

МВД России
Санкт-Петербургский университет

Л. В. Большакова, К. Д. Сибаров, Н. А. Яковлева

**ПРИМЕНЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ
В НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2025

УДК 338.27

ББК 65.050

Б79

Большакова Л. В., Сибаров К. Д., Яковлева Н. А.

Б79 Применение временных рядов в научно-практических исследованиях :
учебное пособие / Л. В. Большакова, К. Д. Сибаров, Н. А. Яковлева. —
Санкт-Петербург : СПбУ МВД России, 2025. — 128 с.

ISBN 978-5-00277-009-0

EDN: NWBPJV

Учебное пособие «Применение временных рядов в научно-практических исследованиях» подготовлено в соответствии с программами учебных дисциплин «Эконометрика» и «Математические методы анализа экономических процессов» по специальности «Экономическая безопасность» (38.05.01), а также программой учебной дисциплины «Математические методы исследования социальных систем в области региональной и отраслевой экономики» по научной специальности «Региональная и отраслевая экономика» (5.2.3).

Издание включает в себя разделы, связанные с основными этапами исследования временных рядов для дальнейшего моделирования и прогнозирования динамики статистических показателей социально-экономических явлений и процессов.

Предназначено для курсантов, слушателей и адъюнктов образовательных организаций системы МВД России при изучении ими разделов, в которых рассматриваются социально-экономические явления и процессы в виде временных рядов, моделирование и прогнозирование их экономических показателей в динамике.

УДК 338.27

ББК 65.050

Рецензенты:

Меньших В. В., доктор физико-математических наук, профессор
(Воронежский институт МВД России);

Леонов А. П., кандидат юридических наук
(Уральский юридический институт МВД России)

ISBN 978-5-00277-009-0

© Санкт-Петербургский университет
МВД России, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАЗДЕЛ I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ.....	8
§ 1.1. Понятие, элементы и правила построения временного ряда, классификация рядов	9
§ 1.2. Составляющие уровней и виды моделей временного ряда	17
РАЗДЕЛ II. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ (построение и анализ)	33
§ 2.1. Основные этапы построения и анализа модели временного ряда	33
§ 2.2. Предварительный анализ временного ряда.....	35
§ 2.3. Исследование трендовой составляющей	47
§ 2.4. Исследование сезонной составляющей	65
РАЗДЕЛ III. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ.....	82
§ 3.1. Проверка адекватности полученной модели.....	82
§ 3.2. Понятие прогноза, виды прогнозов и их точность	93
§ 3.3. Понятие точечного и интервального прогнозов	99
§ 3.4. Адаптивные методы прогнозирования	105
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	118
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	119
ПРИЛОЖЕНИЯ	122

ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей при исследовании экономических процессов является изучение различных экономических показателей, значения которых изменяются во времени. Особенности этих изменений можно изучать по определенным данным, которые характеризуют эти показатели за ряд промежутков времени или на ряд моментов времени, следующих друг за другом.

Ряд значений экономических (статистических) показателей, которые расположены в хронологической последовательности, образуют временной или динамический ряд.

Данное учебное пособие включает в себя разделы, связанные с основными этапами исследования временных рядов для дальнейшего моделирования и прогнозирования динамики статистических показателей социально-экономических явлений и процессов.

Методы исследования временных рядов и в дальнейшем прогнозирование по рядам широко применяются во многих областях знаний, при этом анализ процессов экономического развития, оценка эффективности, финансового состояния и финансовой устойчивости этих процессов производится как на микро-, так и на макроуровнях.

Можно ожидать, что в ближайшие годы важность исследования данных временных рядов будет возрастать, так как возрастает число экономических процессов, которые могут быть описаны с помощью временных рядов.

Очевидно, что анализ временных рядов и прогнозирование по ним становится более эффективным и целесообразным при использовании прикладного программного обеспечения, так как в этом случае существенно ускоряется проведение расчетов. К основным программным

продуктам, которые успешно применяются при анализе социально-экономических процессов, представляемых временными рядами, можно отнести стандартные пакеты прикладных программ, такие как MS Excel, STATISTIKA, ОЛИМП, SPSS, STATGRAPHICS и другие.

Анализ временных рядов по сути сводится к ответу на вопрос: как развитие какого-либо процесса в прошлом повлияет на то, что будет в будущем. Такие вопросы могут рассматриваться не только в качестве части раздела теории временных рядов, но и в рамках отдельной проблемы или дисциплины. Поэтому решение различных проблем, т. е. различные разделы науки, внесли свой особый вклад в возникновение новых понятий и методов теории временных рядов. Из таких отраслей знаний особо можно отметить медицину, метрологию, астрономию и, конечно, экономику. Темпы развития этих областей непосредственно были связаны с теми понятиями и методами теории временных рядов, которые имелись на данный момент времени.

Потребность обращения к временным рядам и необходимость делать экономические прогнозы появилась во время эпизодических банковских кризисов в Соединенных Штатах Америки и в Европе в конце 19-го и в начале 20-го веков. Исследователи того времени считали, что экономику можно представить в виде циклической системы, а поведение экономических процессов рассматривать как аналогию с погодными явлениями. Таким образом для экономики также можно было делать прогнозы и предотвращать нежелательные явления. Такие надежды привели к созданию государственных и частных институтов, которые отслеживали и анализировали данные. Эти ранние попытки сделать различные прогнозы способствовали возникновению новых экономических показателей, а также их представлению

в таблицах, по которым можно было проводить их дальнейший анализ. Эти показатели используются и сейчас.

В настоящее время в большинстве развитых стран работает множество исследователей на государственном и частном уровне, основная задача которых состоит в правильной регистрации различных данных и в предоставлении этих данных для общественного пользования. Эта практика оказала огромное влияние на предсказания экономического роста и возможность предотвращения экономических катастроф.

Предлагаемое издание «Применение временных рядов в научно-практических исследованиях» состоит из введения, трех разделов и заключения. Приведены необходимые статистические таблицы, а также список литературы.

Первый раздел посвящен основным понятиям, которые используются в теории временных рядов. В нем рассмотрены: понятие, элементы и виды временных рядов, основные правила построения временного ряда, составляющие уровней ряда и виды моделей.

Второй раздел связан с построением и анализом модели временного ряда. Описаны основные этапы анализа. Вначале рассмотрен предварительный анализ ряда, включающий проверку уровней ряда на аномальность, определение структуры ряда по коэффициентам автокорреляции уровней ряда, а также приведены основные показатели динамики временного ряда. Далее рассмотрены следующие этапы анализа, связанные с исследованием трендовой и сезонной составляющих.

Третий раздел включает последние этапы анализа временного ряда, связанные с проверкой адекватности построенной модели и с построением точечного и интервального прогнозов.

В конце каждого раздела для самоконтроля приведены контрольные вопросы и тестовые задания, а также для некоторых разделов — задания для самостоятельной работы.

В конце работы приведены необходимые математико-статистические таблицы, а также список основной и дополнительной литературы.

Рисунки и таблицы в данной работе имеют двойную нумерацию, где первое число указывает номер раздела, второе — номер рисунка или таблицы в рассматриваемом разделе.

РАЗДЕЛ I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

При анализе взаимосвязей между различными экономическими показателями на основе статистических данных с применением математико-статистических методов используют два вида данных: перекрестные или пространственные данные и временные данные.

Пространственные данные, как правило, характеризуют значения различных показателей или показателей разных объектов в определенный момент времени. Например, для определенного числа банков фиксируются показатели, характеризующие кредитоспособность каждого банка. Моменты времени не являются факторными признаками, но они могут использоваться для составления выборки. Например, исследуется зависимость числа преступлений экономической направленности от уровня безработицы в определенном регионе за несколько прошедших лет.

В отличие от пространственных данных, временные данные характеризуют какое-либо свойство или признак объекта, возможно сам объект за несколько последовательных моментов (периодов) времени. Следовательно, временной показатель при использовании временных данных будет являться факторным признаком.

