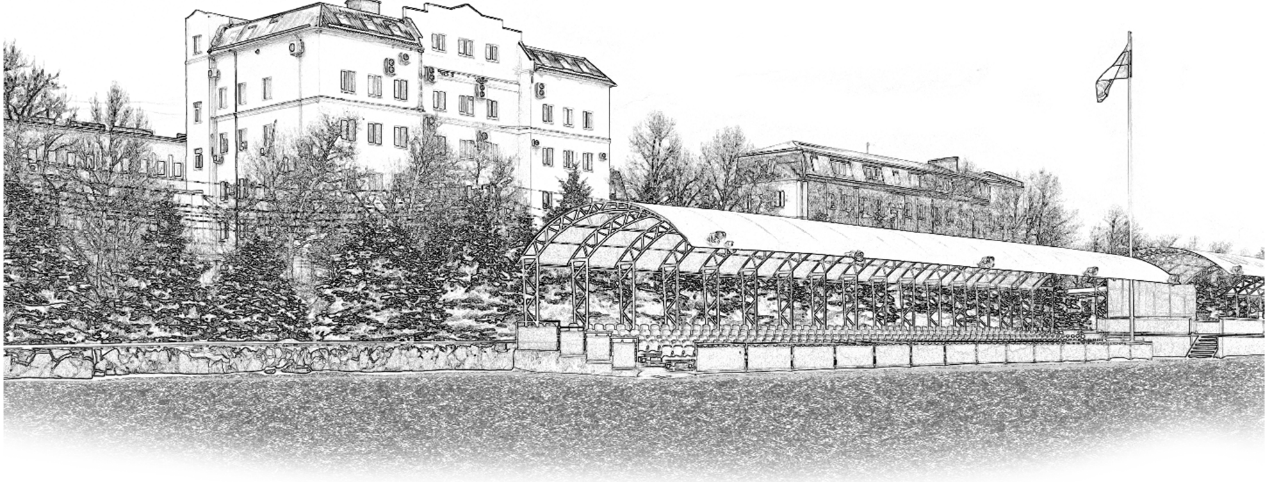
Краснодарский университет МВД России

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ



Краснодар
2024

Краснодарский университет МВД России

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Краснодар
2024

УДК 517.2
ББК 22.16
В937

Одобрено
редакционно-издательским советом
Краснодарского университета
МВД России

Составители: *И. Н. Старостенко, А. А. Хромых*

Рецензенты:

А. Г. Карпика, кандидат технических наук, доцент (Ростовский юридический институт МВД России);

В. Л. Акапьев, кандидат педагогических наук (Белгородский институт МВД России имени И. Д. Путилина).

В937 **Высшая математика для экономистов**. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : учебное пособие / сост.: И. Н. Старостенко, А. А. Хромых. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2024. – 74 с.

ISBN 978-5-9266-2034-1

Рассматриваются основные понятия дифференциального исчисления, приложение производной и применение дифференциального исчисления в экономическом анализе. Приводятся типовые примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Для профессорско-преподавательского состава, курсантов, слушателей образовательных организаций МВД России и сотрудников органов внутренних дел Российской Федерации.

УДК 517.2
ББК 22.16

ISBN 978-5-9266-2034-1

Содержание

Введение

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, химии, экономики и других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

В пособии изложены необходимые основы математического аппарата и приведены примеры его использования в экономике.

Материал представлен в краткой форме (на уровне понятий, теорем, свойств), основной упор сделан на приобретение навыков использования математического аппарата при решении задач.

Каждый раздел сопровождается решением достаточного количества типовых упражнений; представлены задания для самостоятельного решения.

1. Производная и дифференциал функции одной переменной

1.1. Производная функции одной переменной

1.1.1. Определение производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке $(a;\ b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$ и придадим значению x_0 приращение $\Delta x \neq 0$, такое что, $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Тогда функция $y=f(x)$ получит приращение Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{1}$$

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю (при условии, что этот предел существует и конечен):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Обычно производная функции $y=f(x)$ обозначается одним из следующих символов: y', y'_x, f'_x, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Операция нахождения производной функции $y=f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Пример. Найти производную функции $f(x)=3x^2$ по определению.

Решение. Произвольному значению аргумента x придадим приращение Δx. Далее для функции $f(x)=3x^2$ по формуле (1) определим приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 - 3x^2 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3x^2 =$$

$$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

Используя формулу (2), найдем производную функции y в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) = 6x.$$

Таким образом, $\left(3x^2\right)' = 6x$.

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ по определению.

Решение. Произвольному значению аргумента x придадим приращение Δx. Затем для функции $y = \sqrt{x}$ по формуле (1) определим приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}.$$

Используя формулу (2), найдем производную функции y в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \left\lfloor \frac{\infty}{\infty} \right\rfloor = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Таким образом, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

1.1.2. Механический смысл производной

Пусть материальная точка M движется равномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM=S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т.е. $S=S(t)$.

Это равенство называют *законом движения точки*. Найдем скорость движения точки.

Пусть в некоторый момент времени t точка занимает положение M, тогда в момент времени $t+\Delta t$ (Δt – приращение времени) точка займет положение M_1 ($OM_1=S+\Delta S$, где ΔS – приращение расстояния). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$ (рис. 1).

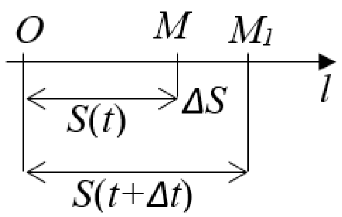


Рис. 1. Движение материальной точки

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость движения точки за время Δt:

$$V_{ср.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от значения Δt, т.е. чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки* в данный момент времени (или мгновенной скоростью). Обозначив скорость через V, получим:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'_t.$$

Таким образом, механический смысл производной заключается в следующем: *скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t.*

1.1.3. Геометрический смысл производной

Прежде чем рассмотреть геометрический смысл производной введем понятие касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (рис. 2).

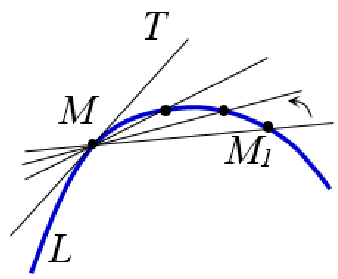


Рис. 2. Касательная к кривой L

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая MM_1 стремится к некоторому предельному положению MT.

Таким образом, *касательной к данной кривой L в данной точке M* называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда точка M_1 по кривой L неограниченно стремится к точке M.

Рассмотрим график непрерывной функции $y=f(x)$, имеющей в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ невертикальную касательную (рис. 3). Найдем ее угловой коэффициент $k=tg\alpha$, где α – угол между касательной и осью Ox.

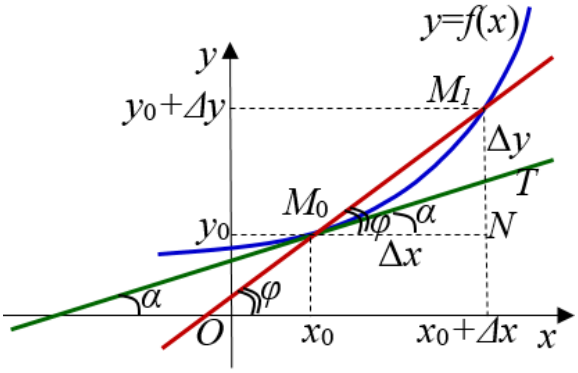


Рис. 3. Геометрический смысл производной

Дадим аргументу x_0 приращение Δx (рис. 3). Через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ и точку $M_1(x_0+\Delta x;\, y_0+\Delta y)$ проведем секущую M_0M_1 (рис. 3). Обозначим через φ – угол между секущей M_0M_1 и осью Ox. Угловой коэффициент $k_{M_0M_1}$ или тангенс угла φ наклона секущей M_0M_1 может быть найден из прямоугольного треугольника ΔM_0M_1N:

$$k_{M_0M_1} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции $y=f(x)$ приращение Δy тоже стремится к нулю. Следовательно, точка M_1 неограниченно приближается по кривой $y=f(x)$ к точке M_0, а секущая M_0M_1 поворачиваясь около точки M_0, переходит в касательную M_0T. Т.к. угол $\varphi \to \alpha$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$.

Таким образом, угловой коэффициент касательной MT равен

$$k_{MT} = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

т.е. *производная* $f'(x_0)$ *функции $y=f(x)$ в точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.*

Если точка касания M_0 имеет координаты (x_0; y_0), то угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0)$. Используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении ($y - y_0 = k(x - x_0)$), можно записать уравнение касательной:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

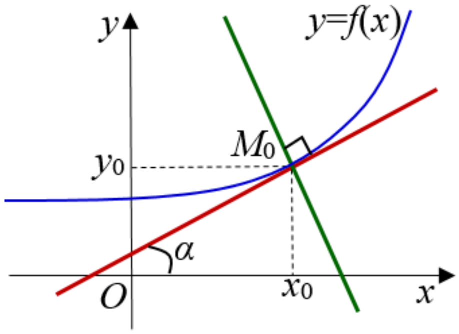


Рис. 4. Касательная и нормаль к графику функции y=f(x)

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью к кривой*.

Т.к. нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент равен

$$k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следовательно, уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \tag{4}$$

причем должно выполняться условие: $f'(x_0) \neq 0$.

1.1.4. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Функция $y=f(x)$, заданная на промежутке (a; b), называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in (a; b)$, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $A = f'(x_0)$ – конечное число, α – бесконечно малая функция (т.е. $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$).

Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой на промежутке* $(a; b)$, если она является дифференцируемой в каждой точке этого промежутка.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Замечание. Обратное утверждение неверно.

Например, функция $y=|x|$ определена и непрерывна на всей числовой оси (рис. 5), однако в точке $x=0$ она не является дифференцируемой, т.к. производной в этой точке не существует. Поскольку $y=|x|=\begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$ Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad x > 0, \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, x < 0. \end{cases}$$

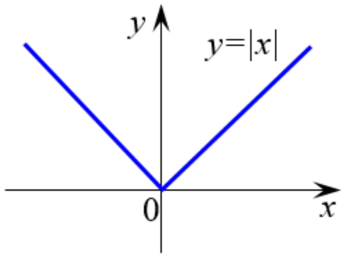


Рис. 5. График функции $y=|x|$

Замечание. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y=f(x)$ не обязательно является непрерывной функцией.

Если функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ на некотором интервале $(a; b)$, то функция $y=f(x)$ называется *гладкой на этом интервале*.

1.1.5. Правила дифференцирования

Необходимо отметить, что нахождение производной функции непосредственно по определению может вызывать определенные трудности, поэтому в практических задачах для упрощения процесса дифференцирования применяются различные правила и формулы.

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – две дифференцируемые на интервале $(a; b)$ функции. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Производная постоянной величины равна нулю:

$$c' = 0, \; c - const \; . \tag{5}$$

2. Производная аргумента равна единице:

$$x' = 1. \tag{6}$$

3. Производная суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{7}$$

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{8}$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cu)' = cu', \; c - const \; . \tag{8}$$

Следствие 2. Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \tag{9}$$

5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{9}$$

Следствие 1.

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u', \; c - const \; . \tag{10}$$

Следствие 2.

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2},\ c - const\ . \qquad (11)$$

1.1.6. Таблица производных основных элементарных функций

При вычислении производных наряду с правилами дифференцирования следует использовать формулы для производных основных элементарных функций.

1. $\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$,
2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$,
3. $\left(e^x\right)' = e^x$,
4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$,
5. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$,
6. $\left(\sin x\right)' = \cos x$,
7. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$,
8. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
9. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
10. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
11. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
12. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
13. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

При вычислении производных необходимо лишь знать правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций и строго соблюдать эти правила.

Пример. Вычислить производную функции $y = x^4 - 3x^3 + 7x - 5$.

Решение. Применяя правила дифференцирования суммы и разности функций, а также таблицу производных, получим:

$$y' = \left(x^4 - 3x^3 + 7x - 5\right)' = \left(x^4\right)' - \left(3x^3\right)' + (7x)' - (5)' = 4x^3 - 3\left(x^3\right)' + 7(x)' - 0 =$$

$$= 4x^3 - 9x^2 + 7.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = 3x^2 + \sin x$.

Решение. Применяя правила дифференцирования суммы и разности функций, а также таблицу производных, получим:

$$y' = \left(3x^2 + \sin x\right)' = \left(3x^2\right)' + (\sin x)' = 6x + \cos x.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = \left(3x^2 + 5\right)\cdot e^x$.

Решение. Применяя правила дифференцирования произведения функций, а также таблицу производных, получим:

$$y' = \left(\left(3x^2 + 5\right)\cdot e^x\right)' = \left(3x^2 + 5\right)'\cdot e^x + \left(3x^2 + 5\right)\cdot\left(e^x\right)' = 6xe^x + \left(3x^2 + 5\right)\cdot e^x =$$

$$= \left(3x^2 + 6x + 5\right)\cdot e^x.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = \sin x \cdot e^x$.

Решение. Применяя правила дифференцирования произведения функций, а также таблицу производных, получим:

$$y' = \left(\sin x \cdot e^x\right)' = (\sin x)'\cdot e^x + \left(e^x\right)'\cdot \sin x = \cos x \cdot e^x + e^x \cdot \sin x = (\cos x + \sin x)e^x.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = \sqrt{x}\cdot tgx$.

