

Краснодарский университет МВД России

И.С. Нестеренко

Математические методы в психологии

Учебно-методическое пособие

Краснодар
2017

Оглавление

§1. Непараметрические критерии для связанных	
выборок.....	3
<u>1.1. Критерии знаков G.....</u>	<u>3</u>
<u>1.2. Парный критерий T – Вилкоксона.....</u>	<u>8</u>
<u>1.3. Критерий Фридмана.....</u>	<u>10</u>
<u>1.4. Критерий тенденций Пейджа.....</u>	<u>13</u>
<u>1.5. Критерий Макнамары.....</u>	<u>16</u>
§2. Непараметрические критерии для несвязных	
выборок.....	19
<u>2.1. Критерий U Манна-Уитни-Вилкоксона.....</u>	<u>19</u>
<u>2.2. Критерий Q – Розенбаума.....</u>	<u>24</u>
<u>2.3. H-критерий Крускала-Уоллиса.....</u>	<u>26</u>
<u>2.4. S – критерий тенденций Джонкира.....</u>	<u>29</u>
§3. Параметрические критерии различий.....	32
<u>3.1. Критерий Стьюдента для несвязных выборок.....</u>	<u>32</u>
<u>3.2. Критерий Стьюдента для связанных выборок.....</u>	<u>35</u>
Приложения.....	38
<u>Таблица I. Критические значения критерия знаков G.....</u>	<u>38</u>
<u>Таблица II. Критические значения критерия T</u>	
Вилконсона.....	39
<u>Таблица III. Критические значения критерия χ^2</u>	
Фридмана.....	40
<u>Таблица IV. Критические значения критерия χ^2</u>	
Фридмана.....	41
<u>Таблица V. Критические значения критерия χ^2.....</u>	<u>42</u>
<u>Таблица VI. Критические значения критерия тенденций</u>	
L Пейджа.....	43
<u>Таблица VII. Таблица вероятностей P</u>	
для биномиального.....	44
<u>Таблица VIII. Критические значения критерия U</u>	
Вилкоксона-Манна-Уитни.....	45
<u>Таблица IX. Критические значения критерия Q</u>	
Розенбаума.....	51

<u>Таблица X. Критические значения критерия Н</u>	
Крускала-Уоллиса.....	52
<u>Таблица XI. Критические значения критерия тенденций S</u>	
Джонкира.....	54
<u>Список литературы.....</u>	<u>55</u>

§1. Непараметрические критерии для связанных выборок

1.1. Критерий знаков G

Предназначение. Дает возможность установить, насколько однонаправленно изменяются значения признака при повторном измерении связанной, однородной выборки.

Условия применения

1. Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов и отношений.
2. Выборка должна быть однородной и связанной.
3. Число элементов в сравниваемых выборках должно быть равным.
4. G критерий знаков может применяться при величине типичного сдвига от 5 до 300 (на большую величину не рассчитана таблица достоверности).
5. При большом числе сравниваемых парных значений критерий знаков достаточно эффективен.
6. При равенстве типичных и нетипичных сдвигов критерий знаков неприменим, следует использовать другие критерии.
7. В данном критерии «ось значимости» перевернута. Иначе говоря нуль располагается на числовой оси не как обычно (слева направо), а справа и увеличение числового ряда происходит в противоположную сторону. Справа налево.
8. Для нахождения критических значений $G_{кр}$ необходимо воспользоваться Таблицей I Приложения.

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. Вычисление сдвига.
3. Подсчет нулевых положительных и отрицательных сдвигов.
4. Нахождение эмпирического значения $G_{эмп}$ по количеству нетипичного сдвига.
5. Нахождение критических значений $G_{кр}$ по количеству типичного сдвига.

6. Оценка статистической достоверности различий.
7. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 1.1.1. С помощью критерия знаков **G**, подтвердите гипотезу исследования.

Психолог проводит групповой тренинг. Его задача – выяснить будет ли эффективен данный конкретный вариант тренинга для снижения уровня тревожности участников.

1	2	3	4	5
№	Уровень тревожности «до» тренинга	Уровень тревожности «после» тренинга	Действия	Сдвиг
1	30	34	34-32	+4
2	39	39	39-39	0
3	35	26	26-35	-9
4	34	33	33-34	-1
5	40	34	34-40	-6
6	35	40	40-35	+5
7	22	25	25-22	+3
8	22	23	23-22	+1
9	32	33	33-32	+1
10	23	24	24-23	+1
11	16	15	15-16	-1
12	34	27	27-34	-7
13	33	35	35-33	+2
14	34	37	37-34	+3

Как видно из таблицы количество положительных сдвигов превышает количество отрицательных. Можно предположить, что данный вид тренинга только повысил тревожность у испытуемых. Для того, чтобы в этом убедиться необходимо провести статистическую проверку полученных результатов.

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 - статистически значимые различия в показателях уровня тревожности «до» и «после» проведения тренинга не были обнаружены, т.е. данный конкретный вариант тренинга никак не повлиял на снижение уровня тревожности испытуемых.

H_1 - статистически значимые различия в показателях уровня тревожности «до» и «после» проведения тренинга имели место быть, т.е. данный конкретный вариант тренинга повлиял на снижение уровня тревожности испытуемых.

2. Для нахождения сдвига необходимо вычислить разность между показателями тревожности «после» и «до», а не наоборот. Данные вычисления приведены выше в таблице 1 в столбце №4.

3. В столбце №5 подсчитываем нулевые, отрицательные и положительные сдвиги. $G_0 = 1, G_- = 5, G_+ = 8$.

4. Нахождение эмпирического значения $G_{эмп}$ происходит по количеству нетипичного сдвига. В нашем случае эмпирическое значение совпадает с количеством отрицательных сдвигов, т.е. $G_{эмп} = G_- = 5$.

5. Нахождение критических значений $G_{кр}$ осуществляется по количеству типичного сдвига. В нашем случае критическое значение совпадает с количеством положительных сдвигов, т.е. $G_{кр} = G_+ = 8$.

6. Оценка статистической достоверности различий осуществляется с помощью таблицы 1 Приложения. Буквой *n* обозначается количество типичных сдвигов, а в столбцах, обозначенных в соответствии с уровнями значимости $p = 0,05$ и $p = 0,01$, – критические значения. В нашем случае для $n=8$, мы получаем следующие величины

$$G_{кр} = \begin{cases} 1 & \text{для } P \leq 0,05 \\ 0 & \text{для } P \leq 0,01 \end{cases}$$

Данная запись означает, что при уровне значимости 5%, сумма нетипичных сдвигов не должна превышать 1, а при уровне значимости 1% - 0.

7. Как мы видим из полученных исследований $G_{кр} < G_{эмп}$, что свидетельствует о том, что мы должны принять гипотезу H_0 . В нашем случае $G_{эмп}$ попадает в зону незначимости, т.е. полученный в ходе эксперимента положительный сдвиг, свидетельствует об отсутствии статистически значимых различиях. Другими словами данный тренинг не привел к существенным изменениям в показателях тревожности испытуемых.

Задание 1.1.2. Рассмотрим случай, когда нетипичным сдвигом является количество положительных сдвигов и с помощью критерия знаков G попытаемся подтвердить гипотезу исследования.

В продолжении предыдущей задачи рассмотрим пример. Психолог, получив отрицательный результат, вносит коррективы в тренинг, увеличивая при этом выборку испытуемых до 19 человек. Он выдвигает гипотезу: улучшенный способ тренинга позволяет снижать уровень тревожности испытуемых.

1	2	3	4	5
№	Уровень тревожности «до» тренинга	Уровень тревожности «после» тренинга	Действия	Сдвиг
1	24	22	22-24	-2
2	12	12	12-12	0
3	40	23	23-40	-17
4	30	31	31-30	+1
5	40	32	32-40	-8
6	35	24	24-35	-11
7	40	40	40-40	0
8	32	12	12-32	-20
9	40	22	22-40	-18
10	24	21	21-24	-3
11	33	30	30-33	-3
12	38	26	26-38	-12
13	39	38	38-39	-1
14	25	23	23-25	-2
15	28	22	22-28	-6
16	36	22	22-36	-14
17	37	36	36-37	-1
18	32	38	38-32	+6
19	25	25	25-25	0

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

По аналогии с предыдущей задачей формулируем гипотезы и вычисляем сдвиги.

H_0 - статистически значимые различия в показателях уровня тревожности «до» и «после» проведения тренинга не были обна-

ружены, т.е. улучшенный способ тренинга никак не повлиял на снижение уровня тревожности испытуемых.

H_1 - статистически значимые различия в показателях уровня тревожности «до» и «после» проведения тренинга имели место быть, т.е. улучшенный способ тренинга повлиял на снижение уровня тревожности испытуемых.

В результате вычислений получаем следующие результаты $G_0 = 3, G_- = 14, G_+ = 2$.

Теперь мы видим, что эмпирическое значение совпадает с количеством положительных сдвигов, т.е. $G_{эмп} = G_+ = 2$.

Критическое значение совпадает с количеством отрицательных сдвигов, т.е. $G_{кр} = G_- = 14$.

Из таблицы 1 Приложения для $n=14$, мы получаем следующие критические величины

$$G_{кр} = \begin{cases} 3 & \text{для } P \leq 0,05 \\ 2 & \text{для } P \leq 0,01 \end{cases}$$

Данная запись означает, что при уровне значимости 5%, сумма нетипичных сдвигов не должна превышать 3, а при уровне значимости 1% - 2.

Как мы видим эмпирическое значение $G_{эмп}$ совпало с критическим значением зоны значимости $G_{кр}$ для 1%. Преобладание типичного отрицательного направления сдвига в данном случае не случайно, то, следовательно, на 1% уровне может быть принята гипотеза H_1 о наличии различий, а гипотеза H_0 о сходстве отклонена. Следовательно, психолог может утверждать, что полученный в результате эксперимента сдвиг уровня тревожности статистически значим на 1% уровне. Иными словами, гипотеза о снижении уровня тревожности испытуемых улучшенным способом тренинга подтвердилась.

В случае совпадения критического и эмпирического значений исследователь для большей четкости исследования может увеличить выборку, изменить условия эксперимента. Однако правило принимается гипотеза о наличии различий H_1 .

1.2. Парный критерий Т-Вилкоксона

Предназначение. Применяется для оценки различий экспериментальных данных, полученных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. Данный критерий позволяет выявить не только направленность изменений, но и их выраженность, т.е. он позволяет установить, насколько сдвиг показателей в каком-то одном направлении является более интенсивным, чем в другом.