В зависимости от того, какие виды данных используются при построении эконометрической модели, модели делятся на пространственные, в которых используются пространственные данные, и модели временных рядов, построенные по временным данным.

Методы исследования пространственных моделей и моделей временных рядов существенно отличаются друг от друга. Прежде

всего, это отличие связано с тем, что наблюдения во временных рядах в отличие от наблюдений в пространственных моделях, как правило, нельзя считать независимыми. А это в свою очередь не позволяет полностью применить метод наименьших квадратов (МНК) для оценки параметров модели рядов динамики, потому что предпосылки метода наименьших квадратов не выполняются.

С помощью моделей временных рядов можно провести статистическое описание развития социально-экономических процессов во времени. Для исследования социально-экономических явлений могут быть использованы ежегодные, ежеквартальные, ежемесячные или ежедневные данные, для которых необходимо систематизировать моменты их получения. Упорядоченные по времени их получения статистические данные называются временными рядами или рядами динамики. Иногда их также называют хронологическими или динамическими рядами.

§ 1.1. Понятие, элементы и правила построения временного ряда, классификация рядов

Временной ряд (ряд динамики или динамический ряд) представляет собой множество значений некоторого фактора (признака, экономического показателя), которые получены за определенное число последовательных моментов (периодов) времени.

Таким образом, временной ряд можно представить в виде последовательности конкретных значений некоторого фактора или признака, которые упорядочены в порядке возрастания временного показателя, т. е. в хронологическом порядке.

Из определения временного ряда можно понять, что он содержит следующие два элемента — два показателя:

- 1) временной показатель — значение времени t ;
- 2) экономический показатель — значение исследуемого признака, соответствующего данному моменту времени, называемое уровнем ряда.

Уровни ряда будем обозначать $y(t)$ или y_t , $t = 1, 2, \dots, n$, где n — число уровней. Число уровней иногда называют длиной временного ряда. Временной ряд конечной длины, несмотря на ограниченное количество информации, можно использовать для того, чтобы выяснить механизм, который привел к появлению ряда, проанализировать структуру ряда, выявить его характерные особенности и, наконец, что наиболее важно, предсказать будущее развитие.

Временной ряд может быть представлен в виде таблицы, состоящей из двух строк: в первой строке фиксируется время, во второй — значение исследуемого экономического показателя для данного момента времени. Например, данные, которые отражают прибыль предприятия в усл. ед. за семь лет можно записать в виде следующего временного ряда:

Таблица 1.1

Год, t	1	2	3	4	5	6	7
Прибыль, y_t	32,4	28,5	43,1	42,7	45,2	46,1	47,0

Значения исследуемого признака $y(t)$ или y_t , т. е. значения уровней ряда, как правило, что было отмечено ранее, в отличие от значений признака в пространственных моделях, не являются независимыми друг от друга. Например, при исследовании величины прибыли

предприятия за несколько последовательных месяцев, прибыль за конкретный месяц, скорее всего, будет зависеть от значения прибыли, полученной за предыдущие месяцы.

Вид временного показателя, называемого «временным фактором» или «моментом времени» зависит от условия конкретной задачи. Значениями временного показателя могут приниматься либо конкретные даты, т. е. конкретные моменты времени, либо какие-то периоды времени, например недели, месяцы, годы и т. п. В зависимости от того, как определяется временной показатель, существуют моментные и интервальные ряды.

Моментным называется такой ряд, в котором его уровень — это значение исследуемого показателя, зафиксированного на конкретную дату, т. е. на определенный момент времени. Моментными временными рядами являются, например, ряды в которых уровень ряда характеризует цену на какой-то товар или курс акций на фиксированный момент времени.

В частности, моментным рядом будет ряд, уровень которого характеризует данные об остатках задолженности предприятия по кредиту:

Таблица 1.2

Показатель на конец месяца, t	28.01	28.02	28.03	28.04	28.05	28.06	28.07
Тыс. руб. yt	150	140	135	130	120	100	90

Временной ряд, в котором уровень ряда определяет значение показателя за определенный момент времени, называют интервальным временным рядом. Например, к интервальным временным рядам можно отнести ряды, в которых уровень ряда определяет среднюю заработную плату предприятия за месяц, объем экспорта страны за

год и т. д. Примером интервального ряда может быть ряд, представленный в таблице 1.1.

Необходимо отметить ряд существенных отличий моментных и интервальных рядов.

Уровни моментного ряда нельзя суммировать или укрупнять. Это связано с тем, что одни и те же единицы рассматриваемой совокупности могут входить в разные уровни ряда. Например, если уровень ряда определяет число сотрудников фирмы на первое число каждого месяца или объем вкладов физических лиц в банке на начало года и т. д.

Для интервального ряда, особенно ряда абсолютных величин, значение каждого уровня может быть представлено как сумма некоторых данных, полученных в процессе исследования более коротких временных промежутков. В качестве примера можно привести данные по кварталу, которые могут быть представлены как сумма данных за соответствующие месяцы квартала. В этом состоит важное отличие моментных рядов от интервальных, т. е. сложение уровней интервального ряда возможно, и сумма имеет реальный смысловой показатель, который может определять суммарную прибыль, суммарный объем продаж, суммарный выпуск продукции и т. д.

Сумма уровней моментного ряда, как правило, не имеет реального смысла, это связано, в частности, с тем, что в отдельные уровни моментного ряда входят элементы повторного счета.

Если, как было отмечено, для моментного ряда сумма уровней лишена какого-то смысла, то разности уровней уже имеют смысл. Разности уровней могут характеризовать изменение показателя за определенный промежуток времени.

Для моментного ряда интервал времени определяет промежуток времени между датами, на момент получения данных. Для интервального ряда — это тоже промежуток, за который обобщены полученные данные. Отсюда следует, что для моментного ряда значение уровня не зависит от величины интервала, а для интервального ряда очевидна существенная зависимость значения уровня ряда от величины интервала.

Классификация временных рядов

Временные ряды могут классифицироваться и по следующим другим признакам.

В зависимости от способа определения значений уровней ряды делятся на ряды абсолютных, средних и относительных величин. Ряд, приведенный в таблице 1.1 — это ряд абсолютных величин.

Ряд, уровни которого определяют вложения банков в ценные бумаги, в процентах к активам банковского сектора является рядом относительных величин (см. таблицу 1.3):

Таблица 1.3

Момент времени, t	31.12. 2016	31.12. 2017	31.12. 2018	31.12. 2019	31.12. 2020	31.12. 2021
Величина вложений банков в ценные бумаги, в % к активам банковского сектора, y_t	18,9	19,7	18,8	16,3	16,7	15

Ряд, в котором расстояния между уровнями одинаково, называется рядом с уровнями, равноотстоящими по времени. Временной ряд называется рядом с неравноотстоящими уровнями, если расстояние — разное.

В зависимости от вероятностных свойств уровней ряды делятся на стационарные и нестационарные; в стационарных рядах, в отличие от нестационарных, вероятностные свойства уровней не меняются во времени.

Временные ряды, описывающие реальные экономические процессы, как правило, не являются стационарными, однако их можно преобразовать в стационарные, если исключить из уровней ряда систематическую составляющую, содержащую трендовую, сезонную и циклическую компоненту, о чем речь пойдет далее.

Адекватность выводов после статистического анализа показателей, являющихся уровнями временного ряда, зависит, прежде всего, от правильного построения самого временного ряда. Поэтому при составлении временных рядов должны быть выполнены определенные правила.

Основные правила построения временного ряда

Отметим ряд правил, которые необходимо учитывать при формировании временного ряда.

Немаловажное значение имеет правильный выбор значений временного показателя, а именно, определение временных интервалов, которые разделяют соседние уровни ряда. Более точные результаты могут быть получены для рядов с равноотстоящими соседними уровнями исследуемого ряда. В дальнейшем будут рассматриваться только такие ряды.