Решение. Применяя правила дифференцирования произведения функций, а также таблицу производных, получим:

$$y' = \left(\sqrt{x}\cdot tgx\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'\cdot tgx + (tgx)'\cdot\sqrt{x} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot tgx + \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sqrt{x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot tgx + \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sqrt{x} = \frac{tgx}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = x^5 \cdot \arccos x \cdot \ln x$.

Решение. Применяя правила дифференцирования произведения функций, а также таблицу производных, получим:

$$y' = \left(x^5 \cdot \cos x \cdot \ln x\right)' = \left(x^5\right)'\cdot\cos x\cdot\ln x + (\cos x)'\cdot x^5\cdot\ln x + (\ln x)'\cdot x^5\cdot\cos x =$$

$$= 5x^4\cdot\cos x\cdot\ln x - \sin x\cdot x^5\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot x^5\cdot\cos x =$$

$$= 5x^4\cdot\cos x\cdot\ln x - \sin x\cdot x^5\cdot\ln x + x^4\cdot\cos x.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = \dfrac{5x+3}{3^x}$.

Решение. Применяя правила дифференцирования частного двух функций, а также таблицу производных, получим:

$$y' = \left(\frac{5x+3}{3^x}\right)' = \frac{(5x+3)' \cdot 3^x - (5x+3)\cdot\left(3^x\right)'}{\left(3^x\right)^2} = \frac{5\cdot 3^x - (5x+3)\cdot 3^x \ln 3}{3^{2x}} =$$

$$= \frac{3^x\left(5-(5x+3)\cdot\ln 3\right)}{3^{2x}} = \frac{5-(5x+3)\cdot\ln 3}{3^x}.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = \dfrac{\arcsin x}{3x-2}$.

Решение. Применяя правила дифференцирования частного двух функций, а также таблицу производных, получим:

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{3x-2}\right)' = \frac{(\arcsin x)' \cdot (3x-2) - (3x-2)' \cdot \arcsin x}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(3x-2) - 3\cdot\arcsin x}{(3x-2)^2} = \frac{3x-2-3\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{(3x-2)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

1.1.7. Производная сложной функции

Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, тогда $y=f[\varphi(x)]$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимой переменной x.

Теорема. Если функция $u=\varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке x, а функция $y=f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u=\varphi(x)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке x, которая находится по формуле:

$$y' = f'(u)\cdot u'(x). \tag{12}$$

Используя теорему дифференцирования сложной функции и таблицу производных основных элементарных функций, можно записать следующие формулы:

1. $\left(u^m\right)' = mu^{m-1} \cdot u'$,

2. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$,

3. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$,

4. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$,

5. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$,

6. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$,

7. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$,

8. $\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$,

9. $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$,

10. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,

11. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,

12. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$,

13. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Пример. Найти производную сложной функции $y = (5x-9)^{10}$.

Решение. Представим функцию $y = (5x-9)^{10}$ в следующем виде:
$y = u^{10}$, $u = 5x - 9$.

Используя таблицу производной сложной функции, получим:

$$y' = \left(u^{10}\right)' = 10u^9 \cdot u'.$$

Т.к. $u = 5x - 9$, тогда

$$y' = 10u^9 \cdot u' = 10(5x-9)^9 \cdot (5x-9)' = 10(5x-9)^9 \cdot 5 = 50(5x-9)^9.$$

Пример. Найти производную сложной функции $y = (3x+7)^5$.

Решение. Применяя таблицу производной сложной функции, получим:

$$y' = \left((3x+7)^5\right)' = 5(3x+7)^4 \cdot (3x+7)' = 5(3x+7)^4 \cdot 3 = 15(3x+7)^4.$$

Пример. Найти производную сложной функции $y = \ln(3x^2+4)$.

Решение. Представим функцию $y = \ln(3x^2+4)$ в следующем виде:

$y = \ln u$, $u = 3x^2 + 4$.

Используя таблицу производной сложной функции, получим:

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

Т.к. $u = 3x^2 + 4$, тогда

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{3x^2 + 4} \cdot \left(3x^2 + 4\right)' = \frac{1}{3x^2 + 4} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2 + 4}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln(2x^3 + 5x - 1)$.

Решение. Применяя таблицу производной сложной функции, получим:

$$y' = \left(\ln(2x^3 + 5x - 1)\right)' = \frac{1}{2x^3 + 5x - 1}\left(2x^3 + 5x - 1\right)' = \frac{1}{2x^3 + 5x - 1}\left(6x^2 + 5\right) =$$

$$= \frac{6x^2 + 5}{2x^3 + 5x - 1}.$$

Пример. Найти производную функции $y = arctg(3x^2)$.

Решение. Применяя таблицу производной сложной функции, получим:

$$y' = \left(arctg(3x^2)\right)' = \frac{1}{1 + (3x^2)^2} \cdot (3x^2)' = \frac{1}{1 + 9x^4} \cdot 6x = \frac{6x}{1 + 9x^4}.$$

Пример. Найти производную сложной функции $y = \cos^2(7x + 5)$.

Решение. Преобразуем исходную функцию:

$$y = \cos^2(7x + 5) = (\cos(7x + 5))^2.$$

Применяя таблицу производной сложной функции, получим:

$$y' = \left((\cos(7x + 5))^2\right)' = 2\cos(7x + 5) \cdot (\cos(7x + 5))' =$$

$$= 2\cos(7x + 5) \cdot (-\sin(7x + 5)) \cdot (7x + 5)' = -2\cos(7x + 5)\sin(7x + 5) \cdot 7 =$$

$$= -14\cos(7x + 5)\sin(7x + 5) = -7\sin(14x + 10).$$

Пример. Найти производную функции $y = e^{\sin(7x - 3)}$.

Решение. Применяя таблицу производной сложной функции, получим:

$$y' = \left(e^{\sin(7x-3)}\right)' = e^{\sin(7x-3)} \cdot (\sin(7x - 3))' = e^{\sin(7x-3)} \cdot \cos(7x - 3) \cdot (7x - 3)' =$$

$$= e^{\sin(7x-3)} \cdot \cos(7x - 3) \cdot 7 = 7e^{\sin(7x-3)}\cos(7x - 3).$$

1.1.8. Производная обратной функции

Теорема. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{13}$$

Пример. Найти производную функции $y = \arcsin x$, используя правило вычисления производной обратной функции.

Решение. Т.к. функция $y = \arcsin x$ является обратной для функции $y = \sin x$, то

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1.1.9. Дифференцирование неявных функций

Теорема. Если дифференцируемая в точке x функция $y=y(x)$ задана соотношением $F(x,y)=0$ и если при этом функция $F(x, y(x))$ дифференцируема в точке x, то производную $y'(x)$ можно определить из равенства:

$$\left(F(x, y(x))\right)'_x = 0. \tag{14}$$

Пример. Найти производную функции $x^3 y + xy^3 - 3x^2 - 3y^2 + e^{xy} = 0$.

Решение. Применяя формулу дифференцирования неявной функции, имеем:

$$\left(x^3 y + xy^3 - 3x^2 - 3y^2 + e^{xy}\right)'_x = 0,$$

$$\left(x^3 y\right)'_x + \left(xy^3\right)'_x - \left(3x^2\right)'_x - \left(3y^2\right)'_x + \left(e^{xy}\right)'_x = 0.$$

Используя правила и формулы дифференцирования, получим

$$\left(x^3\right)'_x \cdot y + (y)'_x \cdot x^3 + (x)'_x \cdot y^3 + \left(y^3\right)'_x \cdot x - 3\left(x^2\right)'_x - 3\left(y^2\right)'_x + e^{xy}(xy)'_x = 0,$$

$$3x^2 y + y'_x x^3 + y^3 + 3y^2 y'_x x - 6x - 6yy'_x + e^{xy}\left(y + xy'_x\right) = 0,$$

$$3x^2 y + y'_x x^3 + y^3 + 3y^2 y'_x x - 6x - 6yy'_x + ye^{xy} + xy'_x e^{xy} = 0.$$

Сгруппируем выражения относительно y'_x:

$\left(y'_x x^3 + 3y^2 y'_x x - 6yy'_x + xy'_x e^{xy}\right) + \left(3x^2 y + y^3 - 6x + ye^{xy}\right) = 0$,

$y'_x\left(x^3 + 3y^2 x - 6y + xe^{xy}\right) = -\left(3x^2 y + y^3 - 6x + ye^{xy}\right)$,

$y'_x\left(x^3 + 3y^2 x - 6y + xe^{xy}\right) = 6x - 3x^2 y - y^3 - ye^{xy}$.

Выразим производную y'_x, получим:

$$y'_x = \frac{6x - 3x^2 y - y^3 - e^{xy} y}{x^3 + 3xy^2 - 6y + xe^{xy}}.$$

1.1.10. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где t – вспомогательная переменная, называемая *параметром*.

Теорема. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t, то функция y=y(x) также дифференцируема в точке x(t) и ее производная вычисляется по правилу:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{15}$$

Пример. Найти производную y'_x функции $\begin{cases} x = 7t + 5, \\ y = t^2, \end{cases}$.

Решение. Вычислим производные x'_t и y'_t:

$x'_t = (7t + 5)'_t = 7$, $y'_t = \left(t^2\right)'_t = 2t$.

Подставим найденные производные в формулу (15), получим:

$$y'_x = \frac{2t}{7}.$$

1.1.11. Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическое дифференцирование функции применяют в том случае, если функция является показательно-степенной $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемые функции аргументы x.

Прологарифмируем обе части, получим:

$\ln y = \ln u^v$.

По свойствам логарифма степень аргумента логарифма, стоящего справа, можно вынести перед знаком логарифма, тогда

$\ln y = v \ln u$.

Вычислим производную левой и правой частей выражения:

$$(\ln y)' = (v \ln u)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'.$$

Выразим производную y', для этого умножим левую и правую части последнего выражения на y, получим:

$$y' = \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right) \cdot y,$$

$$y' = \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right) \cdot u^v,$$

$$y' = \left(v' \cdot \ln u + v \cdot u^{-1} \cdot u' \right) \cdot u^v.$$

Таким образом, получаем формулу для дифференцирования показательно-степенной функции:

$$y' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \qquad (16)$$

Пример. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{3x^2+1}$.

Решение. Применяя формулу (16) вычисления производной показательно-степенной функции, получим:

$$y' = (\sin 2x)^{3x^2+1} \cdot \ln(\sin 2x) \cdot 6x + \left(3x^2+1\right) \cdot (\sin 2x)^{3x^2} \cdot 2\cos 2x \,.$$

Замечание. Формулу (16) запоминать не обязательно, можно запомнить алгоритм вычисления производной показательно-степенной функции.

1.1.12. Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается $y'' = f''(x)$.

Большинство функций можно дифференцировать неоднократно. Если продифференцировать вторую производную функции, то получим третью производную, продолжая дифференцирование можно найти четвертую производную, пятую, шестую и т.д.:

$$f''(x) = (f'(x))', \; f'''(x) = (f''(x))', \ldots$$

Производной n-го порядка (или *n-й производной*) называется производная от производной (n-1) порядка:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \tag{17}$$

Начиная со второго порядка производные называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках: y^{V}, $y^{(5)}$.

Пример. Найти вторую производную функции $y = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

.

Решение. Последовательно, применяя правила дифференцирования и таблицу производных, находим первую производную, а затем вторую:

$$y' = \left(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 6\right)' = 8x^3 - 3x^2 + 4x - 5,$$

$$y'' = \left(8x^3 - 3x^2 + 4x - 5\right)' = 24x^2 - 6x + 4\,.$$

Пример. Найти производную шестого порядка функции $y = \sin 2x$.

Решение. Последовательно, применяя правила дифференцирования сложной функции и таблицу производных, находим шесть производных:

$y' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$,

$y'' = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x$,

$y''' = (-4\sin 2x)' = -8\cos 2x$,

$y^{(4)} = (-8\cos 2x)' = 16\sin 2x$,

$y^{(5)} = (16\sin 2x)' = 32\cos 2x$,

$y^{(6)} = (32\cos 2x)' = -64\sin 2x$.

Пример. Найти вторую производную функции $y = \ln(2x+5)$.

Решение. Последовательно, применяя правила дифференцирования сложной функции и таблицу производных, находим сначала первую производную, а затем вторую:

$$y' = (\ln(2x+5))' = \frac{2}{2x+5},$$

$$y'' = \left(\frac{2}{2x+5}\right)' = \frac{(2)' \cdot (2x+5) - 2 \cdot (2x+5)'}{(2x+5)^2} = \frac{0-4}{(2x+5)^2} = -\frac{4}{(2x+5)^2}.$$

1.2. Дифференциал функции одной переменной

1.2.1. Определение дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \neq 0.$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,\ \alpha \to 0, \text{ при } \Delta x \to 0 \text{ или } \Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x)\cdot\Delta x$ и $\alpha\cdot\Delta x$, являющимися бесконечно малыми функциями при $\Delta x\to 0$.

Первое слагаемое $f'(x)\cdot\Delta x$ называют *главной частью приращения функции* Δy.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ *в точке x* называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy или $d(f(x))$:

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x. \tag{18}$$

Дифференциал dy называют *дифференциалом первого порядка*.

Найдем дифференциал независимой переменной *x*, т.е. дифференциал функции *y*=*x*.