Условия применения

1. Измерение может быть проведено во всех шкалах, кроме номинальной.
2. Выборка должна быть связной.
3. Число элементов в сравниваемых выборках должно быть равным.
4. Критерий Т-Вилкоксона может применяться при численности выборки от 5 до 50 (на большую величину не рассчитана таблица достоверности).
5. Ранжирование абсолютных величин означает, что знаки разностей не учитываются.
6. Величина нетипичного сдвига является эмпирическим значением.
7. Для нахождения $T_{\text{эмп}}$ необходимо подсчитать сумму рангов нетипичного сдвига.
8. Направление оси значимости имеет положение нуля справа, в отличие от традиционного – слева, и увеличение ряда идет в противоположную сторону.
9. Для нахождения критических значений $T_{\text{кр}}$ необходимо воспользоваться Таблицей II Приложения.

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. Вычисление сдвига.
3. Нахождение абсолютных величин сдвига.
4. Ранжирование абсолютных величин.
5. Подсчет суммы рангов абсолютных величин $\sum R$

6. Проверка правильности ранжирования по формуле $\sum R = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$
7. Нахождение нетипичного сдвига.
8. Вычисление эмпирического значения $T_{\text{эмп}}$.
9. Нахождение критических значений $T_{\text{кр}}$ (Таблица 2 Приложения).
10. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).
11. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 1.2. Используя парный критерий Т-Вилкоксона, решим задачу. Психолог проводит с младшими школьниками коррекционную работу по формированию навыков внимания. Задача состоит в том, чтобы определить, будет ли уменьшаться количество ошибок внимания у младших школьников после специальных коррекционных упражнений.

1	2	3	4	5	6	7
№	Уровень тревожности «до» тренинга	Уровень тревожности «после» тренинга	Сдвиг	Абсолютные величины	Ранги абсолютных величин	Символ нетипичного сдвига
1	24	22	-2	2	10,5	
2	12	12	0	0	2	
3	40	23	-17	17	6,5	
4	30	31	+1	1	6,5	*
5	40	32	-8	8	15	
6	35	24	-11	11	16	
7	40	40	0	0	2	
8	32	12	-20	20	18	
9	40	22	-18	18	17	
10	24	21	-3	3	6,5	
11	33	30	-3	3	6,5	*
12	38	26	-12	12	19	
13	39	38	-1	1	6,5	
14	25	23	-2	2	10,5	
15	28	22	-6	6	13,5	
16	36	22	-14	1	12	
17	37	36	-1	1	6,5	
18	32	38	+6	6	13,5	*
19	25	25	0	0	2	

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 - количество ошибок внимания у младших школьников после специальных коррекционных упражнений уменьшаться не будет, т.е. применение коррекционных упражнений не способствует повышению точности выполнения корректурной пробы.

H_1 - количество ошибок внимания у младших школьников после специальных коррекционных упражнений будет уменьшаться, т.е. применение коррекционных упражнений способствует повышению точности выполнения корректурной пробы.

2. Для нахождения сдвига необходимо вычислить разность между показателями «после» и «до» (столбцы №2, №3). В столбце №4 приведены результаты разности.

3. В 5-м столбце в соответствии с каждым значением сдвига ставим его абсолютную величину.

4. В 6-м столбце приведены ранги абсолютных величин сдвигов.

$$5. \sum R = 10,5 + 2 + \dots + 13,5 + 2 = 190$$

$$6. \frac{N \cdot (N+1)}{2} = 190$$

7. В 7-м столбце проставляем символ нетипичного сдвига. Таковых получилось 3.

$$8. T_{\text{эмп}} = 6,5 + 6,5 + 13,5 = 26,5$$

$$9. T_{\text{кр}} = \begin{cases} 53 & \text{для } P \leq 0,05 \\ 38 & \text{для } P \leq 0,01 \end{cases}$$

$$10. T_{\text{эмп}} < T_{\text{кр}}$$

11. Принимается гипотеза H_1 о том, что полученные изменения значимы и не случайны, т.е. применение коррекционных упражнений способствует повышению точности выполнения корректурной пробы.

1.3. Критерий Фридмана

Предназначение. Позволяет установить уровень статистической достоверности различий сразу в нескольких измерениях (от 3 до 100), но не дает возможности выявить направление изменений.

Условия применения

1. Измерение должно быть проведено в шкале интервалов или отношений.
2. Выборка должна быть связной.
3. В выборке должно быть не менее двух испытуемых, каждый из которых имеет не менее трех измеренных показателей. Верхний предел для количества испытуемых не определен, а количество измерений не может превышать 100 (см. Таблицу V Приложения).
4. В зависимости от числа измерений и количества испытуемых используются разные таблицы значимости.
5. Данный критерий позволяет сравнить между собой 3 и большее количество столбцов, что дает возможность ускорить процесс решения.
6. При общем количестве измерений равном 3 и числе испытуемых от 2 до 9 критические значения критерия Фридмана определяются по Таблице III Приложения.
7. При общем количестве измерений равном 4 и числе испытуемых от 2 до 4 критические значения критерия Фридмана определяются по таблице IV Приложения.
8. При большем количестве измерений и испытуемых критические значения критерия Фридмана определяются по Таблице V Приложения.

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. Построчное ранжирование.
3. Нахождение суммы рангов по столбцам.
4. Вычисление общей суммы рангов.
5. Проверка правильности ранжирования табличным способом $\sum R = \frac{n \cdot c \cdot (c+1)}{2}$

6. Вычисление эмпирического значения по формуле :

$$\chi^2_{\text{ФРэмп}} = \left[\frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \cdot \sum_{i=1}^c (R_i^2) \right] - 3 \cdot n + (c+1)$$

7. Нахождение критических значений $\chi^2_{\text{ФРкр}}$

8. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).

9. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 1.3. С помощью критерия Фридмана выявите наличие различий в измерениях за один раз.

Шести школьникам предлагают тест Равенна. Фиксируется время решения каждого задания. Выясняется вопрос – будут ли найдены статистически значимые различия между временем решения первых трех заданий теста.

№	Время решения первого задания теста в сек.	Время решения второго задания теста в сек.	Время решения третьего задания теста в сек.
1	8	3	5
2	4	15	12
3	6	23	5
4	3	6	6
5	7	12	3
6	15	24	12

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 - статистически значимые различия между временем решения первых трех заданий теста обнаружены не будут, т.е. задания были решены примерно в одно и то же время.

H_1 - статистически значимые различия между временем решения первых трех заданий теста будут обнаружены, т.е. время решения заданий отличается.

2. После ранжирования мы получаем следующую таблицу.

1	2	3	4	5	6	7
№	t_1	R_1	t_2	R_2	t_3	R_3
1	8	3	3	1	5	2
2	4	1	15	3	12	2
3	6	1	23	3	5	2
4	3	1	6	2,5	6	2,5
5	7	2	12	3	3	1
6	15	2	24	3	12	1
Сумма рангов		10		15,5		10,5

где t_1 – время решения первого задания теста в сек.;

t_2 – время решения второго задания теста в сек.;

t_3 – время решения третьего задания теста в сек.;

R_1, R_2, R_3 – соответствующие ранги времени решения первого, второго и третьего заданий теста.

3. Суммирование рангов по столбцам осуществляется в 3-м, 5-м, 7-м столбцах. Получаем соответственно следующие значения: 10; 15,5; 10,5

$$4. \sum R = 10 + 15,5 + 10,5 = 36$$

$$5. \sum R = \frac{n \cdot c \cdot (c+1)}{2}; 36 = 36$$

$$6. \chi^2_{\text{ФРЭмп}} = \left[\frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \cdot \sum (R_i^2) \right] - 3 \cdot n + (c + 1) = 3,08$$

7. Следует отметить, что таблицы критических значений в данном критерии специфичны и отличаются от стандартных таблиц. В таблице №3 необходимо выбирать близкие значения к уровню значимости $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$. Таковыми будут значения 0,052 и 0,012

$$\chi^2_{\text{кр}} = \begin{cases} 6,33 \text{ для } P \leq 0,052 \\ 8,33 \text{ для } P \leq 0,012 \end{cases}$$

8. $\chi^2_{\text{эмп}} < \chi^2_{\text{кр}}$. Эмпирическое значение попало в зону незначимости.

9. Принимается H_0 об отсутствии статистически значимых различий между временем решения первых трех заданий теста. Следовательно, задания были решены примерно в одно и то же время.

1.4. Критерий тенденций Пейджа

Предназначение. Позволяет не только выявить различия, но и указывает на направление в изменении величин признака.

Условия применения

1. Измерение может быть проведено в ранговой, интервальной и в шкале отношений.

2. Выборка должна быть связной.

3. В выборке должно быть не менее двух и не больше 12 испытуемых, каждый из которых имеет не менее трех измеренных показателей.

4. Применение критерия ограничено, так как таблицы критических значений рассчитаны на небольшую выборку ($n \leq 12$) и маленькое число измерений (не больше 6). Если эти ограничения не выполняются, приходится использовать критерий Фридмана.

5. Для нахождения критических значений $L_{кр}$ необходимо воспользоваться Таблицей VI Приложения.

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. Построчное ранжирование.
3. Суммирование рангов по столбцам.
4. Проверка правильности ранжирования табличным способом $\sum R = \frac{n \cdot c \cdot (c+1)}{2}$
5. Индексирование рангов по возрастанию, при этом наименьшему рангу присваивается индекс 1.
6. Вычисление эмпирического значения по формуле: $L_{эмп} = \sum (R_i \cdot i)$
7. Нахождение критических значений $L_{кр}$.
8. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).
9. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 1.4. Используя критерий тенденций Пейджа, определите направление в изменении величин признака.

Психолог высказывает предположение о наличии следующей тенденции: время решения второго и четвертого заданий теста будет возрастать по сравнению с первым и третьим заданиями.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
№	t_1	R_1	t_3	R_3	t_4	R_4	t_2	R_2
1	8	3	5	2	12	4	3	1
2	4	1	12	2	13	3	15	4
3	6	1	15	2	20	3	23	4
4	3	1	6	2,5	12	4	6	2,5
5	7	2	3	1	8	3	12	4
6	15	3	12	2	7	1	24	4
Σ		11		11,5		18		19,5
Индекс i		1		2		3		4

где t_1 – время решения первого задания теста в сек.;
 t_2 – время решения второго задания теста в сек.;
 t_3 – время решения третьего задания теста в сек.;
 t_4 – время решения четвертого задания теста в сек.;
 R_1, R_2, R_3, R_4 – соответствующие ранги времени решения первого, второго, третьего и четвертого заданий теста.

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 - увеличение времени решения второго и четвертого заданий теста по сравнению с первым и третьим заданиями будет незначимо и случайно.

H_1 – увеличение времени решения второго и четвертого заданий теста по сравнению с первым и третьим заданиями будет значимо и неслучайно

2. Построчное ранжирование отражено в таблице в 3-м, 5-м, 7-м, 9-м столбцах.