Ответ на вопрос о длине интервала должен учитывать цели конкретной исследуемой задачи. Последнее следует из следующих соображений. Если интервалы времени будут очень большие, то суще-

ственные особенности, характерные для изменения в динамике исследуемого ряда, могут быть пропущены. Например, очевидно, что для сезонных изменений уровней ряда по месяцам есть существенные особенности. Поэтому, если рассматривать квартальный интервал, то данные о месячных колебаниях получить достаточно сложно или просто невозможно.

Кроме этого, для применения некоторых математико-статистических методов анализа временных рядов требуется достаточно много информации, поэтому они могут быть неприменимы, если ряд содержит более крупные интервалы, т. е. информация окажется слишком «короткой».

С другой стороны, если временные интервалы будут слишком маленькими, то могут появиться всякие ненужные и несущественные для динамики развития процесса детали.

Одно из важнейших условий для построения правильного временного ряда — это условие, при котором уровни ряда должны быть сопоставимы друг с другом. Если это условие, условие сопоставимости, не выполнено, то анализ ряда проводить нельзя, тем более нельзя по такому ряду делать выводы.

Причины того, что уровни ряда окажутся несопоставимыми могут иметь различный характер. Несопоставимость возникает при изменении методики или формулы расчета исследуемого фактора, при изменении классификационных признаков, терминологии и т. д. Пусть, к примеру, значение уровня ряда равно числу «малых» предприятий. Однако к началу следующего года изменилось само понятие «малое» предприятие, тогда сравнение уровней до начала года и после невозможно, т. е. эти уровни являются несопоставимыми. Иссле-

дование изменения цены в различные периоды времени также может привести к несопоставимым уровням, поэтому при формировании такого временного ряда необходимо провести перерасчет уровней в сопоставимые цены, т. е. в цены одного периода.

Успешное изучение динамики по полученным данным исследуемого временного ряда требует, чтобы временной ряд имел достаточную длину, т. е. чтобы информация об исследуемом процессе была полной. Так, если значение уровня ряда носит периодический характер, т. е. зависит от сезона, то желательно, чтобы временной ряд содержал информацию, по крайней мере, за три полных периода.

Особое значение также имеет величина временных интервалов, необходимо, чтобы она соответствовала интенсивности изучаемого процесса. Увеличение вариации уровней во времени должно соответствовать увеличению частоты замеров. С другой стороны для некоторых процессов интервалы могут быть увеличены. Например, нет необходимости достаточно часто проводить и фиксировать перепись населения, можно в десять лет один раз. В то же время, понятно, что учет объема урожая необходим раз в год. Температуру воздуха можно регистрировать каждый час, а курсы покупки и продажи валюты фиксируются ежедневно.

Во временном ряду не должно существовать пропущенных уровней. Пропущенные уровни могут появиться, например, из-за каких-то ошибок или неточностей при сборе статистической информации, а также при различных изменениях в существующей системе отчетности. Если пропущенные уровни появляются между известными уровнями, то необходимо использовать методы восстановления информации, речь о которых пойдет далее.

И, наконец, временной ряд не должен содержать, так называемые аномальные уровни ряда, т. е. уровни, значения которых существенно отличаются от всех остальных. Аномальные уровни могут появиться, например, вследствие некоторых ошибок, которые были допущены при записи и передаче информации, а возможно и ранее при сборе информации. Применение методов исследования к рядам с аномальными уровнями может привести к существенному искажению результатов исследования. Само возникновение аномальных уровней не обязательно должно быть связано с различными ошибками. Появлению аномального уровня может способствовать и некое реальное развитие процесса, например, существенный скачок курса рубля. В этих случаях возможны некоторые поправки, которые должны учитываться в дальнейшем.

Проверка и учет описанных выше требований происходит на предварительном этапе исследования временного ряда. Затем переходят к рассмотрению следующих этапов, на которых производится расчет и анализ основных показателей динамики, решается задача построения моделей прогнозирования, а также получения прогнозных значений.

§ 1.2. Составляющие уровней и виды моделей временного ряда

Данные, по которым строится временной ряд, т. е. формируется каждый уровень ряда, содержат две основные компоненты: систематическую (регулярную, детерминированную) и случайную (шумовую).

К систематической относят факторы, которые действуют постоянно. Эти факторы образуют две составляющих: составляющую длительного долговременного действия (тренд) и составляющую кратко-

временного периодического действия (сезонная или циклическая). К случайной компоненте относят факторы, которые воздействуют на временной ряд нерегулярно и связаны с некоторыми ошибками (случайным шумом).

Одной из основных задач исследования временного ряда является выявление и анализ трендовой, циклической (сезонной) и случайной составляющих рассматриваемого временного ряда. Рассмотрим понятие каждой составляющей временного ряда, а также ее воздействие на уровень временного ряда в отдельности.

Трендовая составляющая

Основная тенденция ряда, трендовая составляющая или тренд $T(t)$, в дальнейшем $\hat{y}_t$, формируется под воздействием длительных, постоянно действующих факторов, оказывающих определяющее влияние на изучаемое явление. Или иначе, под трендом понимается изменение, которое определяет общее направление развития.

Как было отмечено ранее, тренд является частью систематической компоненты долговременного действия, по нему определяется чистое влияние долговременных факторов, например, рост акций, рост населения, прибыли предприятия и т. д. Тренд представляет собой линейную или нелинейную функцию, которая изменяется в течение времени и описывает чистое влияние факторов долговременного действия.

Если рассмотреть по отдельности факторы, которые формируют трендовую составляющую, то их воздействие на значение уровня ряда, т. е. на исследуемый показатель, может быть разнонаправленно. Однако общее их влияние может привести к формированию опреде-

ленной тенденции — линейной или нелинейной, убывающей или возрастающей.

На рис. 1.1 представлен временной ряд, содержащий только трендовую составляющую (линейную возрастающую тенденцию), циклическая, сезонная и случайная составляющие отсутствуют.

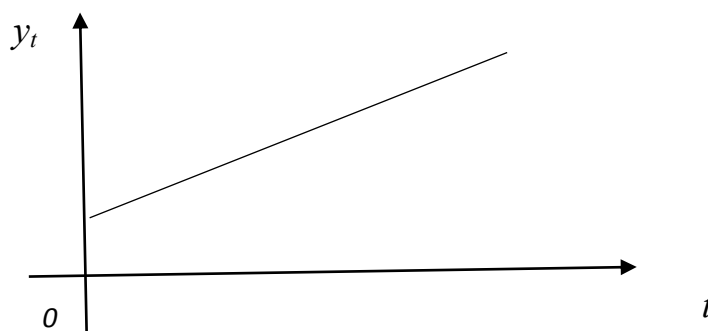


Рис. 1.1.

Сезонная или циклическая составляющая

Сезонная или циклическая $S(t)$ составляющая формируется под воздействием кратковременных, периодических факторов и отражает повторяемость экономических процессов в течение определенных периодов времени. Компонента называется циклической, если период ее колебания больше чем один год; сезонной, если меньше, чем год.

Возникновение сезонной составляющей, чаще всего, связано с природно-климатическими условиями, например изменения (колебания) цен на сельхозпродукцию осенью, зимой, весной и летом или изменение уровня безработицы, который на различных курортах зимой выше по сравнению с летним периодом. Причины возникновения сезонной составляющей могут иметь и социальный характер, например увеличение закупок в предпраздничные дни.

Циклическая компонента может содержать демографические, инвестиционные и другие циклы, например волны экономической активности Кондратьева, циклы солнечной активности.

В дальнейшем будет исследоваться, в основном, сезонная составляющая.

На рис. 1.2 представлен временной ряд, содержащий только циклическую или сезонную составляющую, трендовая и случайная компоненты отсутствуют.