Так как $y'=x'=1$, то, согласно формуле (18), имеем $dy=dx=\Delta x$, т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx=\Delta x$.

Следовательно, формулу (18) можно переписать в виде:

$$dy=f'(x)dx. \tag{19}$$

Таким образом, *дифференциал равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной*.

Пример. Найти дифференциал функции $y=5x+tg(3x)$.

Решение. Производная функции $y=5x+tg(3x)$ имеет вид:

$y'=(5x+tg(3x))'=5+\dfrac{3}{\cos^2(3x)}$.

Подставляя найденную производную в формулу (19), получаем: $dy=\left(5+\dfrac{3}{\cos^2(3x)}\right)dx$.

Пример. Найти дифференциал функции $y=(2x+7)\arcsin(5x)$.

Решение. Производная функции $y=(2x+7)\arcsin(5x)$ имеет вид:

$$y'=((2x+7)\arcsin(5x))'=(2x+7)'\cdot\arcsin(5x)+(2x+7)\cdot(\arcsin(5x))'=$$

$$=2\arcsin(5x)+(2x+7)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot(5x)'=2\arcsin(5x)+(2x+7)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot 5=$$

$$=2\arcsin(5x)+\frac{10x+35}{\sqrt{1-25x^2}}.$$

Подставляя найденную производную в формулу (19), получаем: $dy=\left(2\arcsin(5x)+\dfrac{10x+35}{\sqrt{1-25x^2}}\right)dx$.

Свойства дифференциала

1. $dc=0$, $c-const$;
2. $d(cx)=cdx$, $c-const$;
3. $d(u+v)=du+dv$;
4. $d(u\cdot v)=vdu+udv$;
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$, если $v\neq 0$.

1.2.2. Геометрический смысл дифференциала

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Проведем к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;\,y_0)$ касательную MT. Дадим аргументу x_0 приращение Δx (рис. 6). Обозначим через α – угол между касательной и осью Ox.

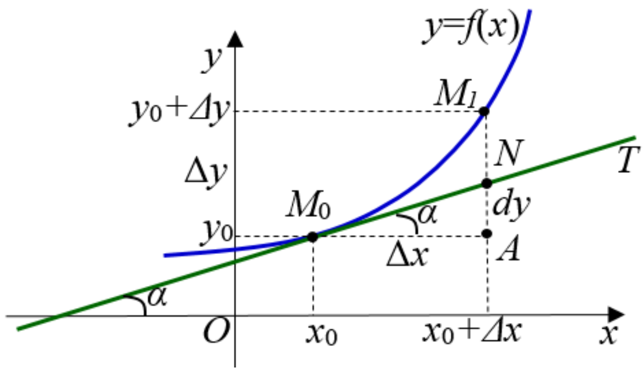


Рис. 6. Геометрический смысл дифференциала функции $y=f(x)$

На рисунке 6 $|AM_0| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника $\Delta M_0 AN$ имеем: $tg\alpha = \dfrac{|AN|}{\Delta x}$, откуда $|AN| = tg\alpha \cdot \Delta x$.

Согласно геометрическому смыслу производной, $tg\alpha = f'(x)$. Следовательно, $AN = f'(x) \cdot \Delta x$. Сравнивая полученный результат с формулой (18), получаем, $dy = AN$.

Таким образом, *дифференциал функции* $y = f(x)$ *в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке когда x получит приращение Δx.*

1.2.3. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Так как $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$ или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем $\Delta y \approx dy$, причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Таким образом, приближенные вычисления с применением дифференциала функции основаны на приближенной замене приращения функции в точке на ее дифференциал:

$$\Delta y \approx dy.$$

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то формула для приближенного значения $f(x + \Delta x)$ будет иметь вид

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x. \tag{20}$$

Пример. Вычислить приближенное значение корня $\sqrt{1{,}07}$.

Решение. По условию задачи, $x + \Delta x = 1{,}07$, следовательно, $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}07$. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$ в окрестности точки $x = 1$. Отметим, что $y(1) = \sqrt{1} = 1$.

Найдем производную функции $y = \sqrt{x}$, получим:

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Вычислим значение производной в точке $x = 1$, получим:

$$y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 0{,}5.$$

Таким образом, по формуле (20) имеем приближенное значение:

$$\sqrt{1{,}07} = 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}07 = 1{,}035.$$

Пример. Вычислить приближенное значение $(1{,}015)^5$.

Решение. По условию задачи, $x + \Delta x = 1{,}015$, следовательно, $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}015$. Рассмотрим функцию $y = x^5$ в окрестности точки $x = 1$. Отметим, что $y(1) = 1^5 = 1$.

Найдем производную функции $y = x^5$, получим:

$$y' = \left(x^5\right)' = 5x^4.$$

Вычислим значение производной в точке $x = 1$, получим:

$$y'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5.$$

Таким образом, по формуле (20) имеем приближенное значение:

$$(1{,}015)^5 = 1 + 5 \cdot 0{,}015 = 1{,}075.$$

1.3. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a; b], дифференцируема на интервале (a; b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)$=$f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

Теорема Ферма. Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a; b) и достигает в точке $x_0 \in (a;b)$ своего наибольшего или наименьшего значения, то производная функции в этой точке равна нулю, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Коши. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке [*a*; *b*], дифференцируемы на интервале (*a*; *b*), причем $\varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [*a*; *b*], дифференцируема на интервале (*a*; *b*), то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Задание для самостоятельной подготовки

Задание 1. Вычислить производную функции:

1.1. $y = 5 + \ln x + \log_7 x$,

1.2. $y = 9^x + x^{-6}$,

1.3. $y = x^3 - 3x + 4$,

1.4. $y = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$,

1.5. $y = (3x^2 + 5)^3$,

1.6. $y = (x^3 - 2)(5x + 1)$,

1.7. $y = x^3 arcctgx$,

1.8. $y = x \ln x$,

1.9. $y = \arccos x + \sqrt[4]{x}$,

1.10. $y = (6x - 1)\cos x$,

1.11. $y = e^x \arcsin x$,

1.12. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x$,

1.13. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$,

1.14. $y = \dfrac{2}{x^5}$,

1.15. $y = \dfrac{ctgx}{x^4}$,

1.16. $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$,

1.17. $y = x + e^{-2x}$,

1.18. $y = \sin(3x^2 + 8)$,

1.19. $y = \cos^2 3x$,

1.20. $y = \sin x \cdot \ln x$,

1.21. $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$,

1.22. $y=\ln 3-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$,

1.23. $y=\sqrt{3x^2+4x}$,

1.24. $y=3^{tgx}\arcsin x^2$,

1.25. $y=\ln\left(5x^2-7\right)$,

1.26. $y=\ln(\sin x)$,

1.27. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^3+5}}$,

1.28. $y=\dfrac{arctg2x}{1+2x^2}$,

1.29. $y=2^{\sin x}\cdot arccox5x$,

1.30. $y=\ln(5x-9)^2$,

1.31. $y=\left(\dfrac{x-2}{4x+1}\right)^3$,

1.32. $y=\dfrac{1}{x^2+5x-6}$,

1.33. $y=\ln^2(3x+5)$,

1.34. $y=x^{\cos x}$.

Ответы:

1.1. $y'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\ln 7}$; **1.2.** $y'=9^x\ln 9-6x^{-7}$; **1.3.** $y'=3x^2-3$; **1.4.** $y'=4x^3$;

1.5. $y'=18x\left(3x^2+5\right)^2$; **1.6.** $y'=20x^3+3x^2-10$; **1.7.** $y'=3x^2arcctgx-\dfrac{x^3}{1+x^2}$;

1.8. $y'=\ln x+1$; **1.9.** $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; **1.10.** $y'=6\cos x+(1-6x)\sin x$;

1.11. $y'=e^x\arcsin x+\dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$; **1.12.** $y'=\left(x^2+2\right)\cos x$; **1.13.** $y'=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$;

1.14. $y'=-\dfrac{10}{x^6}$; **1.15.** $y'=-\dfrac{x+2\sin 2x}{x^5\sin^2 x}$; **1.16.** $y'=\dfrac{2\cos 2x\cos 5x+5\sin 2x\sin 5x}{\cos^2 5x}$;

1.17. $y'=1-2e^{-2x}$; **1.18.** $y'=6x\cos\left(3x^2+8\right)$; **1.19.** $y'=-3\sin 6x$;

1.20. $y'=\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$; **1.21**. $y'=-x^2e^{-x}$; **1.22.** $y'=\cos x+\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$;

1.23. $y'=\dfrac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x}}$; **1.24.** $y'=3^{tgx}\left(\dfrac{\ln 3\cdot\arcsin x^2}{\cos^2 x}+\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\right)$; **1.25.** $y'=\dfrac{10x}{5x^2-7}$;

1.26. $y'=ctgx$; **1.27.** $y'=-\dfrac{6x^2}{\sqrt{\left(4x^3+5\right)^3}}$; **1.28.** $y'=\dfrac{\left(1+2x^2\right)-\left(4x+16x^3\right)arctg2x}{\left(1+2x^2\right)^2\left(1+4x^2\right)}$;

1.29. $y' = 2^{\sin x}\left(\ln 2 \cdot \cos x \cdot arccox5x - \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\right)$; **1.30.** $y' = \dfrac{10}{5x-9}$;

1.31. $y' = \dfrac{27}{(4x+1)^2}\left(\dfrac{x-2}{4x+1}\right)^2$; **1.32.** $y' = -\dfrac{2x+5}{x^2+5x-6}$; **1.33.** $y' = \dfrac{6\ln(3x+5)}{3x+5}$;

1.34. $y' = -x^{\cos x}\sin x \ln x + x^{\cos x - 1}\cos x$.

Задание 2. Вычислить производную функцию в заданной точке:

2.1. $y = -7$, $y'(-5) = ?$

2.2. $y = x^5$, $y'(-5) = ?$

2.3. $y = x^{-5}$, $y'(2) = ?$

2.4. $y = 2^x$, $y'(3) = ?$

2.5. $y = \lg x$, $y'(8) = ?$

2.6. $y = \log_7 x$, $y'(2) = ?$

2.7. $y = \dfrac{1}{x}$, $y'(-3) = ?$

2.8. $y = \dfrac{1}{2^x}$, $y'(2) = ?$

2.9. $y = 2x - 3$, $y'(0) = ?$

2.10. $y = x^2 - 3x + 7$, $y'(-5) = ?$

2.11. $y = 9x^4 + 18x - 24$, $y'(0) = ?$

2.12. $y = -45x^{-3} - 5x^{-2}$, $y'(5) = ?$

2.13. $y = x - 6^x$, $y'(2) = ?$

2.14. $y = (x^2 - 5)(x + 3)$, $y'(-1) = ?$

2.15. $y = \dfrac{5x+7}{x^2}$, $y'(2) = ?$

2.16. $y = \dfrac{6x^2 - 3}{8x + 8}$, $y'(6) = ?$

2.17. $y = (3x^2 - 2)^3$, $y'(2) = ?$

2.18. $y = \ln(3x^2 + 5)^2$, $y'(5) = ?$

2.19. $y = \left(\dfrac{6x+5}{x}\right)$, $y'(9) = ?$

2.20. $y = 5^{4x-14}$, $y'(4) = ?$

2.21. $y = tgx$, $y'(1) = ?$

2.22. $y = ctg6x$, $y'(-7) = ?$

2.23. $y = 2\sin(6x^3 - 5)$, $y'(5) = ?$

2.24. $y = \cos^2(4x)$, $y'(6) = ?$

2.25. $y = 2x^3 - 14x - 24$, $y'(-6) = ?$

2.26. $y = x^2(x + 8)$, $y'(1) = ?$

2.27. $y = tg^3 x - 3x^{-2}$, $y'(-1) = ?$

2.28. $y = (x^2 - 6)(x^2 + 6)$, $y'(7) = ?$

2.29. $y = \dfrac{6\cos^2 x}{3x + 9}$, $y'(-2) = ?$

2.30. $y = \dfrac{7x^2 + 15x - 29}{4x + 5}$, $y'(-8) = ?$

2.31. $y = (3x^3 - 7)^2$, $y'(-8) = ?$

2.32. $y = \ln(5x^2 + 14)^3$, $y'(4) = ?$

2.33. $y=\left(\frac{6x+1}{7x^2}\right)^3$, $y'(8)=?$

2.34. $y=7^{\sin(4x+1)}$, $y'(-2)=?$

Ответы:

2.1. 0; **2.2.** 3125; **2.3** -0,07813; **2.4.** 5,54518; **2.5.** 0,05429; **2.6.** 0,25695; **2.7.** 0,07407; **2.8.** -0,17329; **2.9.** 2; **2.10.** -13; **2.11.** 18; **2.12.** 0,296; **2.13.** -63,5033; **2.14.** -8; **2.15.** -3; **2.16.** 0,74235; **2.17.** 3600; **2.18.** 0,75; **2.19.** -0,80933; **2.20.** 160,944; **2.21.** 3,42552; **2.22.** -7,14276; **2.23** -13,3; **2.24.** 3,07302; **2.25.** 202; **2.26.** 19; **2.27.** 18,926; **2.28.** 1372; **2.29.** -1,86; **2.30.** 1,95199; **2.31.** -72; **2.32.** 1,2766; **2.33.** -0,0005; **2.34.** 1,6341.