3. Получаем соответственно следующие значения: 11; 11,5; 18; 19,5

$$\sum R = 11 + 11,5 + 18 + 19,5 = 60$$

$$4. \sum R = \frac{n \cdot c \cdot (c+1)}{2}; 60 = 60$$

5. Наименьшему рангу соответствует $i=1$: для 11 $i=1$, для 11,5 $i=2$, для 18 $i=3$, для 19,5 $i=4$

$$6. = \sum (R_i \cdot i) = 11 \cdot 1 + 11,5 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 19,5 \cdot 4 = 166$$

$$7. L_{кр} = \begin{cases} 163 \text{ для } P \leq 0,05 \\ 167 \text{ для } P \leq 0,01 \\ 172 \text{ для } P \leq 0,001 \end{cases}$$

8. Эмпирическое значение попало в зону тенденций.

9. На 5% уровне значимости увеличение времени решения второго и четвертого заданий теста по сравнению с первым и третьим заданиями оказалось значимым, т.е. гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1 . Соответственно на 1% уровне значимости принимается гипотеза H_0 и отвергается гипотеза H_1 .

1.5. Критерий Макнамары

Предназначение. Предназначен для работы с данными, полученными в самой простой из номинальных - в дихотомической шкале.

Условия применения

1. Измерение должно быть проведено в дихотомической шкале.
2. Выборка должна быть связной.
3. При количестве измерений. $n \leq 20$ для определения величины $M_{\text{эмп}}$, используется таблица биномиального распределения, а величины $M_{\text{кр}}$ постоянны и равны 0,025 для 5% уровня значимости и 0,005 для 1 % уровня значимости.
4. При количестве измерений $n > 20$ $M_{\text{эмп}}$ вычисляется по формуле $M_{\text{эмп}} = \frac{(B-C)^2}{(B+C)}$
а величины $M_{\text{кр}}$ постоянны и равны 3,841 для 5% уровня значимости и 6,635 для 1 % уровня значимости.
5. В случае $B=C$ критерий Макнамары не применим.
6. Для нахождения критических значений $M_{\text{кр}}$ необходимо воспользоваться Таблицей VII Приложения.

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. При $B+C < 20$ находим величины m, n .
 - 2.1. $m = \min(B, C)$, m -наименьшая величина из величин B, C .
 - 2.2 $n = B + C$
3. Нахождение эмпирического значения $M_{\text{эмп}}$.
4. Критические значения постоянны
$$M_{\text{кр}} = \begin{cases} 0,025 & \text{для } p \leq 0.05 \\ 0,005 & \text{для } p \leq 0.01 \end{cases}$$
5. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).
6. Вывод и интерпретация результатов исследования

Задание 1.5.1. С помощью критерия Макнамары, решите задачу.

Экспериментатора интересует вопрос – является ли выбранный им способ профессиональной ориентации к профессии психолога достаточно эффективным. Для этого проводится исследование по выявлению эффективных форм профориентационной работы к профессии психолога среди учащихся старших классов. Отношение 20 учащихся к этой профессии выяснялось до и после проведения профориентационной работы.

Полученные результаты представлены в таблице.

		Второй опрос		Сумма
		Нравится	Не нравится	
Первый опрос	Нравится	A = 2	B = 2	4
	Не нравится	C = 11	D = 5	16
	Сумма	13	7	20

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 - способ профессиональной ориентации к профессии психолога является не эффективным.

H_1 - способ профессиональной ориентации к профессии психолога является эффективным.

2. $B+C=2+11<20$

3. $m=\min(B,C)=2$

4. $n=B+C = 2+11 = 13$

5. По таблице биномиального распределения Приложения находим $M_{эмп} = 0,011$

6. $M_{кр} = \begin{cases} 0,025 \text{ для } p \leq 0.05 \\ 0,005 \text{ для } p \leq 0.01 \end{cases}$

7. $M_{эмп}$ попало в зону неопределенности.

8. На 5% уровне значимости гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1 . о том, что выбранный способ профессиональной ориентации к профессии психолога является эффективным.

Задание 1.5.2. Психолог выясняет вопрос – будут ли обнаружены различия в успешности решения двух, различных по сложности мыслительных задач. Для решения этого вопроса группа из 120 учащихся решала оба типа задач. Полученные результаты представлены в таблице.

		Первая задача		Сумма
		Решена верно	Решена неверно	
Вторая задача	Решена верно	A = 50	B = 31	81
	Решена неверно	C = 19	D = 20	39
	Сумма	69	51	120

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 – статистически значимых различий в успешности решения двух, различных по сложности мыслительных задач выявлено не будет.

H_1 - статистически значимые различия в успешности решения двух, различных по сложности мыслительных задач будут выявлены.

2. $B+C=31+19>20$

3. $M_{эмп} = \frac{(B-C)^2}{(B+C)} = 2,88$

4. $M_{кр} = \begin{cases} 3,841 \text{ для } P \leq 0,05 \\ 6,635 \text{ для } P \leq 0,01 \end{cases}$

5. $M_{эмп} < M_{кр}$

6. $M_{эмп}$ попало в зону незначимости.

7. Принимается H_0 об отсутствии статистически значимых различий в успешности решения двух, различных по сложности мыслительных задач.

§2. Непараметрические критерии для несвязных выборок

2.1. Критерий U Манна-Уитни-Вилкоксона

Предназначение. Применяется для оценки различий по уровню выраженности какого-либо признака для двух независимых (несвязных) выборок.

Условия применения

1. Измерение должно быть проведено в шкале интервалов и отношений.

2. Выборки должны быть несвязанными.

3. Нижняя граница применимости критерия $n_1 \geq 3$ и $n_2 \geq 3$ или $n_1 = 2$, а $n_2 \geq 5$.

4. Верхняя граница применимости критерия: $n_1 = n_2 = 60$.

5. Выборки могут отличаться по числу входящих в них испытуемых.

6. Данный критерий удобен если число испытуемых не превышает величину 20.

7. Критерий основан на подсчете нарушений в расположении чисел (инверсий) в упорядоченном экспериментальном ряду по сравнению с «идеальным».

8. Любое нарушение «идеального ряда» называется инверсией.

9. Эмпирическое значение находится двумя способами:

1. $U_{\text{эмп}} = \min (U (x/y), U(y/x))$

2. $U_{\text{эмп}} = (n_1 + n_2) + n_x \cdot \frac{(n_x + 1)}{2} - R_{\text{max}}$

R_{max} – наибольшая сумма рангов;

n_x – количество испытуемых в группе с большей суммой рангов.

n_1 – количество испытуемых первой выборки

n_2 - количество испытуемых второй выборки

10. Ось значимости имеет направление справа налево, т.е. числовые значения по оси абсцисс по мере увеличения уровней значимости убывают.

11. Для нахождения критических значений $U_{кр}$ необходимо воспользоваться Таблицей VIII Приложения.

Замечание. Критерий U применяют и для связанных выборок, рассматривая их при этом как независимые. Последнее возможно, если связи внутри генеральной совокупности оказываются слабыми, а различия между двумя связными выборкам - сильными. В этом случае возможно получение значимых различий по критерию U , в то время как критерии, специально предназначенные для связанных выборок, могут и не обнаружить значимых различий.

1-й способ расчета критерия U (случай с различными рангами)

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. Обозначение элементов n_1 через X , n_2 через Y .
3. Составления идеального ряда.
4. Подсчет инверсий $X/Y, Y/X$.
5. Вычисление суммы инверсий $U(x/y), U(y/x)$.
6. Нахождение эмпирического значения $U_{эмп}$.
7. Нахождение критических значений $U_{кр}$.
8. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).
9. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 2.1.1. Две неравные по численности группы испытуемых решали техническую задачу. Показателем успешности служило время решения. Испытуемые меньшей по численности группы получали дополнительную мотивацию в виде денежного вознаграждения. Психолога интересует вопрос – влияет ли вознаграждение на успешность решения задачи? Психологом были получены следующие результаты времени решения технической задачи в секундах: в первой группе – с дополнительной мотивацией – 6, 25, 25, 30, 38, 39, 43, 44; во второй группе – без дополнительной мотивации – 8, 31, 32, 41, 41, 45, 46, 50, 55. Число испытуемых в первой группе обозначается как n_1 и равно 8, во второй – как n_2 и равно 9.

1	2	3	4
Группа с доп. мотивацией X	Группа без доп. мотивации Y	Инверсии X/Y	Инверсии Y/X
6		0	
	8		1
25		1	
25		1	
30		1	
	31		4
	32		4
38		3	
39		3	
	41		6
	41		6
43		5	
44		5	
	45		8
	46		8
	50		8
	55		8
\sum инверсий		19	53

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 – статистически значимые различия между вознаграждением и успешностью решения задач случайны и не отличаются от нуля.

H_1 - статистически значимые различия между вознаграждением и успешностью решения задач неслучайны и отличаются от нуля.

2. Элементы группы с дополнительной мотивацией обозначаем через X, элементы группы без дополнительной мотивацией обозначаем через Y.

3. Составим идеальный ряд в виде таблицы

x	y	x	x	x	y	y	x	x	y	y	x	x	y	y	y	y
6	8	25	25	30	31	32	38	39	41	41	43	44	45	46	50	55

4. Инверсии X/Y подсчитываются следующим образом: число 6 первого столбца не имеет перед собой никаких чисел

второго столбца, поэтому в третьем столбце напротив числа 6 ставим ноль; числа 25, 25 и 30 первого столбца (x) имеют перед собой только одно число второго столбца - 8 (y), т.е. имеют по одной инверсии, поэтому в столбце 3 для инверсий X/ Y каждому из чисел 25, 25 и 30 ставим в соответствие число 1. и т. д.

Инверсии Y/X подсчитываются точно так же как и инверсии X/Y. Поскольку число 8 (y) имеет перед собой одно число первого столбца - 6, то в столбце 4 с инверсиями для Y/X напротив числа 8 ставим число инверсий - 1; числа 31 и 32 второго столбца имеют перед собой четыре числа первого столбца: 6, 25, 25 и 30, следовательно числу 31 и числу 32 приписываем в столбце 4 величины инверсий равные 4, и так далее.

$$5. U(x/y) = 1+1+1+3+3+5+5=19$$

$$U(y/x)=1+4+4+6+6+8+8+8+8=53$$

$$6. U_{эмп} = \min (U (x/y), U(y/x))=19$$

$$7. U_{кр} = \begin{cases} 18 & \text{для } p \leq 0.05 \\ 11 & \text{для } p \leq 0.01 \end{cases}$$

$$8. U_{эмп} \text{ попало в зону незначимости. } U_{эмп} > U_{кр}$$

9. Принимается H_0 , т.е. вознаграждение ни коим образом не влияет на успешность выполнения задачи.

2-й способ расчета критерия U (случай с одинаковыми рангами)

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).

2. Представление упорядоченных данных в таблице.

3. Ранжирование элементов n_1, n_2 .