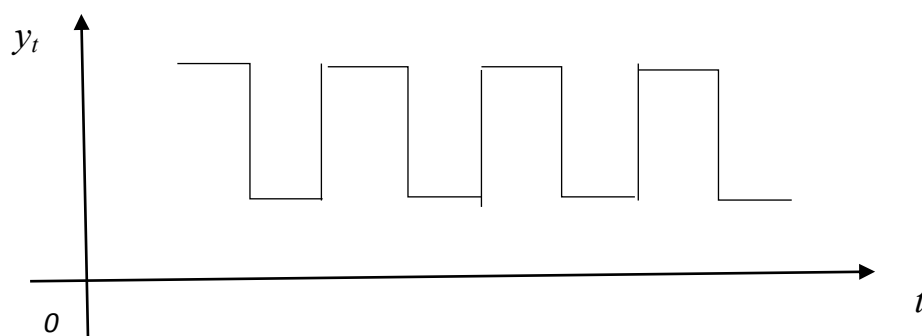


Рис. 1.2.

Случайная составляющая

В реальности можно привести примеры временных рядов, не содержащие трендовой и сезонной (циклической) составляющих, а каждый последующий уровень такого ряда формируется в виде суммы некоего среднего показателя и некоторой (положительной или отрицательной) величины, называемой случайной компонентой (составляющей).

Случайная составляющая $\varepsilon(t)$ отражает влияние, которое не поддается какому-то учету и регистрации, содержит случайные факторы, которые и формируют эту компоненту.

Все факторы, формирующие случайную составляющую, можно разделить на две группы: факторы, действия которых происходят внезапно и резко, и текущие факторы.

Факторы первой группы иногда называют катастрофическими, так как они способствуют большим отклонениям значений случайной составляющей. Такими факторами могут быть различные стихийные бедствия, эпидемии и т. д.

К факторам второй группы относятся факторы, которые отражают случайные изменения уровней ряда, при этом отдельный текущий фактор может незначительно влиять на значение случайной составляющей, но их суммарное воздействие может существенно ощущаться.

Пример ряда, который содержит только случайную компоненту, при отсутствии трендовой, циклической и сезонной составляющих, приведен на рис. 1.3.

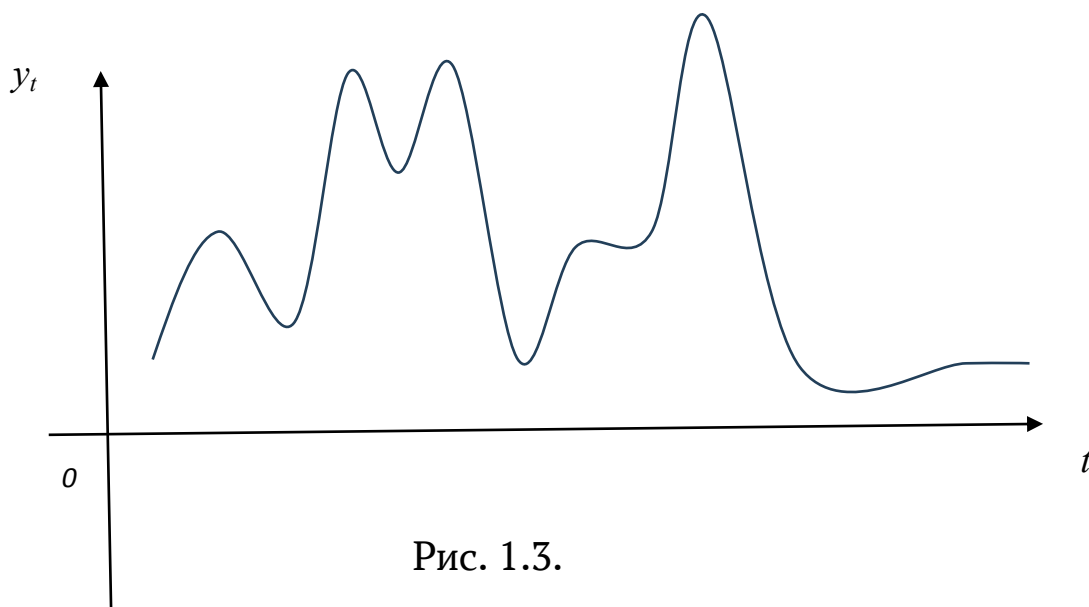


Рис. 1.3.

Виды моделей временного ряда

Нетрудно понять, что временной ряд, построенный на реальных данных конкретного экономического процесса, не может содержать только одну из описанных выше составляющих. Как правило, на фор-

мирование уровней ряда оказывают влияние все три составляющие, а именно, трендовая, сезонная или циклическая и случайная компоненты.

Чаще всего исследуемый фактический уровень временного ряда может быть представлен в виде суммы или произведения всех трех ранее рассмотренных составляющих.

Проведение правильного анализа исследуемого временного ряда позволит в дальнейшем использовать найденные результаты для получения, адекватного действительному положению дел, прогноза возможных последующих значений рассматриваемого ряда. Более того, полученные после анализа сведения могут также использоваться для построения и анализа моделей, которые исследует взаимосвязи нескольких временных рядов.

Существует несколько видов моделей временного ряда. Вид модели зависит от того, как связаны между собой его составляющие.

Модель временного ряда называется аддитивной, если уровень ряда представлен в виде суммы его составляющих, т. е.

$$y(t) = T(t) + S(t) + E(t).$$

Модель временного ряда называется мультипликативной, если уровень ряда представлен в виде произведения его составляющих, т. е.

$$y(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot E(t).$$

Существуют также модели смешанного типа, в которых уровни ряда представлены в виде:

$$y(t) = T(t) \cdot S(t) + E(t).$$

На выбор модели существенно влияет структура сезонных колебаний.

Если амплитуда сезонных колебаний приблизительно постоянна, то рекомендуется использовать аддитивную модель.

Для мультипликативной модели характерна зависимость уровней от значений сезонной составляющей, поэтому эту модель применяют для ряда, для которого имеет место возрастание или убывание амплитуды сезонных колебаний.

Общая задача анализа временного ряда обязательно включает построение аддитивной и мультипликативной моделей временного ряда.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение временного ряда, назовите его главные элементы.
2. Какие существуют виды временных рядов?
3. В чем отличие временных рядов от пространственных выборок?
4. По каким основным признакам происходит классификация временных рядов?
5. Приведите примеры временных рядов различных видов.
6. Каковы основные отличительные черты моментного и интервального рядов?
7. В чем суть основных требований, которые предъявляются к составлению временных рядов?
8. В чем суть понятия «сопоставимость уровней временного ряда»?
9. Какой из уровней временного ряда считается аномальным?
10. Из каких главных элементов формируется уровень временного ряда?
11. Дайте определение главных составляющих временного ряда.
12. В чем состоит суть трендовой составляющей?

13. Что характеризуют сезонная и циклическая компоненты временного ряда, в чем их отличие друг от друга?

14. Что включает в себя термин — систематические компоненты временного ряда?

15. Какая модель временного ряда называется аддитивной?

16. Какая модель временного ряда называется мультипликативной?

Тестовые задания

1. В следующих двух таблицах приведены примеры временных рядов.

Ряд № 1. Объем продаж рекламного времени на местной теле-студии за пять предыдущих недель:

Показатель	Номер недели				
	1	2	3	4	5
Рекламное время, мин.	238	125	923	85	166

Ряд № 2. Цены некоторой компании на момент закрытия торгов:

Показатель	Дата				
	05.10.22	07.10.22	10.10.22	15.10.22	23.10.22
Цены акций, долл.	238	125	923	85	166

Укажите, какой временной ряд является интервальным:

а) временной ряд № 1, уровни которого характеризуют объем продаж рекламного времени;

б) временной ряд № 2, уровни которого характеризуют цены акций компании на момент закрытия торгов;

в) пример интервального временного ряда отсутствует.

2. В следующих двух таблицах приведены примеры временных рядов.

Ряд № 1. Объем продаж рекламного времени на местной теле-студии за пять предыдущих недель:

Показатель	Номер недели				
	1	2	3	4	5
Рекламное время, мин.	238	125	923	85	166

Ряд № 2. Цены некоторой компании на момент закрытия торгов:

Показатель	Дата				
	05.10.22	07.10.22	10.10.22	15.10.22	23.10.22
Цены акций, долл.	238	125	923	85	166

Укажите, какой временной ряд является моментным:

- а) временной ряд № 1, уровни которого характеризуют объем продаж реального времени;
- б) временной ряд № 2, уровни которого характеризуют цены акций компании на момент закрытия торгов;
- в) пример моментного временного ряда отсутствует.