Задание 3. Вычислить производную второго порядка функции $y(x)$:

3.1. $y=3x^2+5x+7$,

3.2. $y=2x^5+7x^3+4x+2$,

3.3. $y=\cos 2x$,

3.4. $y=e^{3x}$,

3.5. $y=tgx$,

3.6. $y=\ln(2x+3)$,

3.7. $y=x\sin x$,

3.2. $y=\frac{x^2+x}{x-1}$,

Ответы:

3.1. $y''=6$; **3.2.** $y''=40x^3+42x$; **3.3.** $y''=-4\cos 2x$; **3.4.** $y''=9e^{3x}$;

3.5. $y''=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; **3.6.** $y''=-\frac{4}{(2x+3)^2}$; **3.7.** $y''=2\cos x-x\sin x$; **3.8.** $y''=\frac{4}{(x-1)^3}$.

Задание 4. Вычислить значение производных высших порядков в заданных точках:

4.1. $y=7x^3-19x-24$, $y''(-3)=?$

4.2. $y=\sin^2(4x)$, $y''(6)=?$

4.3. $y=4x^6+16x^4$, $y'''(-1)=?$

4.4. $y=tg(5x)$, $y''(-1)=?$

4.5. $y=\sin(6x)$, $y^{(V)}(0)=?$

4.6. $y=\frac{9x+14}{x}$, $y''(4)=?$

Ответы:

4.1. -126; **4.2.** -20,485; **4.3.** -864; **4.4.** 2100,63; **4.5.** 7776; **4.6.** 0,4375.

Задание 5. Найти производную неявно заданной функции y'_x:

5.1. $x+\cos(xy)=5$,

5.2. $2xy-3xy^2+x=9$,

5.3. $tgy = 4y - 5x$, **5.4.** $\sqrt{1 - x^2 y^2} + 6xy = 0$.

Ответы:

5.1. $y' = \dfrac{1 - y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$; **5.2.** $y' = \dfrac{3y^2 - 2y - 1}{2x - 6xy}$; **5.3.** $y' = \dfrac{-5\cos^2 y}{1 - 4\cos^2 y}$;

5.4. $y' = -\dfrac{xy^2 - 6y\sqrt{1 - x^2 y^2}}{x^2 y - 6x\sqrt{1 - x^2 y^2}}$.

Задание 6. Найти дифференциал функции:

6.1. $y = \cos^5 3x$, **6.2.** $y = x\sqrt{7 - 9x}$,

6.3. $y = \ln\dfrac{2x - 3}{2x + 3}$, **6.4.** $y = \arccos\dfrac{x}{6}$.

Ответы:

6.1. $dy = -15\sin 3x\cos^4 3x dx$; **6.2.** $dy = \dfrac{14 - 27x}{2\sqrt{7 - 9x}} dx$; **6.3.** $dy = \dfrac{12}{2x - 3} dx$;

6.4. $dy = -\dfrac{6}{\sqrt{36 - x^2}} dx$.

Задание 7. Вычислить приближенное значение:

7.1. $\sqrt[3]{9}$, **7.2.** $\sqrt[5]{33}$, **7.3.** $\sqrt{1{,}04}$.

Ответы:

7.1. 2,08; **7.2.** 0,013; **7.3.** 1,02.

Задание 8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t$. Найти скорость точки в момент времени $t = 1$.

Ответ: 0.

Задание 9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{6}t^3 - t^2 + 1$. Найти ускорение точки в момент времени $t = 2$.

Ответ: 2.

Задание 10. Найти общее уравнение касательной в точке $x_0 = 0$ к графику функции $y = 5x^2 - 9x + 13$.

Ответ: $9x + y - 13 = 0$.

Задание 11. Найти общее уравнение касательной в точке $x_0 = -2$ к графику функции $y = \frac{3x^2 - 4}{x + 3}$.

Ответ: $20x + y + 32 = 0$.

Задание 12. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \sin 2x + 3x$ в точке $x = 0$.

Ответ: 5.

Задание 13. Составить уравнение касательной к функции $y = e^{2x}$ в точке пересечения с осью *Oy*.

Ответ: $y = 2x + 1$.

Задание 14. Укажите абсциссы точек, в которых касательная к линии $y = x^3 + x - 2$ параллельна прямой $y = 4x - 1$.

Ответ: -1; 1.

2. Приложение производной

2.1. Правило Лопиталя

Часто на практике требуется найти предел функций, аналитическое выражение которых представимо в виде дроби, содержащей в числителе и знаменателе одновременно бесконечно большие или бесконечно малые величины. В этих случаях предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ часто называют неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, и неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Для упрощения нахождения предела отношений двух бесконечно больших или двух бесконечно малых функций можно воспользоваться правилом Лопиталя.

Правила Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших дифференцируемых функций равен пределу отношения производных этих функций, если последний существует.

Таким образом, если имеется неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, тогда:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{21}$$

Замечание. Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, которые называются основными. Неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^{\infty}]$, $[\infty^{0}]$, $[0^{0}]$ сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, используя дифференциальное исчисление.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример. Найти предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-1}{x^3+4x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-1}{x^3+4x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x^3+x-1\right)'}{\left(x^3+4x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+1}{3x^2+8x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(6x^2+1\right)'}{\left(3x^2+8x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{6x+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x)'}{(6x+8)'}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{6}=2.$$

Пример. Найти предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, используя дифференциальное исчисление.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример. Найти предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 6x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(tg3x)'}{(\sin 6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{6\cos 6x}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$

.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} xctg2x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x'}{(tg2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{2}{\cos^2(2x)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(2x)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-\ln x-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x\ln x}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x-1}{\ln x+1+1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x-1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$, используя дифференциальное исчисление.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\ln(1+x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x})(1+x)=2.$$

2.2. Исследование функции

2.2.1. Асимптоты функции

Для исследования функций часто бывает нужно знать, как ведет себя функция в окрестностях точек разрыва второго рода или при бесконечном удалении аргумента от начала координат. Решение этой проблемы можно получить, исследуя асимптоты функции.

Прямая называется *асимптотой* функции *y=f(x)*, если расстояние от точки графика функции к этой прямой стремится к нулю, при неограниченном удалении указанной точки от начала координат (рис. 7).

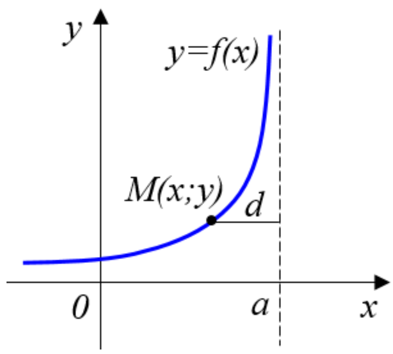


Рис. 7. Асимптота x=a к графику функции y=f(x)

График функции может приближаться к своей асимптоте, оставаясь выше, ниже или колеблясь вокруг нее (рис. 8).

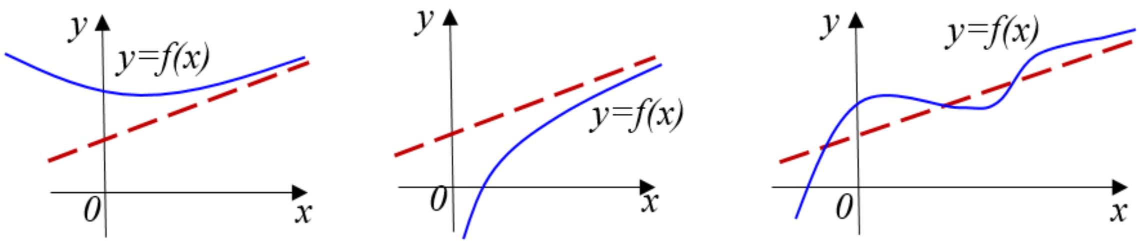


Рис. 8. Поведение функции y=f(x) относительно асимптоты

Асимптоты могут быть вертикальными и наклонными.

Прямая *x=a* является *вертикальной асимптотой* функции *y=f(x)*, если существует и равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$.

Вертикальные асимптоты следует искать в *точках разрыва функции второго рода.*

Вертикальных асимптот может быть любое количество.

Пример. Найти вертикальные асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

Решение. Область определения функции: $D(x)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Следовательно, в точке $x=1$ функция $y=f(x)$ имеет разрыв. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{(-1-0)+1}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{(-1+0)+1}=-\infty.$$

Следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Пример. Найти вертикальные асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{6x^2+x+25}{x^2-16}$.

Решение. Область определения функции: $D(x)=(-\infty;-4)\cup(-4;4)\cup(4;+\infty)$. Следовательно, в точках $x=-4$ и $x=4$ функция $y=f(x)$ имеет разрывы. Найдем левосторонние и правосторонние пределы функции в этих точках.

При $x=-4$:

$$\lim_{x\to-4-0} f(x)=\lim_{x\to-4-0}\frac{6x^2+x+25}{x^2-16}=\lim_{x\to-4-0}\frac{6x^2+x+25}{(x-4)(x+4)}=\frac{117}{(-8)(-0)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-4+0} f(x)=\lim_{x\to-4+0}\frac{6x^2+x+25}{x^2-16}=\lim_{x\to-4+0}\frac{6x^2+x+25}{(x-4)(x+4)}=\frac{117}{(-8)(+0)}=-\infty.$$

При $x=4$:

$$\lim_{x\to4-0} f(x)=\lim_{x\to4-0}\frac{6x^2+x+25}{x^2-16}=\lim_{x\to4-0}\frac{6x^2+x+25}{(x-4)(x+4)}=\frac{125}{(-0)(8)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to4+0} f(x)=\lim_{x\to4+0}\frac{6x^2+x+25}{x^2-16}=\lim_{x\to4+0}\frac{6x^2+x+25}{(x-4)(x+4)}=\frac{125}{(+0)(8)}=+\infty.$$

Следовательно, прямые $x=-4$ и $x=4$ являются вертикальными асимптотами.

График функции $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту вида $y=kx+b$ при $x\to\pm\infty$, если выполняется хотя бы одно из равенств $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx-b)=0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

Для того чтобы прямая $y=k_1x+b_1$ является *наклонной асимптотой* функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\ \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_1x\right]=b_1. \tag{22}$$

Для того чтобы прямая $y=k_2x+b_2$ является *наклонной асимптотой* функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,\ \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_2x\right]=b_2. \tag{23}$$

Замечание. Если хотя бы один из пределов (22), (23) не существует или равен бесконечности, то функция $y=f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

Замечание. Если $k=0$, то $b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. Следовательно, прямая $y=b$ – горизонтальная асимптота.

Пример. Найти наклонные асимптоты функции $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

Решение. Область определения функции: $D(x)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Наклонная асимптота имеет вид: $y=kx+b$.

Найдем по формулам (22) значения параметров k_1 и b_1 при $x\to-\infty$.

$k_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(x-1)^2}=0;$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_1x] = \left[\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x-1)^2} - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x-1)^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| == \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2(x-1)} = 0$$

.

Таким образом, наклонная асимптота функции при $x\to-\infty$ существует и ее уравнение: $y=0$.

Найдем по формулам (23) значения параметров k_2 и b_2 при $x\to+\infty$.

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-1)} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x] = \left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)^2} - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(x-1)} = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота функции при $x\to+\infty$ существует и имеет вид: $y=0$.

Следовательно, функция $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ при $x\to\pm\infty$ имеет наклонную асимптоту (горизонтальную): $y=0$.

Пример. Найти наклонные асимптоты функции $f(x)=\dfrac{6x^2}{x+9}$.

Решение. Область определения функции: $D(x)=(-\infty;-9)\cup(-9;+\infty)$.

Найдем наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2}{(x+9)x} = 6;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x^2}{x+9} - 6x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-54x}{x+9} = \text{-54}.$$

Следовательно, $y=6x-54$ – наклонная асимптота.

Пример. Найти наклонные асимптоты функции $f(x)=\dfrac{2x^3-x}{x^2+2}$.

Решение. Область определения функции: $D(x)=(-\infty;+\infty)$.

Найдем наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x}{(x^2+2)x}=2;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3-x}{x^2+2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x}{x^2+2}=0.$$

Следовательно, $y=2x$ – наклонная асимптота.

Пример. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$.

Решение. Область определения функции: $D(x)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

Следовательно, в точке $x=3$ функция $y=f(x)$ имеет разрыв. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to3-0}f(x)=\lim_{x\to3-0}\frac{x+2}{x-3}=\frac{3}{(3-0)-3}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to3+0}f(x)=\lim_{x\to3+0}\frac{x+2}{x-3}=\frac{3}{(3+0)-3}=+\infty.$$

Следовательно, прямая $x=3$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{(x-3)x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x-3}=1.$$

Следовательно, $y=1$ – наклонная (горизонтальная) асимптота.

2.2.2. Монотонность функции

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема (*необходимые условия*). Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то $f'(x)\ge0$ ($f'(x)\le0$) для любых $x\in(a;b)$.

Пример. Функция $y = x^2 - 6x - 5$ монотонно возрастает на интервале $(-\infty; 3)$, следовательно, на интервале $(-\infty; 3)$ ее производная $y' = 2x - 6$ будет принимать только положительные значения.

Теорема (*достаточные условия*). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любых аргументов из этого интервала, то функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

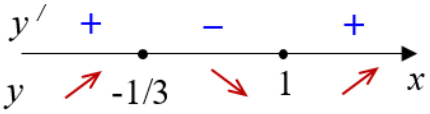
Пример. Для дифференцируемой функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$ определить интервалы возрастания и убывания.