4. Вычисление суммы рангов R_x, R_y .

5. Нахождение общей суммы рангов $\sum R = R_x + R_y$

6. Проверка ранжирования $\sum R = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$.

7. Нахождение наибольшей суммы рангов R_{max}

8. Вычисление эмпирического значения $U_{эмп}$ по формуле .

$$U_{эмп} = (n_1 + n_2) + n_x \cdot \frac{(n_x + 1)}{2} - R_{max}$$

9. Нахождение критических значений $U_{кр}$.

10. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).

11. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 2.1.1. Психологом были получены следующие результаты времени решения технической задачи в секундах: в первой группе – с дополнительной мотивацией – 6, 25, 25, 30, 38, 41, 41, 44; во второй группе – без дополнительной мотивации – 8, 30, 32, 41, 41, 45, 46, 50, 55.

1	2	3	4
Группа с доп. мотивацией	Группа без доп. мотивации	Ранги X R_x	Ранги Y R_y
6	–	1	–
–	8	–	2
25	–	(3) 3,5	–
25	–	(4) 3,5	–
30	–	(5) 5,5	–
–	30	–	(6) 5,5
–	32	–	7
38	–	8	–
41	–	(9) 10,5	–
–	41	–	(10) 10,5
–	41	–	(11) 10,5
41	–	(2) 10,5	–
44	–	13	–
–	45	–	14
–	46	–	15
–	50	–	16
–	55	–	17
Σ инверсий		55,5	97,5

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 – статистически значимые различия между вознаграждением и успешностью решения задач случайны и не отличаются от нуля.

H_1 - статистически значимые различия между вознаграждением и успешностью решения задач неслучайны и отличаются от нуля.

Второй и третий шаг алгоритма отражены в таблице, поэтому перейдем к суммированию ранжирования.

$$2. \quad \sum R = R_x + R_y = 55,5 + 97,5 = 153$$

$$3. \quad \sum R = \frac{N \cdot (N+1)}{2} = 153$$

$$4. \quad R_{max} = 97,5$$

$$5. \quad U_{эмп} = (n_1 + n_2) + n_x \cdot \frac{(n_x+1)}{2} - R_{max} = 19,5$$

$$6. \quad U_{кр} = \begin{cases} 18 & \text{для } p \leq 0.05 \\ 11 & \text{для } p \leq 0.01 \end{cases}$$

$$7. \quad U_{эмп} \text{ попало в зону незначимости. } U_{эмп} > U_{кр}$$

8. Принимается H_0 , т.е. мотивация в виде вознаграждения не приводит к успешности выполнения задачи.

2.2. Критерий Q – Розенбаума

Предназначение. Основан на сравнении двух упорядоченных, но не обязательно равных по численности рядов наблюдений

Условия применения

1. Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов и отношений.

2. Выборки должны быть независимыми.

3. В каждой из выборок должно быть не меньше 11 испытуемых.

4. Приведенная в настоящем пособии таблица ограничивает верхний предел выборки 26 испытуемыми.

5. При числе наблюдений n_1 и $n_2 \geq 26$ можно пользоваться следующими величинами $Q_{кр} = \begin{cases} 8 & \text{для } p \leq 0.05 \\ 10 & \text{для } p \leq 0.01 \end{cases}$

6. Принципиальным условием, дающим возможность применять критерий, является наличие «хвостов», т.е. расположение данных в сравниваемых рядах по следующему типу:

6.1. xxxxxxxxxxxx|xxxxxxxxxxxxxxxxx|
|uuuuuuuuuuuuuu|uuuuuuuuuuuuuuuu

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 – статистически значимые различия в показателях интеллекта между учащимися городской и сельской школ случайны

H_1 - статистически значимые различия в показателях интеллекта между учащимися городской и сельской школ неслучайны.

2.

$T|96, 100, 104, 104, 120, 120, 120, 120|126, 130, 134$

$76, 82, 82, 84, 88, |96, 100, 102, 104, 110, 118, 120| S$

3. Левый хвост $T = 5$ (значения 76, 82, 82, 84, 88)

Правый хвост $S = 3$ (значения 126, 130, 134).

4. $Q_{эмп} = S + T = 5+3=8$

5. $Q_{кр} = \begin{cases} 6 & \text{для } p \leq 0.05 \\ 9 & \text{для } p \leq 0.01 \end{cases}$

6. $Q_{эмп}$ попало в зону неопределенности.

7. На 5% уровне значимости отклоняется гипотеза H_0 и принимается H_1 ., однако на 1% уровне значимости отклоняется H_1 и принимается H_0 , т.е. однозначной оценки в показателях интеллекта между учащимися городской и сельской школ дать нельзя, потребуются дополнительные исследования.

2.3. H-критерий Крускала-Уоллиса

Предназначение. Применяется для оценки различий по степени выраженности анализируемого признака одновременно между тремя, четырьмя и более выборками. Он позволяет выявить степень изменения признака в выборках, не указывая, однако, на направление этих изменений

Условия применения

1. Измерение должно быть проведено в шкале порядка, интервалов или отношений.

2. Выборки должны быть независимыми.

3. Допускается разное число испытуемых в сопоставляемых выборках.

4. При сопоставлении трех выборок допускается, чтобы в одной из них было $n = 3$, а в двух других $n = 2$. Однако в таком случае различия могут быть зафиксированы лишь на 5% уровне значимости.

5. При большем числе выборок и разном количестве испытуемых в каждой выборке следует пользоваться таблицей Приложения для критерия хи-квадрат. В этом случае число степеней свободы при этом определяется по формуле: $v = c - 1$, где c количество сопоставляемых выборок.

$$6. H_{\text{эмп}} = \frac{12}{N \cdot (N+1)} + \sum \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N + 1) .$$

7. Для нахождения критических значений $H_{\text{кр}}$ необходимо воспользоваться Таблицей X Приложения.

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. Составления идеального ряда
3. Ранжирование всех значений.
4. Вычисление суммы рангов отдельно для каждой группы.
5. Нахождение общей суммы рангов $\sum R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$
6. Проверка ранжирования табличным способом $\sum R = \frac{n \cdot c \cdot (c+1)}{2}$.
7. Вычисление эмпирического значения $H_{\text{эмп}}$ по формуле:
$$H_{\text{эмп}} = \frac{12}{N \cdot (N+1)} + \sum \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N + 1) .$$
8. Нахождение критических значений $H_{\text{кр}}$.
9. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).
10. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 2.3.1. Четыре группы испытуемых выполняли тест Бурдона в разных экспериментальных условиях. Задача в том, чтобы установить – зависит ли эффективность выполнения теста от условий или, иными словами, существует ли различия в успешности выполнения теста между группами. В каждую группу входило четыре испытуемых.

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 – статистически значимые различия в успешности выполнения теста Бурдона между группами случайны и не отличаются от нуля.

H_1 - статистически значимые различия в успешности выполнения теста Бурдона между группами неслучайны и отличаются от нуля.

2. Представим значения 4-х групп в виде «идеального» ряда, проранжируем их и представим данные рангов в таблице вместе с соответствующими значениями (объединим 2-е и 3-е действие алгоритма). Затем суммируем ранги по столбцам для каждой группы (4-е действие алгоритма).

$$3. \sum R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 35 + 31 + 42 + 28 = 136$$

$$4. \sum R = \frac{n \cdot c \cdot (c+1)}{2} = 136$$

$$5. H_{\text{эмп}} = \frac{12}{N \cdot (N+1)} + \sum \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N + 1) = 1,21$$

№	1 группа	Ранг	2 группа	Ранг	3 группа	Ранг	4 группа	Ранг
1	23	6	45	16	34	12	21	4
2	20	3	12	2	24	7	22	5
3	34	12	34	12	25	8	26	9
4	35	14	11	1	40	15	27	10
Σ	112	35	102	31	123	42	96	28

$$6. H_{\text{кр}} = \begin{cases} 7,815 & \text{для } p \leq 0.05 \\ 11,345 & \text{для } p \leq 0.01 \end{cases}$$

$$7. H_{\text{эмп}} < H_{\text{кр}}$$

8. Принимается H_0 об отсутствии статистически значимых различий в успешности выполнения теста Бурдона между группами, т.е. различные условия проведения теста Бурдона не влияют на показатели переключаемости внимания.

2.4. S – критерий тенденций Джонкира

Предназначение. Ориентирован на выявление тенденций изменения измеряемого признака при сопоставлении от трех и до шести выборок.

Условия применения

1. Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов и отношений.
2. Выборки должны быть независимыми.
3. Количество элементов в каждой выборке должно быть одинаковым. Если это не так, то необходимо случайным образом уравнивать выборки.
4. Количество выборок от 3 до 6, количество испытуемых не менее не более 10

$$5. S_{\text{эмп}} = 2 \cdot A - B., \text{ где } B = \frac{c \cdot (c-1)}{2} \cdot n$$

n – количество элементов в столбце, c – количество столбцов.

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. Вычисление суммы отдельно для каждой группы.
3. Упорядочивание данных таблице в соответствии с возрастанием суммы.
4. Упорядочивание данных внутри каждого столбца.
5. Нахождение инверсии.
6. Вычисление суммы инверсии по каждому столбцу.
7. Подсчет общей суммы инверсии A .
8. Вычисление величины $B, B = \frac{c \cdot (c-1)}{2} \cdot n$
9. Вычисление эмпирического значения $S_{\text{эмп}}$ по формуле:
 $S_{\text{эмп}} = 2 \cdot A - B.$
10. Нахождение критических значений $S_{\text{кр}}$.
11. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).
12. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 2.4. Необходимо установить: наблюдается ли тенденция к увеличению ошибок при выполнении теста Бурдона разными испытуемыми в зависимости от условий его выполнения.

№	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
1	23	45	34	21
2	20	12	24	22
3	34	34	25	26
4	35	11	40	27
Σ	112	102	123	96

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы к данной задаче.

H_0 – тенденция к увеличению числа ошибок в тесте Бурдона в зависимости от условий его выполнения не выявлена.

H_1 - тенденция к увеличению числа ошибок в тесте Бурдона в зависимости от условий его выполнения выявлена.

2. В этой таблице необходимо переструктурировать и упорядочить значения в соответствии с возрастанием сумм исходных данных.

№	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
1	21	45	23	34
2	22	12	20	24
3	26	34	34	25
4	27	11	35	40
Σ	96	102	112	123

Следующий этап связан с подсчетом инверсий, при этом необходимо произвести упорядочивание величин от наименьшего к наибольшему, но уже внутри каждой группы сверху вниз.

	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
	21 (9)	11 (8)	20 (4)	24
	22 (9)	12 (8)	23 (4)	25
	26 (6)	34 (2)	34 (1)	34
	27 (6)	42 (0)	35 (1)	40
Σ инверсий	(30)	(18)	(10)	–

Номер испытуемых отсутствует из-за смешивания данных в каждой из групп. Для нахождения инверсий число 21 сравнивается со всеми числами остальных столбцов, кроме своего столбца.