3. Уровни временного ряда представлены в виде:

$$y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon(t),$$

где

$T(t)$ — трендовая составляющая;

$S(t)$ — сезонная компонента;

$\varepsilon(t)$ — случайная составляющая.

Такое представление является:

- а) мультипликативной моделью;
- б) аддитивной моделью;
- в) моделью смешанного типа.

4. Уровни временного ряда представлены в виде:

$$y(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot \varepsilon(t),$$

где

$T(t)$ — трендовая составляющая;

$S(t)$ — сезонная компонента;

$\varepsilon(t)$ — случайная составляющая.

Такое представление является:

а) мультипликативной моделью;

б) аддитивной моделью;

в) моделью смешанного типа.

5. Уровни временного ряда представлены в виде:

$$y(t) = T(t) \cdot S(t) + \varepsilon(t),$$

где

$T(t)$ – тренд;

$S(t)$ – сезонная компонента;

$\varepsilon(t)$ – случайная составляющая.

Такое представление является:

а) мультипликативной моделью;

б) аддитивной моделью;

в) моделью смешанного типа.

6. Рассматривается экономический процесс, в котором имеются периодические колебания с периодом в три месяца. Тогда уровень ряда обязательно содержит:

а) сезонную составляющую;

б) случайную составляющую;

в) трендовую составляющую;

г) циклическую составляющую.

7. Рассматривается экономический процесс, в котором имеются периодические колебания с периодом в пять лет. Тогда для описания этого процесса будет использоваться:

- а) сезонная составляющая;
- б) случайная составляющая;
- в) трендовая составляющая;
- г) циклическая составляющая.

8. Тенденция временного ряда характеризует совокупность факторов (один вариант ответа):

- а) оказывающих долговременное влияние и формирующих общую динамику изучаемого показателя;
- б) оказывающих сезонное воздействие;
- в) не оказывающих влияние на уровень ряда;
- г) оказывающих единовременное влияние.

9. Компонентами временного ряда являются (укажите несколько вариантов ответа):

- а) тренд;
- б) коэффициент автокорреляции;
- в) лаг;
- г) циклическая (сезонная) компонента.

10. Аддитивную модель временного ряда формировать следующие значения компонент уровня ряда (укажите один вариант ответа):

- а) $y_t = 7; T = 7,5; S = 0; E = -0,5;$
- б) $y_t = 7; T = 6,5; S = 0; E = -0,5;$
- в) $y_t = 7; T = 3,5; S = 2; E = 1;$
- г) $y_t = 7; T = 3,5; S = -2; E = -1.$

11. Мультипликативную модель временного ряда могут формировать следующие значения компонент уровня ряда (укажите один вариант ответа):

а) $y_t = 7; T = 7,5; S = 0; E = -0,5;$

б) $y_t = 7; T = 6,5; S = 0; E = -0,5;$

в) $y_t = 7; T = 3,5; S = 2; E = 1;$

г) $y_t = 7; T = 3,5; S = -2; E = 1.$

12. Для стационарного временного ряда трендовая компонента ...

а) отсутствует;

б) линейно зависит от времени;

в) нелинейно зависит от времени;

г) присутствует.

13. Временным рядом является совокупность значений (выберите несколько вариантов ответа) ...

а) экономического показателя за несколько последовательных моментов (периодов) времени;

б) экономического показателя для однотипных объектов на определенный момент времени;

в) последовательных моментов (периодов) времени и соответствующих им значений экономического показателя;

г) экономических однотипных объектов по состоянию на определенный момент времени.

14. Аддитивная модель содержит компоненты в виде ...

а) сомножителей;

б) комбинации слагаемых и сомножителей;

в) отношений;

г) слагаемых.

15. Мультипликативная модель содержит компоненты в виде ...

- а) сомножителей;
- б) комбинации слагаемых и сомножителей;
- в) отношений;
- г) слагаемых.

16. Смешанная модель временного ряда содержит компоненты в виде ...

- а) сомножителей;
- б) комбинации слагаемых и сомножителей;
- в) отношений;
- г) слагаемых.

17. В состав любого временного ряда, построенного по реальным данным, обязательно входит _____ компонента:

- а) трендовая (одна);
- б) случайная;
- в) сезонная;
- г) циклическая.

18. Значения эконометрических параметров, характеризующих различные экономические объекты в данный или один момент времени принято называть:

- а) пространственными данными;
- б) временными данными или рядами;
- в) детерминированными данными;
- г) корреляционными данными.

19. Значения эконометрических параметров, характеризующих один и тот же экономический объект в различные моменты времени, принято называть:

- а) пространственными данными;
- б) временными данными или рядами;
- в) детерминированными данными;
- г) корреляционными данными.

20. Переменные, значения которых датированы предыдущими моментами времени, называются:

- а) эндогенными;
- б) экзогенными;
- в) лаговыми;
- г) predetermined.

21. При моделировании этапы а) оценка параметров модели, б) спецификация модели (выбор формы модели), в) проверка адекватности модели, г) сбор статистической информации об объекте исследования располагаются в следующем хронологическом порядке:

- 1) б), г) а) в);
- 2) а), б), в), г);
- 3) б), г), в), а);
- 4) а), б), г), в).

22. Плавная меняющаяся компонента временного ряда, отражающая влияние на экономические показатели долговременных факторов, называется:

- а) трендом;
- б) сезонной компонентой;
- в) циклической компонентой;
- г) случайной компонентой.

23. Компонента временного ряда, которая отражает колебания экономических показателей с периодом, равным одному году, называется:

- а) трендом;
- б) сезонной компонентой;
- в) циклической компонентой;
- г) случайной компонентой.

24. Компонента временного ряда, которая отражает колебания экономических показателей с периодом длиной в несколько лет, называется:

- а) трендом;
- б) сезонной компонентой;
- в) циклической компонентой;
- г) случайной компонентой.

25. Компонента временного ряда, которая отражает влияние, не поддающихся учету и регистрации случайных факторов, называется:

- а) трендом;
- б) сезонной компонентой;
- в) циклической компонентой;
- г) случайной компонентой.

26. Временной ряд называется стационарным, если:

- а) среднее значение членов ряда постоянно;
- б) члены ряда образуют арифметическую прогрессию;
- в) члены ряда образуют геометрическую прогрессию;
- г) среднее значение членов ряда постоянно растет.

27. Временной ряд является нестационарным, если:

- а) среднее значение членов ряда постоянно;
- б) его случайная составляющая зависит от времени;
- в) его члены не зависят от времени;
- г) его неслучайная составляющая зависит от времени.

28. Для временного ряда известны характеристики: среднее a и дисперсия D . Если временной ряд является стационарным, то ...

а) $a^2 = D$;

б) $D = \text{const}$;

в) $D \neq \text{const}$;

г) $a = D$.

29. Временной ряд — это совокупность показателей только за несколько:

а) последовательных часов;

б) последовательных дней;

в) последовательных лет;

г) последовательных периодов времени.

РАЗДЕЛ II. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ (построение и анализ)

Основные задачи анализа рассматриваемого временного ряда связаны с исследованием составляющих уровней ряда, а именно, трендовой составляющей, циклической или сезонной составляющих, а также случайной компоненты. Это исследование для каждой из вышеперечисленных компонент представляет собой решение ряда конкретных задач, в частности, выявление составляющей, а также нахождение для нее количественного выражения. Правильное решение задач, связанных с исследованием составляющих уровней временного ряда позволит построить адекватную действительности модель ряда, которая будет пригодна для дальнейшего прогнозирования будущих значений уровней ряда.

§ 2.1. Основные этапы построения и анализа модели временного ряда

Построение и анализ временных рядов состоит из следующих этапов:

1. Получение временных данных для построения временного ряда.
2. Построение временного ряда и его предварительный анализ.
3. Выделение и исследование трендовой составляющей временного ряда.
4. Выделение и исследование сезонной составляющей временного ряда.