Решение. Область определения функции: $D(x) = (-\infty; +\infty)$.

Найдем производную функции: $y' = (x^3 - x^2 - x + 4)' = 3x^2 - 2x - 1$.

Найдем критические точки первого порядка, для этого приравняем полученное выражение производной к нулю. Получим: $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = -1/3$ и $x_2 = 1$. Отметим их на числовой прямой. На каждом получившемся интервале расставим знаки производной функции y' и укажем поведение функции y.



На интервалах $(-\infty; -1/3)$ и $(1; +\infty)$ производная функции $y' = 3x^2 - 2x - 1$ принимает положительные значения, следовательно, на этих интервалах функция $y = x^3 - x^2 - x + 4$ возрастает. На интервале $(-1/3; 1)$ производная принимает отрицательные значения, значит, на этом интервале функция убывает.

Замечание. Напомним, что возрастающая или убывающая функция называется *монотонной*. Функция $y = f(x)$ *возрастает* (*убывает*) на промежутке *X*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ $(x_2 > x_1)$ выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Пример. Определить промежутка возрастания и убывания функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

Решение. Область определения функции: $D(x) = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$
.

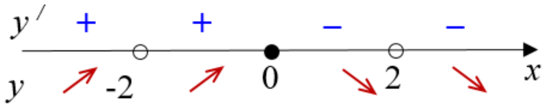
Найдем производную функции $y = f(x)$, получим: $y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 4)^2}$.

Приравняем полученное выражение производной к нулю и найдем критические точки:

$$-\frac{2x}{(x^2 - 4)^2} = 0;$$

$x = 0$, $x \neq -2$, $x \neq 2$.

Отметим найденные критические точки на числовой прямой. На каждом получившемся интервале расставим знаки производной функции y' и укажем поведение функции y.



На интервалах $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0)$ производная функции $y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 4)^2}$ принимает положительные значения, следовательно, на этих интервалах функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ возрастает. На интервалах $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$ производная $y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 4)^2}$ принимает отрицательные значения, значит, на этом интервале функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ убывает.

2.2.3. Экстремумы функции

Точка x_1 называется точкой *максимума функции* $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство: $f(x) \leq f(x_1)$ (рис. 9).

Точка x_2 называется точкой *минимума функции* $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_2 выполняется неравенство: $f(x) \geq f(x_2)$ (рис. 9).

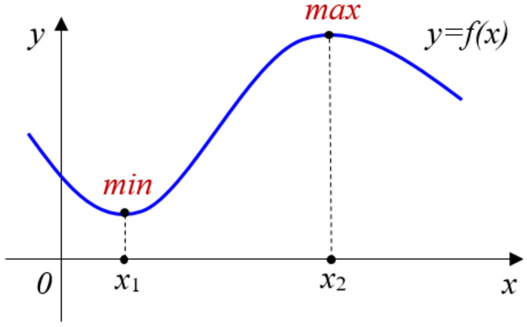


Рис. 9. Экстремумы функции y=f(x)

Значения функции в точках x_1 и x_2 называют соответственно *максимумом* и *минимумом* функции. Максимум и минимум функции называются *экстремумами функции*.

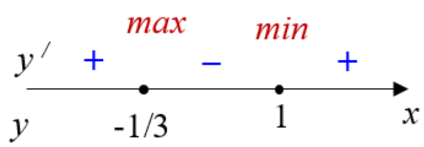
Теорема (Необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то $f'(x)=0$ или не существует.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, т.е. производная равна нулю или не существует, называются *критическими* (или *стационарными*).

Теорема (Первое достаточное условие экстремума). Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $y=f(x)$, а если с минуса на плюс, то точка минимума.

Пример. Исследовать функцию $y = x^3 - x^2 - x + 4$ на экстремум.

Решения. Функция $y = x^3 - x^2 - x + 4$ имеет критические точки $x_1 = -1/3$ и $x_2 = 1$, т.к. значение производной функции $y' = 3x^2 - 2x - 1$ в этих точках ровно нулю.



Точка $x_1 = -1/3$ является точкой максимума, так как при переходе через точку x_1 производная функции меняет свой знак с плюса на минус. Значение функции $f(x_1) \approx 3{,}5926$ является максимумом функции.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как при переходе через точку x_2 производная функции меняет свой знак с минуса на плюс. Значение функции $f(x_2) = 3$ является минимумом функции.

Теорема (Второе достаточное условие экстремума). Если первая производная $y = f(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x)$ положительна, то x_0 есть точка минимума функции $y = f(x)$*;* если $f''(x)$ отрицательна, то x_0 – точка максимума.

Пример. Исследовать функцию $y = x^3 - x^2 - x + 4$ на экстремум.

Решение. Функция $y = x^3 - x^2 - x + 4$ имеет критические точки $x_1 = -1/3$ и $x_2 = 1$, т.к. значение производной функции $y' = 3x^2 - 2x - 1$ в этих точках ровно нулю. Найдем вторую производную функции $y = f(x)$:

$y'' = 6x - 2$.

Т.к. $y'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$ и $y''\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -4 < 0$, то точка $x_1 = -1/3$ является точкой максимума.

Т.к. $y'(1) = 0$ и $y''(1) = 4 > 0$, то точка $x_2 = 1$ является точкой минимума.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 12x + 72}{x - 6}$ на экстремум.

Решение. Область определения функции: $D(x) = (-\infty;6) \cup (6;+\infty)$.

Вычислим первую производную функции. Получим:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 12x + 72}{x - 6}\right)' = \frac{(x^2 - 12x + 72)'(x - 6) - (x^2 - 12x + 72)(x - 6)'}{(x - 6)^2} =$$

$$= \frac{(2x-12)(x-6)-\left(x^2-12x+72\right)}{(x-6)^2} = \frac{2x^2-12x-12x+72-x^2+12x-72}{(x-6)^2} =$$

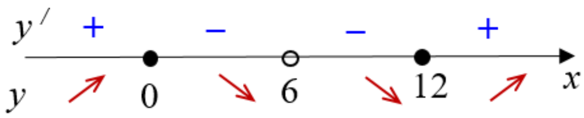
$$= \frac{x^2-12x}{(x-6)^2} = \frac{(x-12)x}{(x-6)^2}.$$

Найдем критические точки первого порядка, для этого приравняем первую производную функции $y(x)$ к нулю. Получим:

$$\frac{(x-12)x}{(x-6)^2} = 0,$$

$$(x-12)x = 0, (x-6)^2 \neq 0,$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x \neq 0$.



На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(12; +\infty)$ производная функции $y' = \frac{(x-12)x}{(x-6)^2}$ принимает положительные значения, следовательно, на этих интервалах функция $y = \frac{x^2-12x+72}{x-6}$ возрастает. На интервалах $(0; 6)$ и $(6; 12)$ производная $y' = \frac{(x-12)x}{(x-6)^2}$ принимает отрицательные значения, значит, на этом интервале функция $y = \frac{x^2-12x+72}{x-6}$ убывает.

Точка $x_1 = 0$ является точкой максимума, так как при переходе через точку x_1 производная функции меняет свой знак с плюса на минус.

Точка $x_2 = 12$ является точкой минимума, так как при переходе через точку x_2 производная функции меняет свой знак с минуса на плюс.

2.2.4. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

График дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* (*выпуклым вниз*) на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале (рис. 10).

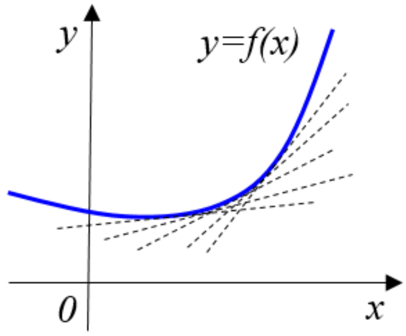


Рис. 10. Вогнутость функции y=f(x)

График дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* (*выпуклым вверх*) на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале (рис. 11).

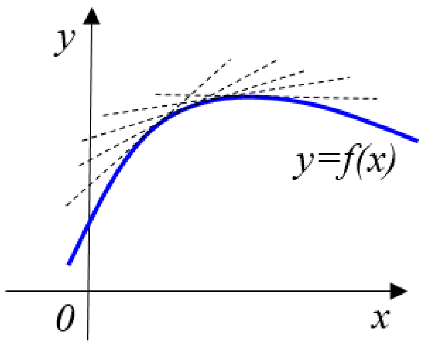


Рис. 11. Выпуклость функции y=f(x)

Точка x_0 графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба (рис. 12).*

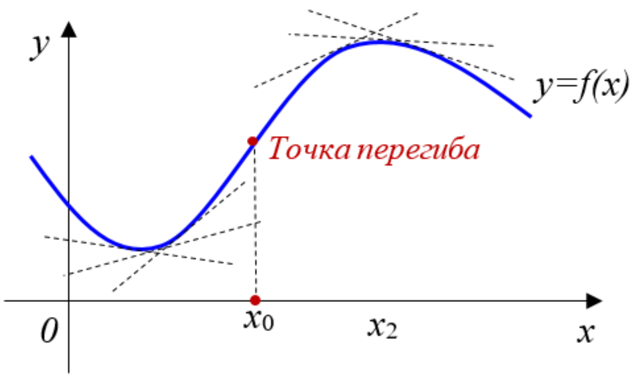


Рис. 12. Точка перегиба функции y=f(x)

Интервалы выпуклости, вогнутости функции находят с помощью следующих теорем.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый. Если же $f''(x) > 0$, для любых $x \in (a;b)$ – график вогнутый.

Пример. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$.

Решение. Область определения функции: $D(x) = (-\infty;+\infty)$.

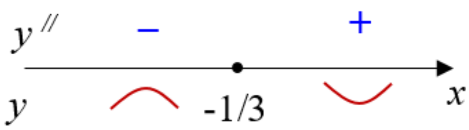
Найдем стационарные точки второго порядка функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которых вторая производная функции равна нулю.

$y' = 3x^2 - 2x - 1$,

$y'' = 6x - 2$,

$6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Отметим эту точку на числовой прямой. Расставим знаки второй производной y'' и укажем поведение функции y.



Слева от точки $x_0 = 1/3$ вторая производная функции принимает отрицательные значения, следовательно, на интервале $(-\infty; 1/3)$ график функции выпуклый.

Справа от точки $x_0 = 1/3$ вторая производная функции принимает положительные значения, следовательно, на интервале $(1/3;+\infty)$ график функции вогнутый.

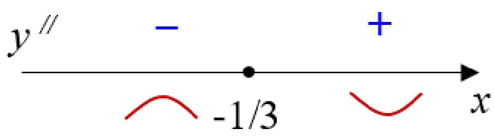
Теорема (необходимое условие перегиба). Вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю.

Теорема (достаточное условие перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку *x₀* меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.

Пример. Найти точку перегиба функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$.

Решение. Область определения функции: $D(x) = (-\infty;+\infty)$.

Для функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$ точка $x_0 = 1/3$ является стационарной точкой второго порядка, т.к. $y''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. При переходе через точку x_0 вторая производная меняет свой знак с минуса на плюс.



Следовательно, точка $x_0 = 1/3$ является точкой перегиба.

Пример. Определить точки перегиба графика функции $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

Решение. Область определения функции: $D(x) = (-\infty;+\infty)$.

Найдем критические точки второго порядка, для этого вычислим вторую производную функции $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$ и приравняем ее к нулю.

Первая производная:

$$y' = \frac{\left(2x^2\right)'\left(x^2+1\right) - 2x^2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

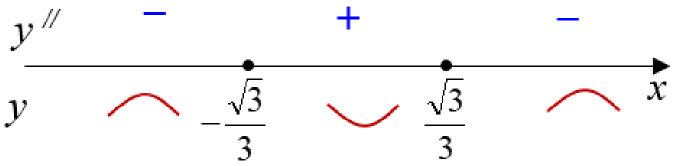
Вторая производная:

$$y'' = \frac{(4x)'\left(x^2+1\right)^2 - (4x)\left(\left(x^2+1\right)^2\right)'}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-4\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Критические точки:

$$\frac{-4\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = 0,\ x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отметим эти точки на числовой прямой. Расставим знаки второй производной y'' и укажем поведение функции y.



На интервалах $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$ вторая производная функции y'' принимает отрицательные значения, следовательно, на этих промежутках функция $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$ выпукла.

На интервале $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ вторая производная функции y'' принимает положительные значения, следовательно, на этом промежутке функция $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$ вогнута.

При переходе через точки $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ вторая производная функции y'' меняет свой знак, следовательно, эти точки являются точками перегиба.

2.2.5. Общая схема исследования функций

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функции на четность, нечетность, периодичность.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции.

4. Построить асимптоты функции.

5. Определить экстремальные точки. Интервалы возрастания (убывания) функции.

6. Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба

функции.

7. Контрольные точки. Схематичное изображение функции.

Следует отметить, что иногда целесообразно выполнение операций исследования сопровождать постепенным построением графика функции.

Рассмотрим примеры исследования функций по общей схеме.

Пример. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ по общей схеме.

Решение.

1. Областью определения функции является множество точек $x \in (-\infty; +\infty)$

.