Так число 21 меньше девяти значений в во втором третьем и четвертом столбцах и так далее.

$$A = 30+18+10=58$$

$$B = \frac{c \cdot (c-1)}{2} \cdot n = 96$$

$$S_{\text{эмп}} = 2 \cdot A - B = 2 \cdot 58 - 96 = 20$$

$$S_{\text{кр}} = \begin{cases} 38 & \text{для } p \leq 0.05 \\ 50 & \text{для } p \leq 0.01 \end{cases}$$

$S_{\text{эмп}} < S_{\text{кр}}$ эмпирическое значение попало в зону незначимости

Принимается H_0 о том, что тенденция к увеличению числа ошибок в тесте Бурдона в зависимости от условий его выполнения не выявлена.

§3. Параметрические критерии различий.

3.1. Критерий Стьюдента для несвязных выборок.

Предназначение. Направлен на оценку различий величин средних X и Y двух выборок X и Y , которые распределены по нормальному закону. Одним из главных достоинств критерия является широта его применения. Он может быть использован для сопоставления средних у связанных и несвязных выборок, причем выборки могут быть не равны по величине.

Условия применения

1. Измерение может быть проведено в шкале интервалов и отношений.

2. Сравниваемые выборки должны быть распределены по нормальному закону.

3. В случае несвязных выборок, для нахождения эмпирического значения используется формула $t_{\text{эмп}} = \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{Sd} \right|$ где $Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$

при разном количестве испытуемых в выборках для нахождения стандартного отклонения используется формула

$$Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \cdot \frac{(n_1 + n_2)}{(n_1 \cdot n_2)}}$$

при равном количестве испытуемых в выборках для нахождения стандартного отклонения используется формула

$$Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n - 1) \cdot n}}$$

\bar{X}, \bar{Y} - средние значения, Sd – стандартное отклонение

В обоих случаях число степеней свободы $k = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).

2. Вычисление средних значений переменных \bar{X}, \bar{Y} .
3. Вычисление модуля разности $|\bar{X} - \bar{Y}|$
4. Нахождение общего стандартного отклонения Sd
 - 4.1. Нахождение отклонений от средних значений $x_i - \bar{x}, y_i - \bar{y}$
 - 4.2. Вычисление суммы отклонений от средних $\sum(x_i - \bar{x}), \sum(y_i - \bar{y})$
 - 4.3. Вычисление квадрата отклонений $(x_i - \bar{x})^2, (y_i - \bar{y})^2$
 - 4.4. Вычисление суммы квадратов отклонений $\sum(x_i - \bar{x})^2, \sum(y_i - \bar{y})^2$
 - 4.5. Вычисление общего стандартного отклонения

$$Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

$$Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \cdot \frac{(n_1 + n_2)}{(n_1 \cdot n_2)}}$$

5. Вычисление эмпирической значения $t_{\text{эмп}}$ по формуле: $t_{\text{эмп}} = \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{Sd} \right|$
6. Нахождение числа степеней свободы $k = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$
7. Нахождение критических значений $t_{\text{кр}}$.
8. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).
9. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 3.1.1. Используя t-критерий Стьюдента для **несвязных выборок** решите задачу.

Психолог измерял время сложной сенсомоторной реакции выбора (в мс) в контрольной и экспериментальной группах. В экспериментальную группу (X) входили 9 спортсменов высокой квалификации. Контрольной группой (Y) являлись 8 человек, активно не занимающиеся спортом. Психолог проверяет гипотезу о том, что средняя скорость сложной сенсомоторной реакции выбора у спортсменов выше, чем эта же величина у людей, не занимающихся спортом.

№	Группы		Отклонения от среднего		Квадраты отклонений	
	X	Y	$\sum(x_i - X)$	$\sum(y_i - Y)$	$\sum(x_i - X)^2$	$\sum(y_i - Y)^2$
1	504	580	-22	-58	484	3364
2	560	692	34	54	1156	2916
3	420	700	-106	62	11236	3844
4	600	621	74	-17	5476	289
5	580	640	54	2	2916	4
6	530	561	4	-77	16	5929
7	490	680	-36	42	1296	1764
8	580	630	54	-8	2916	64
9	470	-	-56	-	3136	-
Сумма	4734	5104	0	0	28632	18174
Среднее	526	638	-	-	-	-

Воспользуемся предложенным алгоритмом для данной задачи.

1. Сформулируем гипотезы исследования.

H_0 – статистически значимые различия между временем сложной сенсомоторной реакции выбора (в мс) в контрольной и экспериментальной группах случайны и не отличаются от нуля.

H_1 - статистически значимые различия между временем сложной сенсомоторной реакции выбора (в мс) в контрольной и экспериментальной группах неслучайны и отличаются от нуля.

2. $\bar{X} = 526, \bar{Y} = 638.$

3. $|\bar{X} - \bar{Y}| = 112$

4. $Sd = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \cdot \frac{(n_1 + n_2)}{(n_1 \cdot n_2)}} = 27,14$

5. $t_{эмп} = \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{Sd} \right| = 4,1$

6. $k = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2 = 15$

7. $t_{кр} = \begin{cases} 2,13 \text{ для } P \leq 0,05 \\ 2,95 \text{ для } P \leq 0,01 \end{cases}$

8. $t_{эмп} > t_{кр}$ эмпирическое значение попало в зону значи-

мости.

9. Принимается H_1 , о статистически значимых различиях между временем сложной сенсомоторной реакции выбора (в мс) в контрольной и экспериментальной группах. Другими словами

средняя скорость сложной сенсомоторной реакции выбора в группе спортсменов существенно выше, чем в группе людей активно не занимающихся спортом.

3.2. Критерий Стьюдента для связанных выборок

Условия применения

1. Измерение может быть проведено в шкале интервалов и отношений.

2. Сравниваемые выборки должны быть распределены по нормальному закону.

3. В случае связанных выборок при равном количестве испытуемых в выборках для нахождения эмпирического значения используется формула

$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{d}}{Sd}$, где $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (x_i - y_i)}{n}$; \bar{d} – среднее значение разности переменных $x_i - y_i$

Для нахождения стандартного отклонения используется формула

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n - 1)}}$$

Число степеней свободы $k = 2 \cdot n - 2$

Алгоритм действий

1. Выдвижение нулевой и альтернативной гипотез (H_0, H_1).
2. Вычисление разности d
3. Вычисление суммы разности $\sum d_i$
4. Вычисление квадрата разности d^2
5. Вычисление суммы квадратов разности $\sum d^2$
6. Вычисление средних значений разности $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (x_i - y_i)}{n}$
7. Вычисление стандартного отклонения по формуле:

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n - 1)}}$$

8. Вычисление эмпирической значения $t_{\text{эмп}}$ по формуле: $t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{d}}{sd}$
9. Нахождение критических значений $t_{\text{кр}}$.
10. Оценка статистической достоверности различий (построение оси значимости).
11. Вывод и интерпретация результатов исследования.

Задание 3.2.1. Психолог предложил, что в результате решения эквивалентных задач «игры в 5» (т.е. имеющих один и тот же алгоритм решения) будет значимо уменьшаться. Для проверки гипотезы у восьми испытуемых сравнивалось время решения (в минутах) первой и третьей задач.

1	2	3	4	5
№	1 задача	3 задача	d	d ²
1	4,0	3,0	1,0	1,0
2	3,5	3,0	0,5	0,25
3	4,1	3,8	0,3	0,09
4	5,5	2,1	3,4	11,56
5	4,6	4,9	-0,3	0,09
6	6,0	5,3	0,7	0,49
7	5,1	3,1	2,0	4,0
8	4,3	2,7	1,6	2,56
Σ	37,1	27,9	9,2	20,04

1. Сформулируем гипотезы к данной задаче.
 H_0 – статистически значимые различия между временем решения эквивалентных задач случайны и не отличаются от нуля.
 H_1 – статистически значимые различия между временем решения эквивалентных задач неслучайны и отличаются от нуля.
2. Данные по 2-5 действиям алгоритма приведены в таблице.
3. $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (x_i - y_i)}{n} = 1,15$

$$4. Sd = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}} = 0,41$$

$$5. t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{d}}{sd} = 2,80$$

$$6. t_{\text{кр}} = \begin{cases} 2,37 \text{ для } P \leq 0,05 \\ 3,50 \text{ для } P \leq 0,01 \end{cases}$$

7. $t_{\text{эмп}}$ попало в зону тенденций или неопределенности

8. На 5% уровне значимости отклоняется гипотеза H_0 и принимается H_1 ., однако на 1% уровне значимости отклоняется H_1 и принимается H_0 , т.е. среднее время решения третьей задачи существенно меньше среднего времени решения первой задачи.

Критические значения критерия знаков G для уровней статистической значимости $p \leq$

<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	-	27	8	7	49	18	15	92	37	34
6	0	0	28	8	7	50	18	16	94	38	35
7	0	0	29	9	7	52	19	17	96	39	36
8	1	0	30	10	8	54	20	18	98	40	37
9	1	0	31	10	8	56	21	18	100	41	37
10	1	0	32	10	8	58	22	19	110	45	42
11	2	1	33	11	9	60	23	20	120	50	46
12	2	1	34	11	9	62	23	21	130	55	51
13	3	1	35	12	10	64	24	22	140	59	55
14	3	2	36	12	10	66	25	23	150	64	60
15	3	2	37	13	16	68	26	23	160	69	64
16	4	2	38	13	11	70	27	24	170	73	69
17	4	3	39	13	11	72	28	25	180	78	73
18	5	3	40	14	12	74	29	26	190	83	78
19	5	4	41	14	12	76	30	27	200	87	83
20	5	4	42	15	13	78	31	28	220	97	92
21	6	4	43	15	13	80	32	29	240	106	101
22	6	5	44	16	13	82	33	30	260	116	110
23	7	5	45	16	14	84	33	30	280	125	120
24	7	5	46	16	14	86	34	31	300	135	129
25	7	6	47	17	15	88	35	32			
26	8	6	48	17	15	90	36	33			

0,05 и $p \leq 0,01$

Таблица II

**Критические значения критерия Т-Вилкоксона для уровней
статистической значимости $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$**

<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	-	28	130	101
6	2	-	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	92	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

Таблица III

Критические значения критерия χ^2 Фридмана для количества условий $c=3$ и количества испытуемых от двух до девяти ($2 \leq n \leq 9$)