5. Исследование случайной составляющей, которое необходимо для дальнейшего построения и проверки адекватности экономико-математической модели временного ряда.

6. Прогнозирование дальнейшего развития экономического процесса на основе полученной модели временного ряда.

При решении некоторых задач при необходимости добавляют этап, связанный с исследованием взаимосвязи между различными временными рядами.

На первом этапе собираются временные данные (выборка) для построения временного ряда с учетом ранее приведенных правил. Первый этап — это обязательный этап при построении любой экономико-математической модели при использовании выборочного метода математической статистики.

На втором этапе временные данные записываются в виде таблицы с учетом выполнения всех вышеперечисленных правил построения временного ряда. Для дальнейшего исследования бывает полезным на данном этапе представить графическое изображение временного ряда, например, в виде точечной диаграммы. Далее, на данном этапе проверяется наличие аномальных уровней. Затем анализируется структура ряда и предполагается нахождение значений основных показателей уровней ряда: прирост, темп роста и темп прироста.

На третьем и четвертом этапах, по сути, происходит построение самой модели, которое предполагает определение и исследование значений трендовой и сезонной составляющей. Основными задачами этих этапов являются:

— выяснение существования тенденции;

- выравнивание исходного ряда методом скользящей средней;
- аналитическое выравнивание уровней, получение уравнения тренда;
- расчет значений сезонной компоненты и ее устранение из исходных уровней.

Пятый этап связан с изучением возможности получения правильного прогноза по построенной модели. На этом этапе модель проверяется на адекватность. Основные задачи этого этапа связаны с исследованием случайной составляющей, в частности с проверкой наличия автокорреляции в остатках.

На шестом этапе строятся различные прогнозы (точечные и интервальные) относительно дальнейшего хода рассматриваемого экономического процесса.

Рассмотрим более подробно описанные этапы, начиная со второго.

§ 2.2. Предварительный анализ временного ряда

Предварительный этап начинается с проверки соответствия полученной исходной информации всем приведенным в первом разделе требованиям. Только после этого переходят к получению показателей динамики ряда, к построению моделей и решают задачи прогнозирования.

Сам предварительный анализ бывает полезным начинать с построения графика временного ряда, который может дать общее представление о динамике и каких-то особенностях исследуемого процесса. С помощью современных программных средств для временного ряда можно построить различные виды графиков. Чаще всего используют точечные или столбиковые диаграммы. Как правило, по виду

построенного графика временного ряда делают предварительные выводы, которые в дальнейшем проверяются с помощью расчетов. Например, по виду графика можно определить содержит ли временной ряд тренд, каков этот тренд, существуют ли сезонные или циклические составляющие и т. д.

На этапе предварительного анализа временного ряда необходимо выяснить имеются ли аномальные уровни. Если такие уровни существуют, то их требуется устранить. Опишем более подробно проверку существования аномального уровня ряда и возможные методы его устранения.

Достаточно часто аномальные уровни можно обнаружить уже по графику временного ряда. Однако существуют аналитические методы, которые более четко могут указать, является ли уровень ряда аномальным. Рассмотрим проблему аномальности уровня более подробно.

Аномальность уровней временного ряда

Предположим, что собраны временные данные, которые характеризуют некоторый социально-экономический процесс.

Предварительный анализ временного ряда начинают с проверки уровней ряда на аномальность.

Предположим, что по полученным временным данным построен следующий временной ряд:

Таблица 2.1

Время, t	t_1	t_2	...	t_n
Значение показателя, y_t	y_1	y_2	...	y_n

Аномальный уровень ряда — это отдельный уровень, значение которого является нехарактерным для динамики изучаемого показателя, процесса, явления. Аномальный уровень нельзя оставить неизменным, так как благодаря его значению могут существенно измениться значения основных характеристик исследуемого временного ряда, кроме этого, наличие такого уровня может повлиять на выбор и построение модели тренда.

Среди причин появления аномальных наблюдений, прежде всего, необходимо отметить ошибки первого рода, т. е. ошибки технического порядка. Такие ошибки могут возникнуть при передаче какой-либо статистической или любой другой информации, а также при объединении или, наоборот, при разъединении каких-то экономических показателей.

Причиной появления аномальных уровней, кроме перечисленных, может быть некоторое влияние факторов. Такое влияние или воздействие может проявляться крайне редко, т. е. эпизодами и при этом иметь объективный характер. Оно устранению не подлежит, и его связывают с ошибками второго рода.

Вопрос о существовании аномальных уровней во временном ряду может быть решен с помощью различных методов. Простейшим из которых являются визуальный просмотр и графический анализ. Для статистических совокупностей существуют специально разработанные методы, наиболее часто применяемым из которых является метод Ирвина.

Метод Ирвина

Метод Ирвина состоит из следующих шагов:

На первом шаге для некоторых или, возможно, для всех уровней исследуемого ряда, начиная со второго, определяется величина λ_t по следующей формуле:

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{S_y}, \text{ где } S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

На втором шаге определяется табличное значение критерия Ирвина для данного ряда λ_α . Величина этого критерия находится по соответствующей таблице (см. таблицу 2.2) и зависит от длины временного ряда, т. е. от числа уровней n и от величины вероятности ошибки первого рода, т. е. от уровня значимости α .

На третьем шаге расчетные значения $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, полученные для каждого уровня на первом шаге, сравниваются с табличным значением критерия Ирвина $\lambda_{кр}$.

Далее, для каждого уровня делается вывод об его аномальности на основании следующего правила:

Если найденное значение λ_t больше $\lambda_{кр}$, полученного из таблицы, то соответствующее значение y_t уровня ряда считают аномальным, в противном случае исследуемый уровень ряда аномальным не считается.

В следующей таблице приведены значения критерия Ирвина для двух наиболее часто используемых уровней значимости, а именно $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,01$:

Таблица 2.2

Число измерений n	Уровень значимости	
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Если после проверки для рассматриваемого ряда выявлено наличие аномальных уровней, то требуется некоторая корректировка этих уровней. Чаще всего корректировка состоит в замене значения аномального уровня на среднее арифметическое значение из двух соседних уровней. Возможна также замена на соответствующее значение кривой тренда, которая аппроксимирует данный временной ряд, о чем речь пойдет дальше.

Задача работы с аномальными уровнями на этом не заканчивается. Кроме их выявления необходимо установить причины появления этих уровней. Если появление аномальных уровней связано с ошибками первого рода, то они подлежат устранению способом, описанным ранее.

После устранения аномальных уровней выясняют приближенную структуру ряда. Кроме табличной формы, временной ряд можно представить графически, например, в виде точечной диаграммы. По графическому представлению можно сделать предварительный вывод о существовании и виде трендовой составляющей, о наличии сезон-

ных колебаний. На эти же вопросы можно ответить и с помощью коэффициентов автокорреляции.

Автокорреляция уровней временного ряда

Если временной ряд содержит тенденцию и циклические колебания, то, очевидно, что значение каждого следующего уровня будет зависеть от значений предыдущих уровней. Часто возникает необходимость при статистическом анализе оценить эту зависимость, т. е. зависимость исследуемого показателя от его же значений, но полученных с некоторым запаздыванием во времени. Такую зависимость, как правило, представляют в виде корреляционной взаимосвязи между исходным рядом $y_1, y_2, \dots, y_n$ и тем же самым рядом, но, который сдвинут относительно исходного данного ряда на определенное число моментов времени (k): $y_{1+k}, y_{2+k}, \dots, y_{n+k}$.

Корреляционная зависимость между последовательными уровнями временного ряда называется автокорреляцией уровней данного ряда.

Автокорреляция может быть измерена количественно. Количественной мерой является линейный парный коэффициент корреляции, который вычислен между значениями уровней данного исходного временного ряда и значениями уровней этого же ряда, но сдвинутыми во времени на несколько шагов.