2. Т.к. $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 2(-x) = -x^3 - 3x^2 - 2x$, то функция $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ – общего вида.

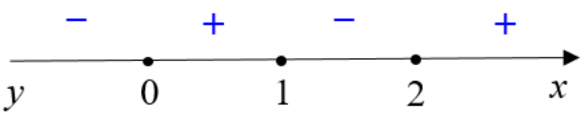
3. Определим интервалы знакопостоянства функции, для этого приравняем функцию к нулю и найдем корни уравнения:

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$,

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Отметим найденные корни уравнения на числовой оси и на полученных интервалах расставим знаки исходной функции.



Функция $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ принимает положительные значения при $x \in (0;1) \cup (2;+\infty)$ и отрицательные значения при $x \in (-\infty;0) \cup (1;2)$.

4. Найдем асимптоты графика функции.

Т.к. функция $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ определена на всем множестве действительных чисел, то вертикальных асимптот нет.

Найдем коэффициенты k и b наклонной асимптоты $y = kx + b$ при $x \to \pm\infty$

:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+2x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(x^2-3x+2)=+\infty.$$

Т.к. $k=+\infty$, то наклонных асимптот нет.

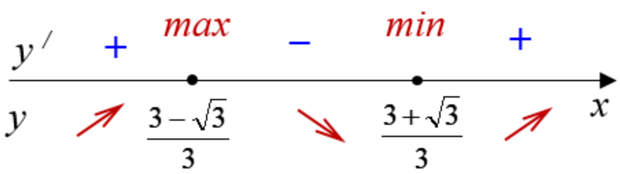
5. Исследуем функцию по первой производной.

Вычислим первую производную функции $y=x^3-3x^2+2x$, получим: $y'=3x^2-6x$.

Найдем критические точки первого порядка, приравняв первую производную к нулю:

$$y'=0 \Rightarrow 3x^2-6x+2=0,\ x_1=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}42,\ x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}58.$$

Исследуем знаки производной функции в окрестности критических точек.



При переходе через точку $x_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}42$ производная y' функции $y=x^3-3x^2+2x$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, x_1 – точка максимума.

При переходе через точку $x_2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}58$ производная y' функции $y=x^3-3x^2+2x$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, x_2 – точка минимума.

Вычислим приближенные значения функции в точках максимума и минимума:

$$y(x_1)\approx y(0{,}42)=0{,}42^3-3\cdot 0{,}42^2+2\cdot 0{,}42=0{,}38;$$

$$y(x_2)\approx y(1{,}58)=1{,}58^3-3\cdot 1{,}58^2+2\cdot 1{,}58=-0{,}38.$$

6. Исследуем функцию по второй производной:

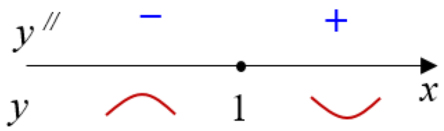
Вычислим вторую производную функции $y=x^3-3x^2+2x$, получим

$y'' = (3x^2 - 6x + 2)' = 6x - 6$.

Найдем критические точки второго порядка:

$y'' = 0 \;\Rightarrow\; 6x - 6 = 0,\; x = 1$.

Исследуем знаки второй производной функции в окрестности критических точек второго порядка.



На интервале (-∞; 1) функция является выпуклой вверх (выпуклой), на интервале (1; +∞) функция является выпуклой вниз (вогнутой). Т.к. при переходе через точку $x = 1$ функция $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ меняет свое поведение выпуклости и вогнутости, следовательно, точка $x = 1$ является точкой перегиба.

7. Отметим на координатной плоскости найденные точки и построим схематически график функции.

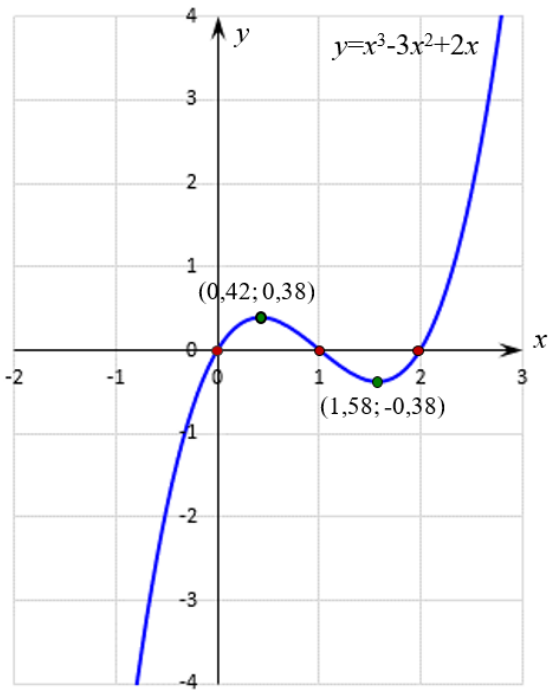


Рис. 12. График функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ по общей схеме.

Решение.

1. Областью определения функции является множество точек $D(x)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Т.к. $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2}{x^2-1}=y(x)$, то функция $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ – четная и ее график симметричен относительно оси ординат Ox.

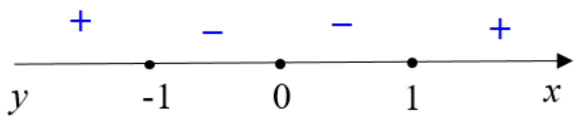
3. Определим интервалы знакопостоянства функции, для этого приравняем функцию к нулю и найдем корни уравнения:

$$\frac{x^2}{x^2-1}=0,$$

$x^2=0$, $x^2-1\neq 0$,

$x=0$, $x\neq -1$, $x\neq 1$.

Отметим найденные корни уравнения на числовой оси и на полученных интервалах расставим знаки исходной функции.



Функция $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ принимает положительные значения при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ и отрицательные значения при $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

4. Найдем асимптоты графика функции.

Т.к. исследуемая функция имеет разрывы в точках $x=-1$ и $x=1$, то найдем односторонние пределы в окрестности этих точек.

При $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{-2\cdot(-0)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1+0}\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{-2\cdot(+0)}=-\infty.$$

При $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty.$$

Следовательно, прямые $x=-1$ и $x=1$ являются вертикальными асимптотами.

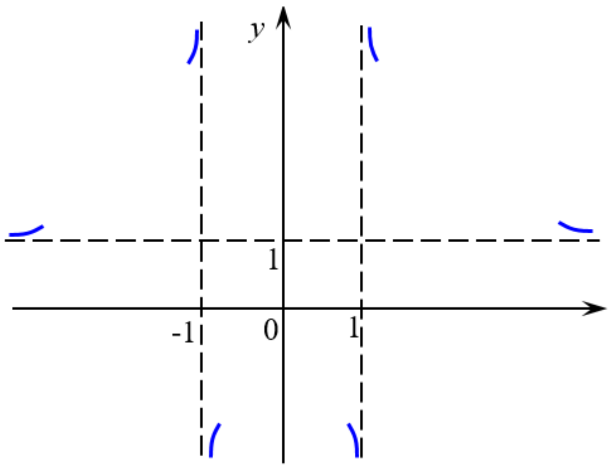
Найдем коэффициенты k и b наклонной асимптоты $y=kx+b$ при $x\to\pm\infty$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x^2-1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1.$$

Таким образом, график функции имеет наклонную (горизонтальную) асимптоту $y=1$.

Отметим найденные асимптоты на координатной плоскости.



5. Исследуем функцию по первой производной.

Вычислим первую производную функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$:

$$y'=\frac{(x^2)'\cdot(x^2-1)-(x^2)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

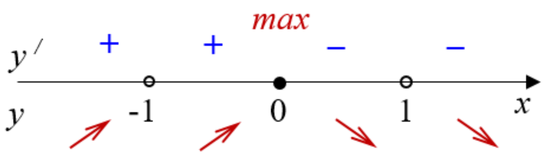
Найдем критические точки первого порядка:

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0,$$

$$-2x = 0,\ \left(x^2 - 1\right)^2 \neq 0,$$

$$x = 0,\ x \neq -1,\ x \neq 1.$$

Отметим найденные критические точки на числовой прямой. Исследуем знаки производной функции и найдем интервалы возрастания и убывания исследуемой функции.



При переходе через точку $x = 0$ производная y' функции $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $x = 0$ – точка максимума.

Значение функции в точке максимума: $y(0) = 0$.

6. Исследуем функцию по второй производной.

Вычислим вторую производную функции $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$, получим:

$$y'' = \left(-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)' = \frac{(-2x)' \cdot \left(x^2-1\right)^2 - (-2x)\cdot\left(\left(x^2-1\right)^2\right)'}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3};$$

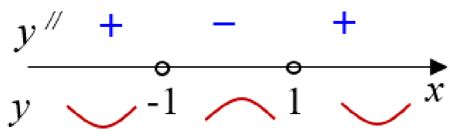
Найдем критические точки второго порядка:

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3} = 0,$$

$$6x^2 + 2 = 0,\ \left(x^2-1\right)^3 \neq 0,$$

$$x \neq -1,\ x \neq 1.$$

Отметим критические точки на числовой прямой. Исследуем знаки второй производной функции и найдем интервалы выпуклости, вогнутости исследуемой функции и точки перегиба.



На интервале $(-1;1)$ функция является выпуклой вверх (выпуклой), на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция является выпуклой вниз (вогнутой).

Т.к. точки $x=-1$ и $x=1$ являются точками разрыва, то они не являются точками перегиба.

7. Отметим на координатной плоскости найденные точки и построим схематически график функции.

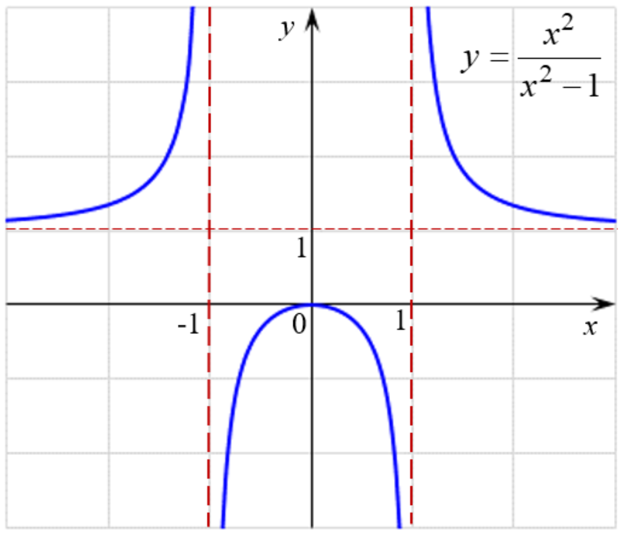


Рис. 13. График функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Пример. Исследовать функцию $y=(x-1)e^{3x+1}$ по общей схеме.

Решение.

1. Областью определения функции является множество точек $D(x)=(-\infty;+\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность и нечетность: $y(-x)=((-x)-1)e^{3(-x)+1}=-(x+1)e^{-3x+1}$.

Т.к. $y(-x)\neq -y(x)$ и $y(-x)\neq y(x)$, то функция $y=(x-1)e^{3x+1}$ – общего вида.

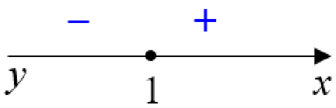
3. Определим интервалы знакопостоянства функции, для этого приравняем функцию к нулю и найдем корни уравнения:

$(x-1)e^{3x+1}=0$,

$x-1=0$,

$x=1$.

Отметим найденный корень уравнения на числовой оси и на полученных интервалах расставим знаки исходной функции.



Функция $y=(x-1)e^{3x+1}$ принимает положительные значения при $x\in(1;+\infty)$ и отрицательные значения при $x\in(-\infty;1)$.

4. Найдем асимптоты графика функции.

Т.к. функция $y=(x-1)e^{3x+1}$ определена на всем множестве действительных чисел, то вертикальных асимптот нет.

Найдем коэффициенты k и b наклонной асимптоты $y=kx+b$ при $x\to\pm\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^{3x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{3x+1}=+\infty,$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^{3x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{3x+1}=0.$$

Т.к. $k=+\infty$ при $x\to+\infty$, то наклонной асимптоты $x\to+\infty$ нет.

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{3x+1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{3x+1}=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-(3x+1)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-3e^{-(3x+1)}}=0.$$

Следовательно, при $x\to-\infty$ наклонная асимптота имеет вид: $y=0$.

5. Исследуем функцию по первой производной.

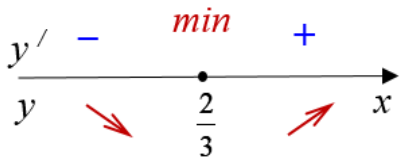
Вычислим первую производную функции $y=(x-1)e^{3x+1}$, найдем критические точки первого порядка и исследуем знаки производной функции.

$$y'=(x-1)'\cdot e^{3x+1}+(x-1)\cdot\left(e^{3x+1}\right)'=e^{3x+1}+(x-1)\cdot e^{3x+1}\cdot 3=e^{3x+1}(1+3x-3)=$$

$$= e^{3x+1}(3x-2);$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; e^{3x+1}(3x-2) = 0,\; x = \frac{2}{3} \approx 0{,}67.$$

Отметим найденный корень уравнения на числовой прямой и найдем интервалы возрастания и убывания исследуемой функции.



При переходе через точку $x = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ производная y' функции $y = (x-1)e^{3x+1}$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, найденная критическая точка является точкой минимума.