$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$	
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
0	1,000	0,000	1,000	0,0	1,000	0,0	1,000
1	0,833	0,667	0,944	0,5	0,931	0,4	0,954
3	0,500	2,000	0,528	1,5	0,653	1,2	0,691
4	0,167	2,667	0,361	2,0	0,431	1,6	0,522
		4,667	0,194	3,5	0,273	2,8	0,367
		6,000	0,028	4,5	0,125	3,6	0,182
				6,0	0,069	4,8	0,124
				6,5	0,042	5,2	0,093
				8,0	0,0046	6,4	0,024
						7,6	0,0085
						8,4	0,00077
						10,0	
$n=6$		$n=7$		$n=8$		$n=9$	
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
0,00	1,000	0,000	1,000	0,00	1,000	0,000	1,000
0,33	0,956	0,286	0,964	0,25	0,967	0,222	0,971
1,00	0,740	0,857	0,768	0,75	0,794	0,667	0,814
1,33	0,570	1,143	0,620	1,00	0,654	0,889	0,865
2,33	0,430	2,000	0,486	1,75	0,531	1,556	0,569
3,00	0,252	2,571	0,305	2,25	0,355	2,000	0,398
4,00	0,184	3,429	0,237	3,00	0,285	2,667	0,328
4,33	0,142	3,714	0,192	3,25	0,236	2,889	0,278
5,33	0,072	4,571	0,112	4,00	0,149	3,556	0,187
6,33	0,052	5,429	0,085	4,75	0,120	4,222	0,154
7,00	0,029	6,000	0,052	5,25	0,079	4,667	0,107
8,33	0,012	7,143	0,027	6,25	0,047	5,556	0,069
9,00	0,0081	7,714	0,021	6,75	0,038	6,000	0,057
9,33	0,0055	8,000	0,016	7,00	0,030	6,222	0,048
10,33	0,0017	8,857	0,0084	7,75	0,018	6,889	0,031
12,00	0,00013	10,286	0,0036	9,00	0,0099	8,000	0,019
		10,571	0,0027	9,25	0,0080	8,222	0,016
		11,143	0,0012	9,75	0,0048	8,667	0,010
		12,286	0,0003	10,75	0,0024	9,556	0,0060
		14,000	0,000021	12,00	0,0011	10,667	0,0035
				12,25	0,00086	10,889	0,0029
				13,00	0,00026	11,556	0,0013
				14,25	0,000061	12,667	0,00066
				16,00	0,0000036	13,556	0,00035
						14,000	0,00020
						14,222	0,000097
						14,889	0,000054
						16,222	0,0000011
						18,000	0,0000006

**Критические значения критерия χ^2 Фридмана
для количества условий $c=4$, $2 \leq n \leq 4$**

<i>n=2</i>		<i>n=3</i>		<i>n=4</i>			
X^2	<i>p</i>	X^2	<i>p</i>	X^2	<i>p</i>	X^2	<i>p</i>
0,0	1,000	0,0	1,000	0,0	1,000	5,7	0,141
0,6	0,958	0,6	0,958	0,3	0,992	6,0	0,105
1,2	0,834	1,0	0,910	0,6	0,928	6,3	0,094
1,8	0,792	1,8	0,727	0,9	0,900	6,6	0,077
2,4	0,625	2,2	0,608	1,2	0,800	6,9	0,068
3,0	0,542	2,6	0,524	1,5	0,75	7,2	0,054
3,6	0,458	3,4	0,446	1,8	0,677	7,5	0,052
4,2	0,375	3,8	0,342	2,1	0,649	7,8	0,036
4,8	0,208	4,2	0,300	2,4	0,524	8,1	0,019
5,4	0,167	5,0	0,207	2,7	0,508	8,4	0,014
6,0	0,042	5,4	0,175	3,0	0,432	8,7	0,012
		5,8	0,148	3,3	0,389	9,3	0,0069
		6,6	0,075	3,6	0,355	9,6	0,0062
		7,0	0,054	3,9	0,324	9,9	0,0027
		7,4	0,033	4,5	0,242	10,2	0,0016
		8,2	0,017	4,8	0,200	10,8	0,00094
		9,0	0,0017	5,1	0,190	11,1	0,000072
				5,4	0,158	12,0	

Таблица V

Критические значения критерия χ^2 для уровней статистической значимости $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$ при разном числе степеней свободы v (применим для критерия Фридмана)

<i>p</i>			<i>P</i>			<i>P</i>		
<i>V</i>	0,05	0,01	<i>V</i>	0,05	0,01	<i>V</i>	0,05	0,01
1	3,841	6,635	35	49,802	57,342	69	89,391	99,227
2	5,991	9,21	36	50,998	58,619	70	90,631	100,425
3	7,815	11,345	37	52,192	59,892	71	91,67	101,621
4	9,488	13,277	38	53,384	61,162	72	92,808	102,816
5	11,07	15,086	39	54,572	62,428	73	93,945	104,01
6	12,592	16,812	40	55,758	63,691	74	95,081	105,202
7	14,067	18,475	41	56,942	64,95	75	96,217	106,393
8	15,507	20,09	42	58,124	66,206	76	97,351	107,582
9	16,919	21,666	43	59,304	67,459	77	98,484	108,771
10	18,307	23,209	44	60,481	68,709	78	99,617	109,958
11	19,675	24,725	45	61,656	69,957	79	100,749	111,144
12	21,026	26,217	46	62,83	71,201	80	101,879	112,329
13	22,362	27,688	47	64,001	72,443	81	103,01	113,512
14	23,685	29,141	48	65,171	73,683	82	104,139	114,695
15	24,996	30,578	49	66,339	74,919	83	105,267	115,876
16	26,296	32	50	67,505	76,154	84	106,395	117,057
17	27,587	33,409	51	68,669	77,386	85	107,522	118,236
18	28,869	34,805	52	69,832	78,616	86	108,648	119,414
19	30,144	36,191	53	70,993	79,843	87	109,773	120,591
20	31,41	37,566	54	72,153	81,069	88	110,898	121,767
21	32,671	38,932	55	73,311	82,292	89	112,022	122,942
22	33,924	40,289	56	74,468	83,513	90	113,145	124,116
23	35,172	41,638	57	75,624	84,733	91	114,268	125,289
24	36,415	42,98	58	76,778	85,95	92	115,39	126,462
25	37,652	44,314	59	77,931	87,166	93	116,511	127,633
26	38,885	45,642	60	79,082	88,379	94	117,632	128,803
27	40,113	46,963	61	80,232	89,591	95	118,752	129,973
28	41,337	48,278	62	81,381	90,802	96	119,871	131,141
29	42,557	49,588	63	82,529	92,01	97	120,99	132,309
30	43,773	50,892	64	83,675	93,217	98	122,108	133,476
31	44,985	52,191	65	84,821	94,422	99	123,225	134,642
32	46,194	53,486	66	85,965	95,626	100	124,342	135,807
33	47,4	54,776	67	87,108	96,828			
34	48,602	56,061	68	88,25	98,028			

Таблица VI

Критические значения критерия тенденций L Пейджа для количества условий от трех до шести ($3 \leq c \leq 6$) и количества испытуемых от двух до двенадцати ($2 \leq n \leq 12$)

<i>N</i>	<i>c</i> (количество условий)				
	<i>2</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>p</i>
2	-	-	109	178	0,001
	-	60	106	173	0,01
	28	58	103	166	0,05
3	-	89	160	260	0,001
	42	87	155	252	0,01
	41	84	150	244	0,05
4	56	117	210	341	0,001
	55	114	204	331	0,01
	54	111	197	321	0,05
5	70	145	259	420	0,001
	68	141	251	409	0,01
	66	137	244	397	0,05
6	83	172	307	499	0,001
	81	167	299	486	0,01
	79	163	291	474	0,05
7	96	198	355	577	0,001
	93	193	346	563	0,01
	91	189	338	550	0,05
8	109	225	403	655	0,001
	106	220	393	640	0,01
	104	214	384	625	0,05
9	121	252	451	733	0,001
	119	246	441	717	0,01
	116	240	431	701	0,05
10	134	278	499	811	0,001
	131	272	487	793	0,01
	128	266	477	777	0,05
11	147	305	546	888	0,001
	144	298	534	869	0,01
	141	292	523	852	0,05
12	160	331	593	965	0,001
	156	324	581	946	0,01
	153	317	570	928	0,05

Таблица VII

Таблица вероятностей Р для биномиального распределения
при $p = q = 0,5^*$ (применим для критерия Макномары)

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	031	188	500	812	969	***										
6	016	109	344	656	891	984	+									
7	008	062	226	500	773	938	992	+								
8	004	035	145	363	637	855	965	996	+							
9	002	020	090	254	500	746	910	980	998	+						
10	001	011	055	172	377	623	828	945	989	998	+					
11		006	033	113	274	500	726	887	967	994	+	+				
12		002	019	073	194	387	613	806	927	981	997	+	+			
13		001	011	046	133	291	500	709	867	954	989	998	+	+		
14			006	029	090	212	395	605	788	910	971	994	999	+	+	+
15			004	018	059	151	304	500	696	849	941	982	996	+	+	+
16			002	011	038	105	227	402	598	773	896	962	989	998	+	+

* Знаком + в таблице обозначены значения близкие к 1.

** В таблице все величины даны без начального нуля и последующий запятой, так что, если в таблице дано число, например 013, - то это число следует читать как 0,013

T ₂	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17			001	006	025	072	166	315	500	685	834	928	975	994	999	+
18			001	004	015	048	119	240	407	593	760	881	952	985	996	999
19				002	010	032	084	180	324	500	676	820	916	968	990	998
20				001	006	021	058	132	252	412	588	748	868	942	979	994
21				001	004	013	039	095	192	332	500	668	808	905	961	987
22					002	008	026	067	143	262	416	584	738	857	933	974
23					001	005	017	047	105	202	339	500	661	798	895	953
24					001	003	011	032	076	154	271	419	581	729	846	924
25						002	007	022	054	115	212	345	500	655	788	885

Таблица VIII

**Критические значения критерия U Вилкоксона-Манна-Уитни
для уровня статистической значимости $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$**

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	$p=0,05$																		
3	-	0																	
4	-	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
	$p = 0,01$																		
5	-	-	0	1															
6	-	-	1	2	3														
7	-	0	1	3	4	6													
8	-	0	2	4	6	7	9												
9	-	1	3	5	7	9	11	14											
10	-	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
0	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

Продолжение таблицы VIII

$p = 0,05$

n1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146	154
22	20	28	36	44	52	60	69	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179
25	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	113	123	133	143	154	164	174	185	195
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
31	29	41	52	64	76	88	100	112	124	137	149	161	174	186	199	211	224	236
32	30	42	54	66	78	91	103	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245
33	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247	261
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	241	255	269
36	35	48	61	75	89	103	117	132	146	160	175	189	204	219	233	248	263	278
37	36	49	63	77	92	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271	286
38	37	51	65	79	94	109	124	139	155	170	185	201	216	232	247	263	278	294
39	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286	302
40	39	53	69	84	100	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294	311