Особо важное значение имеет автокорреляционная зависимость между последующими и предшествующими уровнями ряда, т. е. при сдвиге на один период времени. Это связано с тем, что условия применимости многих методов математической статистики, например, метода наименьших квадратов, предполагают независимость отдельных элементов (уровней) ряда между собой. Таким образом, при ис-

следовании временных рядов одной из важнейших задач является установление наличия и силы автокорреляции уровней.

Формула для расчета коэффициента автокорреляции между уровнями при сдвиге на один период времени имеет вид:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}},$$

где $\bar{y}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_t, \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_{t-1}.$

Коэффициент автокорреляции, вычисленный между уровнями, сдвинутыми на один период времени, называется коэффициентом автокорреляции уровней ряда первого порядка, так как он измеряет зависимость между соседними уровнями ряда y_t и y_{t-1} .

Аналогично можно определить коэффициенты автокорреляции второго и более высоких порядков. Так, коэффициент автокорреляции второго порядка характеризует тесноту связи между уровнями y_t и y_{t-2} и определяется по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}},$$

где $\bar{y}_3 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_t, \quad \bar{y}_4 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_{t-2}.$

При исследовании ряда важное значение имеет величина, которая характеризует число периодов, которые фиксируются при расчете коэффициента автокорреляции. Эта величина, т. е. число периодов, называется лагом.

Очевидно, что если увеличивать число периодов, то число пар значений, которые необходимы для расчета коэффициентов автокорреляции, будет уменьшаться. Принято считать, что максимальное значение лага не должно превышать $n/4$, чтобы была достигнута статистическая достоверность коэффициентов автокорреляции.

Для определения структуры ряда применяют особую функцию, называемую автокорреляционной.

Автокорреляционной функцией временного ряда называется зависимость между лагом и значением соответствующего коэффициента автокорреляции. График автокорреляционной функции называется коррелограммой.

По анализу автокорреляционной функции и коррелограммы можно определить структуру рассматриваемого ряда. Прежде всего, определяется лаг, при котором коэффициент автокорреляции имеет самое большое значение. По этому значению можно понять существует ли тенденция для данного временного ряда, а также имеются ли сезонные колебания и указать период этих колебаний.

Все эти выводы можно получить, исходя из свойств коэффициентов автокорреляции.

Свойства коэффициентов автокорреляции

1. Коэффициенты автокорреляции находятся аналогично тому, как находятся выборочные линейные коэффициенты корреляции и они также определяют существование и силу только линейной связи, но между текущим уровнем и предыдущими уровнями ряда.

2. Значения коэффициентов автокорреляции находятся в пределах от -1 до 1 .

3. Знак коэффициента корреляции, в отличие от линейного коэффициента корреляции, не позволяет делать вывод о существовании возрастающей или убывающей тенденции временного ряда.

Существуют примеры временных рядов значений экономических показателей, которые имеют убывающую тенденцию, но при этом найденный коэффициент автокорреляции первого порядка для этих рядов будет определяться положительным числом.

4. По значениям коэффициентов автокорреляции может быть предварительно определена структура временного ряда, а именно,

— если из всех коэффициентов автокорреляции самым большим по величине окажется коэффициент автокорреляции первого порядка, то анализируемый ряд содержит только линейную или близкую к линейной тенденцию;

— если из всех коэффициентов автокорреляции самым большим по величине окажется коэффициент автокорреляции порядка τ , то исследуемый ряд содержит сезонные колебания, причем период этих колебаний будет равен τ ;

— если окажется, что ни один из коэффициентов автокорреляции не является достаточно большим, значимым, то в этом случае возможно два вывода: 1) исследуемый ряд содержит только случайную составляющую; 2) исследуемый ряд содержит достаточно сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой необходимо будет провести дополнительный анализ.

Рассмотрим пример. Предположим, что известны поквартальные данные об общем числе правонарушений (в усл. ед.) на таможне одного из субъектов Российской Федерации за четыре года:

Таблица 2.3

Год	Квартал	t	Количество возбужденных дел, y_t
2020	I	1	60
	II	2	44
	III	3	50
	IV	4	90
2021	I	5	72
	II	6	48
	III	7	60
	IV	8	100
2022	I	9	80
	II	10	56
	III	11	64
	IV	12	110
2023	I	13	90
	II	14	66
	III	15	70
	IV	16	108

Построим точечную диаграмму:

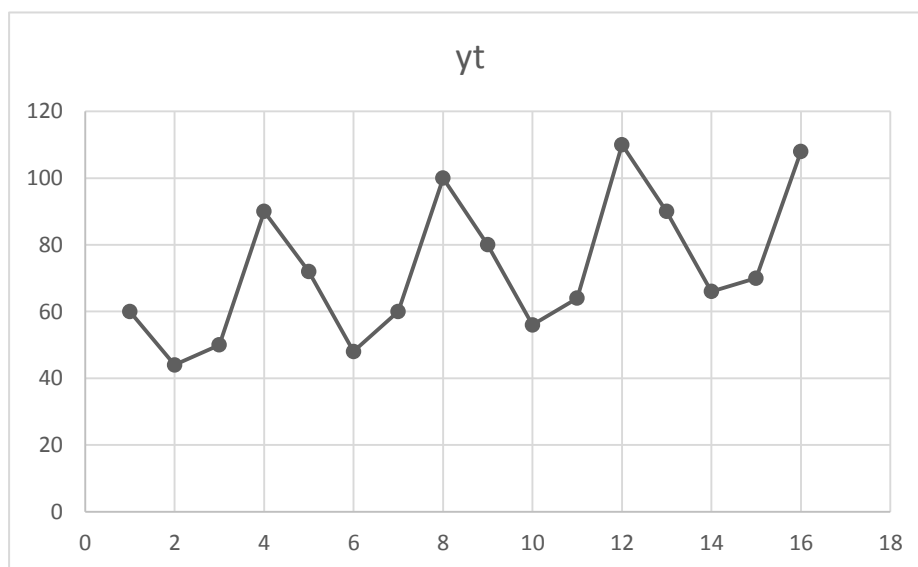


Рис. 2.1.

Очевидно, что для данного ряда существует некоторая сезонная составляющая. Подтвердим этот вывод с помощью коэффициентов

автокорреляции. Значения этих коэффициентов в зависимости от лага представлены в следующей таблице:

Таблица 2.4

Лаг	Коэффициент автокорреляции уровней
1	0,17
2	-0,57
3	0,11
4	0,98
5	0,12
6	-0,72
7	-0,003
8	0,97
9	0,097
10	-0,799
11	-0,08
12	0,97

Наибольшее значение имеет коэффициент автокорреляции четвертого порядка, следовательно, для данного ряда существует сезонная составляющая с периодом (лагом), равным 4. Данный вывод полностью согласуется с вышеприведенным графическим представлением временного ряда.

После того как определена приблизительная структура временного ряда для него находят значения статистических показателей, характеризующих скорость или интенсивность развития рассматриваемого явления во времени.

Основные показатели динамики экономического процесса

При исследовании динамики экономического процесса, модель которого представлена временным рядом, используются следующие основные показатели: абсолютные приросты, темпы роста и темпы прироста. Для расчета этих показателей используются формулы,

в основе которых лежит сравнение уровней ряда. Сравнить уровни можно двумя основными способами. При использовании первого способа фиксируется определенный уровень, который считается базовым, т. е. принимается за базу сравнения. Затем каждый уровень сравнивается с базовым. Рассчитанные по такому способу показатели будут называться базисными.

По второму способу происходит сравнение каждого предыдущего уровня с последующим. Показатели, вычисленные вторым способом, называются цепными. Кроме этого, существуют обобщающие показатели динамики, которые определяются как средние величины.