Вычислим приближенное значение функции в точке минимума:

$$y\left(\frac{2}{3}\right) \approx -6{,}7.$$

6. Исследуем функцию по второй производной.

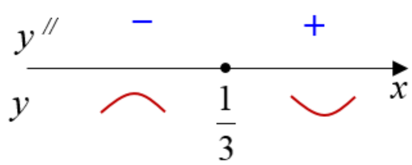
Вычислим вторую производную функции $y = (x-1)e^{3x+1}$, найдем критические точки второго порядка и исследуем знаки второй производной функции.

$$y'' = \left(e^{3x+1}(3x-2)\right)' = \left(e^{3x+1}\right)' \cdot (3x-2) + e^{3x+1} \cdot (3x-2)' =$$

$$= 3e^{3x+1} \cdot (3x-2) + e^{3x+1} \cdot 3 = e^{3x+1}(9x-6+3) = e^{3x+1}(9x-3);$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; e^{3x+1}(9x-3) = 0,\; x = \frac{1}{3} \approx 0{,}3.$$

Отметим найденный корень уравнения на числовой прямой и найдем интервалы выпуклости, вогнутости исследуемой функции и точку перегиба.



На интервале $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ функция является выпуклой вверх (выпуклой), на интервале $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ функция является выпуклой вниз (вогнутой).

Точка $x = \frac{1}{3} \approx 0{,}3$ является точкой перегиба.

Вычислим приближенное значение функции в точке перегиба:

$y\left(\frac{1}{3}\right) \approx -4{,}9$.

7. Отметим на координатной плоскости найденные точки и построим схематически график функции.

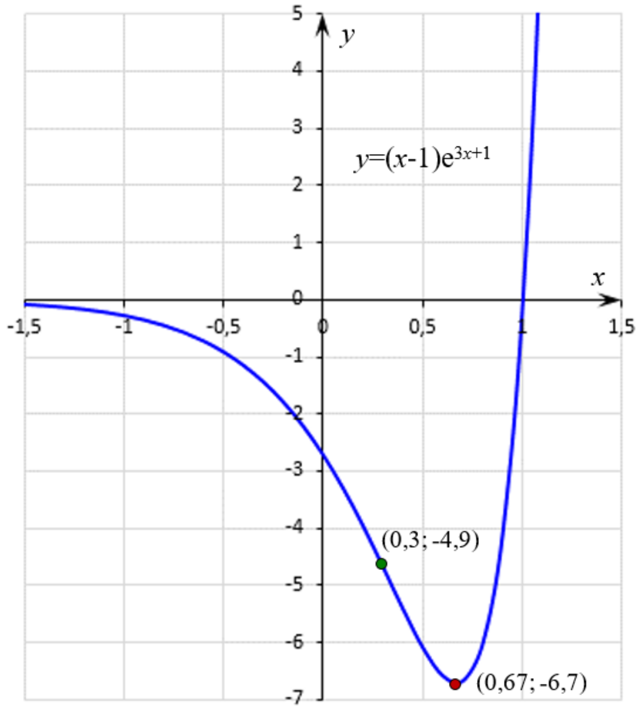


Рис. 14. График функции $y = (x-1)e^{3x+1}$.

2.2.6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

На практике часто встречаются задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке. Как известно, функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения она принимает либо в критических точках внутри отрезка, либо на концах отрезка.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$ следует осуществлять по следующему алгоритму:

1) вычислить первую производную функции $y=f(x)$ и найти критические точки функции на интервале $(a;b)$;

2) вычислить значения функции в этих критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка $[a;b]$, т.е. найти $f(a)$ и $f(b)$;

4) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+3x-2$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение. Вычислим первую производную функции $y(x)$:

$y'=3x^2-6x+3$.

Найдем критические точки, т.е. точки в которых $y'=0$:

$3x^2-6x+3=0$, $x=1$.

Т.к. $x=1\in[-1;2]$, то вычислим значение функции в этой точке: $y(1)=-1$.

Вычислим значения функции на концах отрезка: $y(-1)=-9$, $y(2)=0$.

Из всех найденных значений выберем наименьшее и наибольшее. Таким образом, получаем: $y_{наим.}=-9$ при $x=-1$ и $y_{наиб.}=0$ при $x=2$.

Задание для самостоятельной подготовки

Задание 1. Найти предел функции, используя правило Лопиталя:

1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+x-1}{x^3-x-4}$,

1.2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$,

1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 6x}$,

1.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tg 5x}$,

1.5. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x)$,

1.6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{28x^4+18x^2-6}{5x^4+8}$,

1.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{29x^4+17x^3}{5^{4x}}$,

1.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(4x)}{x}$,

1.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{26x^5-14x^3}{8x^5+6x^3}$,

1.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{22x^7+17x^3-2}{7x^6-4x^5}$,

1.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{6x}-1}{4x}$,

1.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3x+5)}{\ln(x^2+2)}$.

Ответы.

1.1. 2; **1.2.** 6; **1.3.** 7/6; **1.4.** 3/5; **1.5.** 0; **1.6.** 5,6; **1.7.** 0; **1.8.** 4; **1.9.** -2,3333; **1.10**. -5,5; **1.11.** 1,5; **1.12.** 0,5.

Задание 2. Найти нули функции $y(x)$.

2.1. $y=4x-5$;

2.2. $y=1-3^{x-7}$;

2.3. $y=\dfrac{x+6}{x-6}$;

2.4. $y=x^2-25$;

2.5. $y=\lg(x^2-15)$;

2.6. $y=\dfrac{x^2-4x-21}{x-7}$.

Ответы:

2.1. $x=1{,}25$; **2.2.** $x=7$; **2.3.** $x=-6$; **2.4.** $x_1=-5$, $x_2=5$; **2.5.** $x_1=-4$, $x_2=4$; **2.6.** $x=-3$.

Задание 3. Найти интервалы знакопостоянства функции $y(x)$.

3.1. $y=\dfrac{x^2+3x-40}{x^2}$;

3.2. $y=\dfrac{x+9}{x^2-16}$;

3.3. $y=\dfrac{x^2+14x+33}{x^2+11x}$.

Ответы:

3.1. $y(x)>0$ при $x\in(-\infty;-8)\cup(5;+\infty)$, $y(x)<0$ при $x\in(-8;0)\cup(0;5)$;
3.2. $y(x)>0$ при $x\in(-9;-4)\cup(4;+\infty)$, $y(x)<0$ при $x\in(-\infty;-9)\cup(-4;4)$;
3.3. $y(x)>0$ при $x\in(-\infty;-11)\cup(-11;-3)\cup(0;+\infty)$, $y(x)<0$ при $x\in(-3;0)$.

Задание 4. Найти вертикальные и наклонные асимптоты функции $y(x)$.

4.1. $y=\dfrac{x+4}{x-4}$;

4.2. $y=\dfrac{x^2-7}{17x^3}$

4.3. $y = \dfrac{8x^2 + x + 26}{x^2 - 64}$;

4.4. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 8x + 12}$;

4.5. $y = \dfrac{6x - 9}{2x + 8}$;

4.6. $y = \dfrac{x^2 - 8}{15x^3}$;

4.7. $y = \dfrac{8x^2}{x + 7}$;

4.8. $y = \dfrac{5x^3 - x}{x^2 + 8}$.

Ответы:

4.1. Вертикальная асимптота: $x = 4$, наклонная асимптота: $y = 1$ – горизонтальная; **4.2.** Вертикальная асимптота: $x = 0$, наклонная асимптота: $y = 0$ – горизонтальная; **4.3.** Вертикальная асимптота: $x_1 = -8$, $x_2 = 8$, наклонная асимптота: $y = 8$ – горизонтальная; **4.4.** Вертикальная асимптота:

$x = -6$, наклонная асимптота: $y = 1$ – горизонтальная; **4.5.** Вертикальная асимптота: $x = -4$, наклонная асимптота: $y = 3$ – горизонтальная;
4.6. Вертикальная асимптота: $x = 0$, наклонная асимптота: $y = 0$ – горизонтальная; **4.7.** Вертикальная асимптота: $x = -7$, наклонная асимптота:

$y = 8x - 56$; **4.8.** Вертикальной асимптоты нет, наклонная асимптота: $y = 5x$.

Задание 5. Найти интервалы монотонности функции:

5.1. $y = e^{2x}$;

5.2. $y = \dfrac{4x}{4 - x^2}$;

5.3. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;

5.4. $y = (x - 1)e^{3x+1}$;

5.5. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x}$;

5.6. $y = x\ln x$.

Ответы:

5.1. $y(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$; **5.2.** $y(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$; **5.3.** $y(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$, $y(x)$ убывает при $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; **5.4.** $y(x)$ возрастает при $x \in \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$, $y(x)$

убывает при $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; **5.5.** $y(x)$ убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$; **5.6.** $y(x)$ убывает при $x \in (0; e)$, $y(x)$ возрастает при $x \in (e; +\infty)$.

Задание 6. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y(x)$.

6.1. $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$; **6.2.** $y = \frac{6}{x^2 - 81}$; **6.3.** $y = \frac{x^2 - 14x + 74}{x - 7}$.

Ответы:

6.1. $y(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$, $y(x)$ убывает при $(-1; 5)$; **6.2.** $y(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -9) \cup (-9; 0)$, $y(x)$ убывает при $x \in (0; 9) \cup (9; +\infty)$; **6.3.** $y(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; 2) \cup (12; +\infty)$, $y(x)$ убывает при $x \in (2; 7) \cup (7; 12)$.

Задание 7. Найти экстремумы функции $y(x)$.

7.1. $y = 108x - x^4$; **7.2.** $y = 6x^2 + 72x + 9$;

7.3. $y = x^3 - 3x^2 - 72x + 34$; **7.4.** $y = \frac{x^2 - 16x + 36}{x}$.

Ответы:

7.1. $x_{\max} = 3$, $y_{\max} = 243$; **7.2.** $x_{\min} = -6$, $y_{\min} = -207$; **7.3.** $x_{\max} = -4$, $y_{\max} = 210$; $x_{\min} = 6$, $y_{\min} = -290$; **7.4.** $x_{\max} = -6$, $y_{\max} = -28$; $x_{\min} = 6$, $y_{\min} = -4$.

Задание 8. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции $y(x)$, точки перегиба.

8.1. $y = 2x^3 - 24x^2 + 44x - 31$; **8.2.** $y = x^4 - 20x^3 - 1026x^2 - 5x + 41$;

8.3. $y = \frac{4}{x^2 - 25}$.

Ответы:

8.1. $y(x)$ выпукла при $x \in (-\infty; 4)$, $y(x)$ вогнута при $x \in (4; +\infty)$, $x = 4$ – точка перегиба; **8.2.** $y(x)$ выпукла при $x \in (-9; 19)$, $y(x)$ вогнута при $x \in (-\infty; -9) \cup (19; +\infty)$, $x_1 = -9$, $x_2 = 19$ – точки перегиба; **8.3.** $y(x)$ выпукла при $x \in (-9; 9)$, $y(x)$ вогнута при $x \in (-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$, точек перегиба нет.

Задание 9. Найдите координаты точки перегиба функции:

9.1. $y = x^3 + 9x^2 + 3x - 2$, **9.2.** $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 1$,

9.3. $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 7$, **9.4.** $y = 4x^3 - 12x^2 + 9x - 3$.

Ответы:

9.1. $(-3;43)$; **9.2.** $(2;-5)$; **9.3.** $(-0{,}5;8)$; **9.4.** $(1;-2)$.

Задание 10. Исследовать функции по общей схеме и построить графики функций.

10.1. $y = x^3 - 2x^2 - 33x + 90$; **10.2.** $y = \dfrac{-8x + 4}{2x - 11}$;

10.3. $y = \dfrac{1}{x^2 - 36}$; **10.4.** $y = \dfrac{x^2 - 16x + 100}{x - 8}$;

10.5. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; **10.6.** $y = \dfrac{2x + 1}{x^2}$.

Задание 11. Найти наименьшее значение функции $f(x) = -x^2 + 8x - 16$ на отрезке $[0;5]$.

Ответ: -16.

Задание 12. Найти наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 4x + 4$ на отрезке $[0;3]$.

Ответ: 4.

Задание 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

13.1. $y = xe^{-2x}$, $[0;1]$; **13.2.** $y = x^3 - 6x^2 + 2$, $[-2;2]$;

13.3. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $[0;4]$; **13.4.** $y = 3x^4 - 12x^2 + 5$, $[-2;1]$.

Ответы:

13.1. $y_{наим.} = e^{-2}$, $y_{наиб.} = 0$; **13.2.** $y_{наим.} = -30$, $y_{наиб.} = 2$; **13.3.** $y_{наим.} = -1$, $y_{наиб.} = 0{,}6$; **13.4.** $y_{наим.} = -7$, $y_{наиб.} = 5$.

3. Применение дифференциального исчисления в экономике

Дифференциальное исчисление является широко применяемым математическим аппаратом в экономическом анализе. Одной из основных задач экономического анализа является изучение связей между экономическими величинами, которые могут быть записаны в виде функций. Этот метод позволяет анализировать изменения в экономике, предсказывать тенденции и оптимизировать принятие решений в бизнесе и управлении предприятием.

