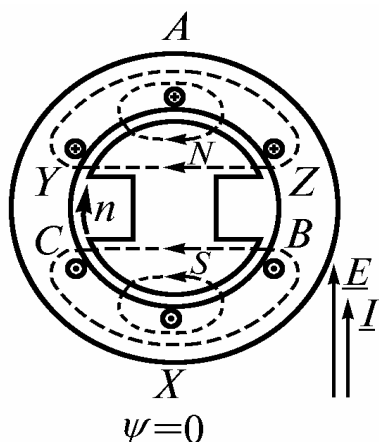


Рис. 12.3. Объяснение реакции якоря синхронной машины при активной нагрузке генератора

Рисунок 12.3 поясняет реакцию якоря при активной нагрузке, когда угол сдвига по фазе ψ между ЭДС \underline{E} и током \underline{I} равен нулю. В этом положении ЭДС и ток фазы A максимальны, а в фазах B и C равны половине от максимальных значений и противоположны по знаку (направление токов в верхней половине обмотки статора показано крестиками, в нижней – точками). Этим направлениям токов соответствует магнитное поле реакции якоря, основные линии которого направлены поперек оси полюсов ротора. Они размагничивают набегающий край полюса и намагничивают сбегающий. При этом результирующий магнитный поток генератора $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0 + \underline{\Phi}_a$ поворачива-

показано крестиками, в нижней – точками). Этим направлениям токов соответствует магнитное поле реакции якоря, основные линии которого направлены поперек оси полюсов ротора. Они размагничивают набегающий край полюса и намагничивают сбегающий. При этом результирующий магнитный поток генератора $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0 + \underline{\Phi}_a$ поворачива-

ется относительно потока ротора Φ_0 на некоторый угол в направлении, противоположном направлению вращения ротора. Следовательно, при активной нагрузке ($\psi = 0$) реакция якоря синхронной машины является чисто поперечной. При отстающем токе и $\psi = 90^\circ$ реакция якоря действует по продольной оси и является по отношению к полю возбуждения размагничивающей. При опережающем токе и $\psi = -90^\circ$ реакция якоря действует по продольной оси и является по отношению к полю возбуждения намагничивающей.

Сравнение реакции якоря явнополюсных и неявнополюсных машин показывает, что принципиально они отличаются тем, что у неявнополюсных машин воздушный зазор почти одинаковый вдоль продольной и поперечной осей ротора. Поэтому и потоки реакции якоря по осям при одинаковых токах статора практически равны. У явнополюсных машин воздушный зазор вдоль поперечной оси во много раз больше, чем вдоль продольной оси. Поэтому при равных составляющих МДС якоря вдоль продольной и поперечной осей магнитный поток реакции якоря вдоль поперечной оси значительно меньше и составляет примерно 60 % от потока вдоль продольной оси.

12.4. Внешняя характеристика синхронного генератора

Внешняя характеристика – это зависимость напряжения генератора от тока нагрузки $U = f(I)$ при $I_v = const$, $\cos\varphi = const$, $f = f_n$.

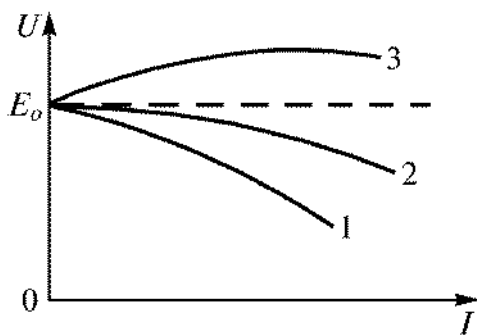


Рис. 12.4. Внешняя характеристика синхронного генератора

Если принять начальное напряжение $U = E_0$, то вид внешних характеристик будет соответствовать изображению на рис. 12.4. При активно-индуктивной нагрузке ($\cos\varphi < 1$) поток реакции якоря размагничивает машину, и напряжение уменьшается с увеличением тока нагрузки по кривой 1. При активной нагрузке ($\cos\varphi = 1,0$) поперечная реакция якоря также вызывает уменьшение напряжения (кривая 2). При активно-емкостной нагрузке продольная намагничивающая реакция увеличивает ЭДС E_0 , следовательно, и напряжение (кривая 3).

При активно-емкостной нагрузке продольная намагничивающая реакция увеличивает ЭДС E_0 , следовательно, и напряжение (кривая 3).

12.5. Параллельная работа синхронного генератора с сетью

Электрическая система большой мощности по отношению к генератору может быть представлена источником с неизменным напряжением.

Мощность генератора $P = 3UI \cos \varphi = 3E_o I \cos \psi$. Преобразованиями можно доказать, что мощность синхронного генератора $P = \frac{3E_o U \sin \Theta}{X_c}$.

Электромагнитный момент

$$M_{эм} = \frac{P}{\omega_p}, \text{ где } \omega_p = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi f}{p} \text{ или } M_{эм} = \frac{3p}{2\pi f} E_o U \frac{\sin \Theta}{X_c}. \quad (12.2)$$

Так как $U = const, f = const$, то мощность и электромагнитный момент генератора при постоянном токе возбуждения зависят только от угла Θ . При увеличении момента на валу первичного двигателя генератор отдает в сеть большую мощность. Предельным значением является момент и мощность при $\Theta = 90^\circ$, после чего генератор выпадает из синхронизма.

Следовательно, регулировать активную мощность генератора можно за счет первичного двигателя. Регулирование реактивной мощности генератора осуществляется изменением тока возбуждения. На рис. 12.5 показаны зависимости тока статора от тока возбуждения, называемые U -образными характеристиками. Минимум тока статора соответствует активной нагрузке ($\cos \varphi = 1,0$). Перевозбуждение генератора означает генерирование реактивной мощности, невозбуждение – емкостный режим нагрузки.

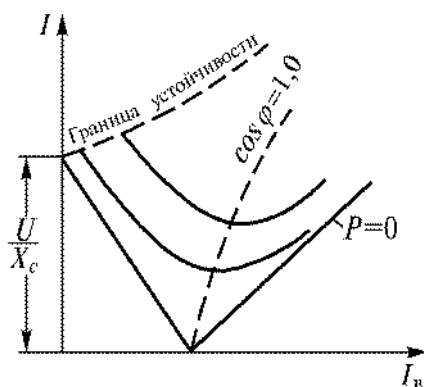


Рис. 12.5. U -образные характеристики синхронного генератора

Включение синхронного генератора на параллельную работу требует соблюдения следующих условий:

- напряжение включаемого генератора должно быть равно напряжению сети;
- частота генератора должна быть равной частоте сети;
- чередование фаз генератора и сети должно быть одинаковым;
- напряжения генератора и сети должны быть в фазе.

Для соблюдения этих условий применяют различные схемы синхронизации.

Пузарин Андрей Валерьевич;

Соболев Александр Васильевич,
кандидат технических наук

Основы электротехники и радиоэлектроники

Учебное пособие

Редактор *Валухова Т. А.*

Корректор *Чухутина Л. А.*

Компьютерная верстка *Бариновой Е. А.*

Оригинал-макет *Бариновой Е. А.*

Подписано в печать 09.06.2015 Формат 60×84 1/16 Тираж 60 экз.

Заказ № 549

Цена договорная

Объем 5,04 уч.-изд. л.
9,0 усл. печ. л.

Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя
117997, г. Москва, ул. Академика Волгина, д. 12