$p = 0,01$

21	10	16	22	29	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	113	120	127
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	78	86	94	102	109	117	125	133	141
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	82	90	98	107	115	123	132	140	149
25	12	20	27	35	44	52	60	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156
26	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	106	117	127	138	149	160	171	182	192
31	16	26	36	46	56	67	77	88	99	110	121	132	143	155	166	177	188	200
32	17	27	37	47	58	69	80	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207
33	17	28	38	49	60	72	83	95	106	118		142	154	166	178	190	202	214
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229
36	19	31	42	54	67	79	92	104	117	130	143	156	170	183	196	210	223	236
37	20	32	44	56	69	81	95	108	121	134	148	161	175	189	202	216	230	244
38	21	33	45	58	71	84	97	111	125	138	152	166	180	194	208	223	237	251
39	21	34	46	59	73	86	100	114	128	142	157	171	185	200	214	229	244	258
40	22	35	48	61	75	89	103	117	132	146	161	176	191	206	221	236	251	266

n ₁	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n ₂	<i>p = 0,05</i>																		
21																			
22	171																		
23	180	189																	
24	188	198	207																
25	197	207	217	227															
26	206	216	226	237	247														
27	214	225	236	247	258	268													
28	223	234	245	257	268	279	291												
29	232	243	255	267	278	290	302	314											
30	240	252	265	277	289	301	313	326	338										
31	249	261	274	287	299	312	325	337	350	363									
32	258	271	284	297	310	323	336	349	362	375	389								
33	266	280	293	307	320	334	347	361	374	388	402	415							
34	275	289	303	317	331	345	359	373	387	401	415	429	113						
35	284	298	312	327	341	356	370	385	399	413	428	442	457	471					
36	292	307	322	337	352	367	381	396	411	426	441	456	471	486	501				
37	301	316	332	347	362	378	393	408	424	439	454	470	485	501	516	531			
38	310	325	341	357	373	388	404	420	436	452	467	483	499	515	531	547	563		
39	318	335	351	367	383	399	416	432	448	464	481	497	513	530	546	562	579	595	
40	327	344	360	377	394	410	427	444	460	477	494	511	527	544	561	578	594	611	628
	<i>p = 0,01</i>																		
21																			
22	142																		
23	150	158																	
24	154	166	174																
25	165	174	183	192															
26	173	182	191	201	210														
27	180	190	200	209	219	229													
28	188	19	208	218	229	239	249												
29	196	20	217	227	238	249	259	270											
30	203	214	225	236	247	258	270	281	292										
31	211	22	234	245	257	268	280	291	303	314									
32	219	23	242	254	266	278	290	302	314	326	338								
33	227	239	251	263	276	288	300	313	325	337	350	362							
34	234	247	260	272	285	298	311	323	336	349	362	375	387						
35	242	255	268	281	294	308	321	334	347	360	374	387	400	413					
36	250	263	277	290	304	318	331	345	358	372	386	399	413	427	440				
37	258	271	285	299	313	327	341	355	370	384	398	412	426	440	454	468			
38	265	280	294	308	323	337	352	366	381	395	410	424	439	453	468	482	497		
39	273	288	303	317	332	347	362	377	392	407	422	437	452	467	482	497	512	527	
40	281	296	311	326	342	357	372	388	403	418	434	449	465	480	495	511	526	542	557

Продолжение таблицы VIII

n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
n_2	$p = 0,05$																		
41	40	55	70	86	102	118	135	151	168	184	201	218	234	251	268	285	302	319	
42	41	56	72	88	105	121	138	155	172	189	206	223	240	258	275	292	310	327	
43	42	58	74	91	107	124	142	159	176	194	211	229	247	264	282	300	318	335	
44	43	59	76	93	110	128	145	163	181	199	216	235	253	271	289	307	325	344	
45	44	61	78	95	113	131	149	167	185	203	222	240	259	277	296	315	333	352	
46	45	62	80	97	115	134	152	171	189	208	227	246	265	284	303	322	341	360	
47	46	64	81	100	118	137	156	175	194	213	232	251	271	290	310	329	349	369	
48	47	65	83	102	121	140	159	178	198	218	237	257	277	297	317	337	357	377	
49	48	66	85	104	123	143	163	182	202	222	243	263	283	303	324	344	365	385	
50	49	68	87	106	126	146	166	186	207	227	248	268	289	310	331	352	372	393	
51	50	69	89	109	129	149	170	190	211	232	253	274	295	316	338	359	380	402	
52	51	71	91	111	131	152	173	194	215	237	258	280	301	323	345	366	388	410	
53	52	72	92	113	134	155	177	198	220	241	263	285	307	329	352	374	396	418	
54	53	74	94	115	137	158	180	202	224	246	269	291	313	336	359	381	404	427	
55	54	75	96	118	139	161	184	206	228	251	274	297	319	342	365	389	412	435	
56	55	76	98	120	142	164	187	210	233	256	279	302	326	349	372	396	420	443	
57	57	78	100	122	145	167	191	214	237	261	284	308	332	355	379	403	427	451	
58	58	79	102	124	147	171	194	218	241	265	289	314	338	362	386	411	435	460	
59	59	81	103	127	150	174	198	222	246	270	295	319	344	369	393	418	443	468	
60	60	82	105	129	153	177	201	225	250	275	300	325	350	375	400	426	451	476	
	$p = 0,01$																		
41	23	36	49	63	77	91	106	121	136	151	166	181	196	211	227	242	258	273	
42	23	37	50	65	79	94	109	124	139	155	170	186	201	217	233	249	265	280	
43	24	38	52	66	81	96	112	127	143	159	175	190	207	223	239	255	271	288	
44	25	39	53	68	83	99	115	130	146	163	179	195	212	228	245	262	278	295	
45	25	40	54	70	85	101	117	134	150	167	183	200	217	234	251	268	285	303	
46	26	41	56	71	87	104	120	137	154	171	188	205	222	240	257	275	292	310	
47	27	42	57	73	90	106	123	140	157	175	192	210	228	245	263	281	299	317	
48	27	43	58	75	92	109	126	143	161	179	197	215	233	251	269	288	306	325	
49	28	44	60	77	94	111	129	147	165	183	201	220	238	257	276	294	313	332	
50	29	45	61	78	96	114	132	150	168	187	206	225	244	263	282	301	320	339	
51	29	46	63	80	98	116	135	153	172	191	210	229	249	268	288	307	327	347	
52	30	47	64	82	100	119	137	157	176	195	215	234	254	274	294	314	334	354	
58	31	48	65	83	102	121	140	160	179	199	219	239	259	280	300	320	341	361	
54	31	49	67	85	104	114	143	163	183	203	224	244	265	285	306	327	348	369	
55	32	50	68	87	106	126	146	166	187	207	228	249	270	291	312	333	355	376	
56	33	51	69	89	108	129	149	177	190	211	233	254	275	297	318	340	362	384	
57	33	52	71	90	111	131	152	173	194	215	237	259	281	302	324	347	369	391	
58	34	53	72	92	113	133	155	176	198	220	242	264	286	308	331	353	376	398	
59	34	54	73	94	115	136	158	179	201	224	246	268	291	314	337	360	383	406	
60	35	55	75	96	117	138	160	183	205	228	250	273	296	320	343	366	390	413	

Продолжение таблицы VIII

n1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n2	<i>p = 0,05</i>																		
41	336	353	370	387	404	421	438	456	473	490	507	524	541	559	576	593	610	628	645
42	345	362	380	397	415	432	450	467	485	503	520	538	556	573	591	609	626	644	662
48	353	371	389	407	425	443	461	479	497	515	533	552	570	588	606	624	642	660	679
44	362	380	399	417	436	454	473	491	510	528	547	565	584	602	621	640	658	677	695
45	371	390	408	427	446	465	484	503	522	541	560	579	598	617	636	655	674	693	712
46	380	399	418	437	457	476	495	515	534	554	573	593	612	631	651	670	690	709	729
47	388	408	428	447	467	487	507	527	547	566	586	606	626	646	666	686	706	726	746
48	397	417	437	458	478	498	518	539	559	579	600	620	640	661	681	701	722	742	763
49	406	426	447	468	488	509	530	550	571	592	613	634	654	675	696	717	738	759	780
50	414	435	457	478	499	520	541	562	583	605	626	647	669	690	711	732	754	775	796
51	423	445	466	488	509	531	553	574	596	618	639	661	683	704	726	748	770	791	813
52	432	454	476	498	520	542	564	586	608	630	652	675	697	719	741	763	786	808	830
58	441	463	485	508	530	553	575	598	620	643	666	688	711	734	756	779	802	824	847
54	449	472	495	518	541	564	587	610	633	656	679	702	725	748	771	794	818	841	864
55	458	481	505	528	551	575	598	622	645	669	692	716	739	763	786	810	834	857	881
56	467	491	514	538	562	586	610	634	657	681	705	729	753	777	801	825	850	874	898
57	476	500	524	548	572	597	621	645	670	694	719	743	768	792	816	841	865	890	915
58	484	509	534	558	583	608	633	657	682	707	732	757	782	807	832	856	881	906	931
59	493	518	543	568	594	619	644	669	694	720	745	770	796	821	847	872	897	923	948
60	502	527	553	578	604	630	655	681	707	733	758	784	810	836	862	888	913	939	965
	<i>p=0,01</i>																		
41	289	304	320	336	351	367	383	398	414	430	446	462	477	493	509	525	541	557	573
42	296	312	328	345	361	377	393	409	425	442	458	474	490	507	523	539	556	572	588
43	304	321	337	354	370	387	403	420	437	453	470	487	503	520	537	553	570	587	604
44	312	329	346	363	380	397	414	431	448	465	482	499	516	533	550	568	585	602	619
45	320	337	354	372	389	407	424	441	459	476	494	511	529	547	564	582	599	617	635
46	328	345	363	381	399	416	434	452	470	488	506	524	542	560	578	596	614	632	650
47	335	353	372	390	408	426	445	463	481	500	518	536	555	573	592	610	629	647	666
48	343	362	380	399	418	436	455	474	492	511	530	549	568	587	606	625	643	662	681
49	351	370	389	408	427	446	465	484	504	523	542	561	581	600	619	639	658	678	697
50	359	378	398	417	437	456	476	495	515	535	554	574	594	613	633	653	673	693	713
51	366	386	406	526	446	466	486	506	526	546	566	587	607	627	647	667	688	708	728
52	374	395	415	435	456	476	496	517	537	558	578	599	620	640	661	682	702	723	744
53	382	403	423	444	465	486	507	528	549	570	591	612	633	654	675	696	717	738	759
54	390	411	432	453	475	496	517	538	560	581	603	624	646	667	689	710	732	753	775
55	398	419	441	462	484	506	527	549	571	593	615	637	659	680	702	724	746	768	790
56	405	427	449	471	494	516	538	560	582	605	627	649	671	694	716	738	761	784	806
57	413	436	458	581	503	526	548	571	593	616	639	662	684	707	730	753	776	799	822
58	421	444	467	490	513	536	559	582	605	628	651	674	697	721	744	767	790	814	837
59	429	452	475	499	522	545	569	592	616	640	663	687	710	734	758	781	805	829	853
60	437	460	484	508	532	555	579	603	627	651	675	699	723	747	772	796	820	844	868