3.1. Предельные величины

Под *предельным значением* показателя в экономическом анализе принято понимать производную функции этого показателя (если эта функция непрерывна).

Если издержки производства y рассматривать как функцию выпускаемой продукции x, т.е. $y = C(x)$, то $y' = C'(x)$ будет выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции.

Средние издержки являются издержками на единицу выпуска продукции: $y_{cp} = \frac{C(x)}{x}$.

Необходимо отметить, что *прибыль* определяется по формуле

$$P(x) = D(x) - C(x), \tag{24}$$

где $D(x)$ – доход от производства x единиц продукта, $C(x)$ – функция издержек.

Для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо чтобы предельный доход и предельные издержки были равны, т.е. $D'(x) = C'(x)$.

Оптимальным значением выпуска для производителя является то значение x единиц продукта, при котором прибыль $P(x)$ оказывается наибольшей.

Пример. Функция издержек имеет вид $C(x) = 70 + 0{,}1x^2$. Найти предельные издержки и вычислить их значение в точке $x = 25$.

Решение. Вычислим производную функции издержек и найдем ее значение в точке $x = 25$.

$C'(x) = \left(70 + 0{,}1x^2\right)' = 0{,}2x$;

$C'(25) = 0{,}2 \cdot 25 = 5$.

Пример. Спрос на некоторый товар зависит от цены р и определяется функцией $D(p) = \dfrac{100}{\sqrt{p}} - \dfrac{1}{4}$. Найти скорость изменения спроса, если цена $p = 100$

.

Решение. Вычислим производную функции спроса и найдем ее значение в точке $p = 100$.

$$D'(p) = \left(\frac{100}{\sqrt{p}} - \frac{1}{4}\right)' = -\frac{50}{p\sqrt{p}};$$

$$D'(100) = -\frac{50}{100\sqrt{100}} = -0{,}05.$$

Пример. Найти предельную выручку $R(x) = 2x - 0{,}01x^2$.

Решение. Вычислим производную функции $R(x)$:

$$R'(x) = \left(2x - 0{,}01x^2\right)' = 2 - 0{,}02x.$$

Пример. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид: $y(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250$ (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значение при $x = 10$.

*Решение. Н*айдем производную $y'(x)$ и ее значение в точке $x = 10$:

$$y'(x) = \left(0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250\right)' = 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 5;$$

$$y'(10) = 0{,}3 \cdot 10^2 - 2{,}4 \cdot 10 + 5 = 11.$$

Средние издержки:

$$y_{cp} = \frac{C(x)}{x} = \frac{0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250}{x} = 0{,}1x^2 - 1{,}2x + 5 + \frac{250}{x};$$

$$y_{cp}(10) = 0{,}1 \cdot 10^2 - 1{,}2 \cdot 10 + 5 + \frac{250}{10} = 28.$$

Это означает, что при данном уровне производства (количестве выпускаемой продукции) средние затраты на производство одной единицы продукции составляют 28 ден. ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме приближенно в 11 ден. ед.

3.2. Производительность труда

Пусть функция $y = y(t)$ определяет количество произведенной продукции *y* за время *t*. Найти производительность труда в момент $t = t_0$.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $y_0 = y(t_0)$ до значения $y_0 + \Delta y = y(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за период времени Δt равна $z_{ср.} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$. Очевидно, что производительность труда в момент t_0 определяется как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \tag{25}$$

– предельная производительность труда.

Следовательно, *производительность труда* есть скорость изменения количества произведенной продукции за единицу времени.

Следует заметить, что вторая производная от количества произведенной продукции по времени является *ускорением для данной функции,* или *скоростью для производительности труда за единицу времени*.

Пример. Определена зависимость объема произведенной продукции $Q(t) = -0{,}2t^3 + 2t^2 + 50t + 61$ (ед.) от времени *t* (ч.) на интервале значений $1 \le t \le 8$. Найти производительность труда через час после начала работы и за два часа до ее окончания.

Решение. Найдем производительность труда, вычислив первую производную функции $Q(t)$: $Q'(t) = -0{,}6t^2 + 4t + 50$.

Вычислим производительность труда через час после начала работы, т.е. при $t = 1$: $Q'(1) = -0{,}6 + 4 + 50 = 50{,}64$.

Вычислим производительность труда за два часа до окончания работы, т.е. при $t = 8 - 2 = 6$: $Q'(6) = -0{,}6 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 50 = 53{,}4$.

3.3. Эластичность экономических показателей

Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции $y(x)$ к относительному приращению аргумента x при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \quad (26)$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y=f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Замечание. Если $|E_x(y)| > 1$, то функция эластична. Если $0 < |E_x(y)| < 1$, то функция не эластична. Если $|E_x(y)| = 1$, то функции называется нейтральной.

Пример. Найти эластичность функции спроса $p + 5x = 100$ в точке p=50.

Решение. Преобразуем функцию спроса: $x = \dfrac{100 - p}{5}$.

Найдем коэффициент эластичности:

$$E_p(x) = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{x} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right).$$

Вычислим коэффициент эластичности при p=50:

$$E(50) = \frac{50}{\left(\dfrac{100 - 50}{5}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1.$$

Пример. Зависимость между спросом q и ценой p за единицу продукции, выпускаемой некоторым предприятием, дается соотношением $q = 18 - \sqrt{p}$. Найти эластичность спроса и выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене за единицу продукции можно дать руководителям предприятия при p=100 и p=150 ден. ед.?

Решение. Найдем коэффициент эластичности:

$$E_p(q)=\frac{p}{q}\cdot q'=\frac{p}{18-\sqrt{p}}\cdot\left(18-\sqrt{p}\right)'=\frac{p}{18-\sqrt{p}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)=-\frac{\sqrt{p}}{2\left(18-\sqrt{p}\right)}.$$

Спрос нейтрален, если $\left|E_p(q)\right|=1$, т.е. $\left|-\frac{\sqrt{p}}{2\left(18-\sqrt{p}\right)}\right|=1$.

Т.к. $p>0$ и $q>0$, то $18-\sqrt{p}>0$, $\sqrt{p}<18$, $p<324$.

Следовательно, $0<p<324$.

Таким образом, получаем:

$$-\frac{\sqrt{p}}{2\left(18-\sqrt{p}\right)}=-1,$$

$$\sqrt{p}=2\left(18-\sqrt{p}\right),$$

$$\sqrt{p}=36-2\sqrt{p},$$

$$3\sqrt{p}=36,$$

$$\sqrt{p}=12,$$

$$p=144.$$

Следовательно, если $0<p<144$, то спрос не эластичен; если $p=144$, то спрос нейтрален; если $144<p<324$, то спрос эластичен.

При цене на единицу продукции 100 ден. ед. спрос является неэластичным. Следовательно, можно повысить цену продукции, выручка при этом будет расти. При стоимости продукции 150 ден. ед. спрос является эластичным. Целесообразно рассмотреть предложение о снижении цены, выручка от реализации будет расти в результате увеличения спроса на продукцию.

Пример. Для некоторого товара определены функция спроса $D=7-p$ и функция предложения $S=p+1$. Найти: 1) равновесную цену; 2) эластичность спроса и предложения для этой цены.

Решение.

1) Найдем равновесную цену p:

$D = S$, $7 - p = p + 1$, $p = 3$.

2) Вычислим эластичность спроса и предложения для этой цены:

$$E_p(D) = p\frac{D'}{D} = p \cdot \frac{-1}{7-p} = \frac{p}{p-7},\ E_p(D) = -0{,}75;$$

$$E_p(S) = p\frac{S'}{S} = p \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1},\ E_p(S) = 0{,}75.$$

Задание для самостоятельной подготовки

Задание 1. Определить максимальную прибыль, которую получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене за единицу *p* и известен вид функции издержек *C*(*x*).

1.1. $C(x) = 10 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$, $p = 10{,}5$; **1.2.** $C(x) = 8 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}$, $p = 6{,}5$;

1.3. $C(x) = 2x + \frac{1}{20}e^{\frac{x}{2}}$, $p = 40$.

Ответы:

1.1. 90; **1.2.** 0; **1.3.** 76(ln1920-1).

Задание 2. Найти эластичность функции спроса $p^2 + p + 4x = 40$ в точке *p*=4.

Ответ: -1,8.

Задание 3. Для функции спроса $x = 50(10 - \sqrt{p})$ найти цену *p*, при которой функция спроса является эластичной.

Ответ: $44\frac{4}{9} < p < 100$.

Задание 4. Зависимость издержек производства *C* от объема выпускаемой продукции *q* определяется формулой $C(x) = 40q - 0{,}03q^3$ ден.ед. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $q = 15$ ден.ед.

Ответ: 33,25; 19,75.

Задание 5. Установлена зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции $C(q) = 90q - 0{,}04q^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $q = 20$ ден. ед.

Ответ: 42.

Задание 6. Для некоторого товара определены спрос $D = \dfrac{p+10}{p+1}$ и предложение $S = p + 2$. Найти: 1) равновесную цену; 2) эластичность спроса и предложения для этой цены.

Ответ: $p = 2$, $E_p(S) = 0{,}5$, $E_p(D) = -0{,}5$.

Задание 7. Определены функции дохода $R(Q) = 1200 - 20Q + 17Q^2$ и издержек $C(Q) = Q^3 - 16Q^2 + 43Q - 2100$. Исследовать функцию прибыли и построить ее график.

Задание 8. Объем продукции q, произведенной бригадой рабочих может быть описан уравнением $q = -\dfrac{5}{3}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, $1 \le t \le 7$. Вычислить производительность труда за каждый час работы.

Ответ:

t	1	2	3	4	5	6	7
$q'(t)$	110	110	100	80	50	10	-40

Задание 9. Объем произведенной продукции зависит от времени $Q = Q(t)$, $1 \le t \le 8$. Найти производительность труда: 1) чрез t часов после начала работы; 2) через час после начала работы и за два часа до ее окончания.

9.1. $Q(t) = 0{,}2t^3 + 32t^2 + 47t + 285$, $t = 4$;

9.2. $Q(t) = -0{,}1t^3 + 28t^2 + 34t + 145$, $t = 3$;

9.3. $Q(t) = -0{,}5t^3 + 22t^2 - 19t + 136$, $t = 5$;

9.4. $Q(t) = -0{,}4t^3 + 42t^2 + 51t + 225$, $t = 4$.

Ответы:

9.1. $Q'(1)=111{,}6$; $Q'(4)=312{,}6$; $Q'(6)=452{,}6$; **9.2.** $Q'(1)=89{,}7$; $Q'(3)=199{,}3$; $Q'(6)=359{,}2$; **9.3.** $Q'(1)=1{,}5$; $Q'(5)=53{,}5$; $Q'(6)=59$; **9.4.** $Q'(1)=133{,}8$; $Q'(4)=367{,}8$; $Q'(6)=511{,}8$.

Задание 10. Определена функция издержек производства $C=C(Q)$ ден. ед. Найти средние и предельные издержки для объема продукции Q_0 ед.

10.1. $C=46Q-0{,}03Q^3$, $Q_0=5$; **10.2.** $C=38Q-0{,}02Q^3$, $Q_0=4$;

10.3. $C=57Q-0{,}04Q^3$, $Q_0=6$; **10.4.** $C=62Q-0{,}07Q^3$, $Q_0=7$.

Ответы:

10.1. 43,75; 45,25; **10.2.** 37,04; 37,68; **10.3.** 52,68; 55,56; **10.4.** 51,71; 58,57.

Задание 11. По функциям спроса $D=D(p)$ и предложения $S=S(p)$. Найти: 1) равновесную цену p_0; 2) эластичность спроса и предложения для равновесной цены.

11.1. $D=\dfrac{p+94}{p+10}$, $S=p+3$; **11.2.** $D=\dfrac{p+69}{p+9}$, $S=p+3$;

11.3. $D=\dfrac{p+63}{p+8}$, $S=p+3$; **11.4.** $D=\dfrac{p+47}{p+7}$, $S=p+2$.

Ответы:

11.1. 4; -0,2449; 0,5714; **11.2.** 3; -0,2083; 0,5; **11.3.** 3; -0,2273; 0,5; **11.4.** 3; -0,24; 0,6.

Литература

1. Богомолов, Н.В. Математика: учебник / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2013.

2. Красс, М.С. Математика для экономистов: учеб. пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2008. – 464 с. – (Учебное пособие). – ISBN 978-5-94723-672-9. – Текст: непосредственный.

3. Математика (часть II): метод. указания по выполнению самостоятельной работы / сост. И.В. Ариничева, И.А. Петунина. – Краснодар: КубГАУ, 2021. – 88 с.

4. Михайленко, Е.В. Математика: курс лекций. Ч. 3. Математический анализ / Е.В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2020. – 90 с. – ISBN 978-5-9266-1615-3. – Текст: непосредственный + Текст: электронный. – http://ebs.libkrumvd.ru/elib/5992/, требуется авторизация.

5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.

6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / Под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2005. – 575 с.

7. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2001. – 479 с.: ил. - ISBN 5-06-003959-5. – Текст: непосредственный.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Составители:
Старостенко Игорь Николаевич
Хромых Анна Алексеевна

В авторской редакции

ISBN 978-5-9266-2034-1

9 785926 620341

Подписано в печать 25.06.2024. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 5,0. Тираж 100 экз. Заказ 254.

Краснодарский университет МВД России.
350005, г. Краснодар, ул. Ярославская, 128.