Продолжение таблицы VIII

n1	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
n2	p = 0,05																			
41	662																			
42	679	697																		
43	697	715	733																	
44	714	733	751	770																
45	731	750	769	789	808															
46	749	768	788	807	827	846														
47	766	786	806	826	846	866	886													
48	783	804	824	845	865	886	906	927												
49	800	821	842	863	884	905	926	947	968											
50	818	839	861	882	903	925	946	968	989	1010										
51	835	857	879	901	922	944	966	988	1010	1032	1054									
52	852	875	897	919	942	964	986	1009	1031	1053	1076	1098								
53	870	893	915	938	961	934	1006	1029	1052	1075	1098	1120	1143							
54	887	910	934	957	980	1003	1026	1050	1073	1096	1119	1143	1166	1189						
55	904	928	952	975	999	1023	1046	1070	1094	1113	1141	1165	1189	1213	1236					
56	922	946	970	994	1018	1042	1067	1091	1115	1139	1163	1187	1212	1236	1260	1284				
57	939	964	988	1013	1037	1062	1087	1111	1136	1161	1185	1210	1235	1259	1284	1309	1333			
58	956	981	1007	1032	1057	1082	1107	1132	1157	1182	1207	1232	1257	1282	1308	1333	1358	1383		
59	974	999	1025	1050	1076	1101	1127	1152	1178	1201	1229	1255	1280	1306	1331	1357	1383	1408	1434	
60	991	1017	1043	1069	1095	1121	1147	1173	1199	1225	1251	1277	1303	1329	1355	1381	1407	1433	1460	1486
n2	p = 0,01																			
41	589																			
42	605	621																		
43	621	637	654																	
44	636	654	671	688																
45	652	670	688	706	723															
46	668	687	705	723	741	759														
47	684	703	722	740	759	777	796													
48	700	719	738	757	776	795	814	834												
49	716	736	755	775	794	814	835	853	872											
50	732	752	772	792	812	832	852	872	892	912										
51	748	769	789	809	830	850	870	891	911	932	952									
52	764	785	806	827	847	868	889	910	931	951	972	993								
53	780	802	823	844	865	886	908	929	950	971	993	1014	1035							
54	796	818	840	861	883	905	926	948	970	991	1013	1035	1057	1078						
55	812	834	857	879	901	923	945	967	989	1011	1034	1056	1078	1100	1122					
56	828	851	873	896	919	941	964	986	1009	1031	1054	1077	1099	1122	1145	1167				
57	844	867	890	913	936	959	982	1005	1028	1051	1074	1098	1121	1141	1167	1191	1213			
58	861	884	907	931	954	978	1001	1024	1048	1071	1095	1118	1142	1165	1189	1213	1236	1260		
59	877	900	924	948	972	996	1020	1044	1068	1091	1115	1139	1163	1187	1211	1235	1254	1283	1307	
60	893	917	941	965	990	1014	1038	1063	1087	1111	1136	1160	1185	1209	1234	1258	1282	1307	1331	1356

**Критические значения критерия Q Розенбаума
для уровня статистической значимости $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$**

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
P = 0,05																
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	8	7	7	7	7	7										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
P = 0.01																
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9					
22	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9

**Критические значения критерия Н Крускала-Уоллиса
для разных сочетаний n_1, n_2, n_3**

Объём выборок					Объём выборок					Объём выборок				
n_1, n_2, n_3	H	P			n_1, n_2, n_3	H	P			n_1, n_2, n_3	H	P		
2 1 1	2,7000	0,600			4 4 1	6,6667	0,010			5 4 1	6,9545	0,008		
2 2 1	3,6000	0,200				6,1667	0,022				6,8400	0,011		
2 2 24,5714	0,067					4,4667	0,048				4,9855	0,044		
3 1 1	3,2000	0,300				4,8667	0,054				4,8600	0,056		
3 2 1	4,2857	0,100				4,0667	0,082				3,8873	0,098		
	3,8578	0,133				4,0867	0,102				3,9600	0,102		
3 2 2	5,3272	0,029			4 4 2	7,0364	0,006			5 4 2	7,2045	0,009		
	4,7143	0,048				6,8727	0,011				7,1182	0,010		
	4,5000	0,087				5,4545	0,046				5,2727	0,049		
	4,4643	0,102				5,2364	0,052				5,2682	0,050		
						4,5545	0,098				4,5409	0,098		
						4,4455	0,103				4,5182	0,101		
3 3 1	5,1429	0,043			4 4 3	7,1439				5 4 3	7,4449			
	4,5714	0,100				0,010					0,010			
	4,0000	0,129				7,1364	0,011				7,3949	0,011		
						5,5985	0,049				5,6664	0,049		
						5,5758	0,051				5,6308	0,060		
3 3 2	6,2500	0,011				4,5455	0,099				4,5487	0,099		
	5,3611	0,032				4,4773	0,102				4,5231	0,103		
	5,1369	0,081												
	4,5556	0,100												
	4,2500	0,121												
3 3 3	7,2000				4 4 4	7,6538	0,008			5 4 4	7,7604			
0,004						7,5385	0,011				0,009			
	6,4889	0,011									7,7440	0,014		
	5,6889	0,029				5,6923	0,049				5,6571	0,049		
	5,6000	0,050				5,6538	0,054				5,6176	0,050		
	5,0967	0,086				4,6539	0,097				4,6187	0,100		
	4,6222	0,100				4,5001	0,104				4,5527	0,102		
4 1 1	3,5714	0,200			5 1 1	3,8571				5 5 1	7,109	0009		
						0,143					6,8364	0,011		
											5,1273	0,046		
											4,6091	0,053		
											4,1091	0,086		
											4,0364	0,105		
4 2 1	4,8214				5 2 3	5,2500				5 5 2	7,3385	0,010		
0,057						0,036					7,2692	0,010		
	4,500	0,076				5,0000	0,048				5,3385	0,047		
	4,0179	0,114				4,4500	0,071				5,2462	0,051		
						4,2000	0,095				4,6231	0,097		
						4,0500	0,119				4,5077	0,100		
4 2 2	6,0000				5 2 2	6,5333				5 5 3	7,5780			
0,014						0,008					0,010			

	5,3333 0,033		6,1333 0,013		7,5429 0,010
	5,1250 0,052		5,1600 0,034		5,7055 0,046
	4,4583 0,100		5,0400 0,056		5,6264 0,051
	4,1667 0,105		4,3733 0,090		4,5451 0,100
			4,2933 0,122		4,5363 0,102
Продолжение таблицы					
4 3 1 0,021	5,8333	5 3 1 0,012	6,4000	5 5 4 0,010	7,8229
	5,2083 0,050		4,9800 0,048		7,7914 0,010
	5,0000 0,057		4,8711 0,052		5,6657 0,049
	4,0558 0,093		4,0178 0,095		5,6429 0,050
	3,8889 0,129		3,6400 0,123		4,5229 0,099
					4,5200 0,101
4 3 2 0,008	6,4444	5 3 2	6,9091 0,009	5 5 5 0,009	8,0000
	6,3000 0,011		6,8218 0,010		7,9800 0,010
	5,4444 0,046		5,2509 0,049		5,7800 0,049
	5,4000 0,051		5,1055 0,052		5,6600 0,051
	4,5111 0,098		4,6509 0,091		4,5800 0,100
	4,4444 0,102		4,4945 0,101		4,5000 0,102
4 3 3 0,010	6,7455	5 3 3	7,0788		
	6,7091 0,113		6,9618 0,011		
	5,7909 0,046		5,6485 0,049		
	5,7273 0,050		5,5152 0,051		
	4,7091 0,092		4,5333 0,097		
	4,7000 0,101		4,4121 0,109		

Таблица XI

**Критические значения критерия тенденций S Джонкира
для количества групп (С) от трех до шести ($3 \leq c \leq 6$) и количества
испытуемых в каждой группе от двух до десяти ($2 \leq n \leq 10$)**

С	Н								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P=0,05									
3	10	17	24	33	42	53	64	76	88
4	14	26	38	51	66	82	100	118	138
5	20	34	51	71	92	115	140	166	194
6	26	44	67	93	121	151	184	218	256
P =0,01									
3		25	32	45	99	74	90	106	124
4	20	34	50	71	92	115	140	167	195
5	26	48	72	99	129	162	197	234	274
6	34	62	94	130	170	213	260	309	361

Список литературы

1. Глуханюк Н.С. Практикум по общей психологии [Текст]: учеб. пособие / Н.С. Глуханюк, Е.В. Дьяченко, С.Л. Семенова. - 3-е изд. - М.; Воронеж, 2006. 224 с.
2. Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов [Текст]: учебник / О.Ю. Ермолаев. – М., Флинта: Московский психолого-социальный институт, 2011. 321 с.
3. Задачи и упражнения по высшей математике для психологов: [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.А. Туганбаев. – М.: Флинта, 2012. - 322 с. - <http://www.knigafund.ru/books/179353> (17.01.2017).
4. Карымова О.С., Якиманская, И.С. Математические методы в психологии [Электронный ресурс]: учеб. пособие / О.С. Карымова, И.С. Якиманская. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2012. - 169 с. - <http://www.knigafund.ru/books/181317> (17.01.2017).
5. Корнилова Т.В. Экспериментальная психология: [Текст]: учебник / Т.В. Корнилова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2012. 640 с.
6. Кутейников А.Н. Математические методы в психологии [Текст]: учеб. пособие. – СПб.: Речь, 2008. 172 с.
7. Математика для гуманитариев: Общий курс. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / П.В. Грес. – М.: Логос 2009. 288 с. <http://www.knigafund.ru/books/179640> (17.01.2017).
8. Математические методы в педагогических исследованиях [Электронный ресурс]: учеб. пособие / С.И. Осипова [и др.]. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. 265 с. <http://www.knigafund.ru/books/181261> (17.01.2017).
9. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования [Текст]: учеб. пособие / А.Д. Наследов. - 3-е изд., стер. - СПб.: Речь, 2007. 392 с.
10. Психология. Кн. 3. Психодиагностика: [Текст]: учебник / Р.С. Немов. - 4-е изд. - М.: ВЛАДОС, 2008. 631 с.

11. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии [Текст]. – СПб., Речь, 2009.

12. Эконометрика [Текст]: учебник / ред. И.И. Елисеева.- М.: Юрайт, 2012. 453 с.