Формулы расчета вышеописанных показателей представлены в следующей таблице 2.5:

Таблица 2.5

	Прирост	Темп роста	Темп прироста
Цепной	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$	$T_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \cdot 100\%$	$K_t = T_t - 100\%$
Базисный	$\Delta y_t^{\bar{}} = y_t - y_0$	$T_t^{\bar{}} = \frac{y_t}{y_0} \cdot 100\%$	$K_t^{\bar{}} = T_t^{\bar{}} - 100\%$
Средний	$\overline{\Delta y} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$	$\bar{T} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100\%$	$\bar{K} = \bar{T} - 100\%$

Представленные показатели иногда используют для получения прогноза на один шаг вперед, при этом используют средний прирост, если есть основание считать, что трендовая составляющая имеет линейный вид, и средний темп роста, если динамика ряда приблизительно описывается показательной или экспоненциальной кривой, о чем речь пойдет далее. Кроме этого, описанные показатели могут использовать-

ся для восстановления информации, потерянной после применения выравнивания ряда (при применении метода скользящей средней).

После построения временного ряда, предварительного анализа, выявления его структуры и нахождения основных показателей динамики, переходят непосредственно к анализу временного ряда, т. е. решению задач третьего и четвертого этапов общей схемы.

§ 2.3. Исследование трендовой составляющей

Трендовая составляющая отражает основную долговременную тенденцию временного ряда. Поэтому ее выявление и анализ имеют большое теоретическое и практическое значение. Исследование трендовой составляющей включает в себя решение следующих задач: выявление тенденции во временном ряду, механическое и аналитическое выравнивание временного ряда.

Необходимо подчеркнуть, что при механическом выравнивании количественная модель не строится, а при аналитическом — строится. Естественно, что прежде чем строить и анализировать тренд, нужно вначале понять, существует ли он для рассматриваемого временного ряда.

Методы обнаружения тренда

Общепринятого способа обнаружения тренда во временном ряду не существует. Если же известно, что тренд устойчиво возрастает или наоборот устойчиво убывает, т. е. является монотонным, то для анализа такого ряда можно использовать графический анализ или визуальный просмотр. Исследование таких рядов особых трудностей не вызывает.

Для более четкого определения наличия тенденции во временном ряду существует много различных методов. Чаще всего, эти методы основаны на проверке соответствующих статистических гипотез. Рассмотрим более подробно некоторые из них.

Метод проверки разностей средних уровней

Перед применением этого метода временной ряд условно разбивают на две, приблизительно равные по числу уровней, части.

Пусть, например, первая часть, которую обозначим через Y_1 , содержит n_1 первых уровней первоначально данного исследуемого ряда, тогда вторая часть, обозначаемая через Y_2 , будет содержать $n_2 = n - n_1$ уровней. Каждую из двух полученных частей будем рассматривать как отдельную выборочную совокупность, и будем считать, что закон распределения этих частей является нормальным.

Далее, отдельно для каждой из двух частей вычисляются выборочные средние и дисперсии:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1} \quad \sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1} \\ \bar{y}_2 &= \frac{\sum_{t=n_1+1}^n y_t}{n_2} \quad \sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^n (y_t - \bar{y}_2)^2}{n_2 - 1}\end{aligned}$$

Нетрудно понять, что средние, найденные для рассматриваемых двух совокупностей не должны отличаться существенно друг от друга, если ряд не имеет тенденции. Отсюда следует, что проверка наличия тренда, по сути, является проверкой статистической гипотезы о равенстве двух средних выборочных совокупностей, распределенных

по нормальному закону. Перед проверкой этой гипотезы необходимо проверить еще одну дополнительную гипотезу о равенстве или однородности дисперсий рассматриваемых выборочных совокупностей.

Проверку дополнительной гипотезы проводим по общей схеме со своим конкретным содержанием:

1. Основная гипотеза имеет вид $H_0: D(Y_1) = D(Y_2)$;

альтернативную выбираем из следующих двух $H_1: D(Y_1) > D(Y_2)$ или $H_1: D(Y_1) \neq D(Y_2)$.

2. Фиксируем уровень значимости α .

3. Для проверки этой гипотезы критерием является случайная величина F , которая имеет распределение Фишера–Снедекора; степени свободы определяются по формулам $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$, где n_1 и n_2 — объемы выборок.

4. Выборочное значение критерия находится по формуле:

$$F_{\text{в}} = \frac{S_{\text{б}}^2}{S_{\text{м}}^2},$$

где $S_{\text{б}}^2$ и $S_{\text{м}}^2$ — соответственно большее и меньшее из двух исправленных среднеквадратических отклонений.

5. Критическая область определяется по альтернативной гипотезе H_1 , а критические точки $F_{\text{кр.}}$ находятся по таблице критических точек распределения Фишера–Снедекора, используя следующее правило:

1) если альтернативной является гипотеза $H_1: D(Y_1) > D(Y_2)$, то значение критической точки $F_{\text{кр.}}$ зависит от α , k_1 и k_2 , где k_1 — число степеней свободы большей из исправленных дисперсий;

2) если альтернативной является гипотеза $H_1: D(Y_1) \neq D(Y_2)$, то значение критической точки $F_{\text{кр.}}$ зависит от $\alpha/2$, k_1 и k_2 , где k_1 — число степеней свободы большей из исправленных дисперсий.

6. Принимаем статистическое решение на основе общего правила: если выборочное значение критерия попадает в критическую область, то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий отклоняется, если не попадает, то — не отклоняется.

Для метода проверки разностей средних уровней делается следующий вывод:

Если гипотеза о равенстве дисперсий не отклоняется, то переходят к следующему этапу, а именно, к проверке гипотезы о равенстве генеральных средних двух совокупностей. Если же гипотеза о равенстве дисперсий отклоняется, то исследование в этой части заканчивается, т. е. делается вывод о том, что данный метод не может дать ответ о наличии тренда в рассматриваемом временном ряде. Следовательно, необходимо применить другой метод.

Предположим, что проверка выше рассмотренной гипотезы показала, что равенство дисперсий возможно. Тогда начинается второй этап метода проверки разности средних уровней, который включает проверку статистической гипотезы о равенстве генеральных средних.

Рассмотрим общую схему проверки гипотезы о равенстве средних.

1. Основная гипотеза имеет вид $H_0: M(Y_1) = M(Y_2)$; в качестве альтернативной принимается одна из следующих гипотез: $H_1: M(Y_1) > M(Y_2)$ или $H_1: M(Y_1) < M(Y_2)$ или $H_1: M(Y_1) \neq M(Y_2)$.

2. Определяем уровень значимости α .

3. Критерием проверки данной гипотезы служит случайная величина T , которая распределена по закону Стьюдента; число степеней свободы определяется по формуле $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

4. Выборочное значение критерия определяется по формуле:

$$T_{\text{в}} = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n n_1 + n_2}}.$$

5. Критическая область определяется по альтернативной гипотезе H_1 , а критические точки $t_{\text{кр.}}$ по таблице критических точек распределения Стьюдента, используя следующее правило: для двухсторонней области величина α выбирается в верхней строке таблицы, а для правосторонней и левосторонней — в нижней, при этом левосторонняя критическая точка имеет отрицательное значение.

6. Статистическое решение принимается на основе общего правила. Если выборочное значение попадает в критическую область, то гипотеза о равенстве средних отвергается, и тренд возможно существует. Если выборочное значение не принадлежит критической области, то гипотеза о равенстве средних не отвергается, что не подтверждает наличие тренда для рассматриваемого временного ряда.

Необходимо отметить, что приведенный выше метод применим только для рядов, в которых предполагается наличие монотонной убывающей или возрастающей тенденций.

Если временные ряды содержат значительную ошибку, то для выявления тренда можно использовать специальные приемы и методы, например метод Фостера–Стюарта.

Метод Фостера–Стюарта

Результаты, полученные по методу Фостера–Стюарта, являются более надежными. Кроме того, по этому методу можно выяснить, существует ли тренд дисперсии временного ряда, что необходимо знать при использовании результатов анализа временного ряда для

решения задач прогнозирования экономических процессов. Если в результате получен вывод об отсутствии тренда дисперсии, то можно считать разброс уровней ряда постоянным. В противном случае, если дисперсия увеличивается, то говорят, что ряд «раскачивается», тогда необходима корректировка ряда.

Метод Фостера–Стюарта, по сути, является проверкой статистической гипотезы об отсутствии тренда во временном ряде. Рассмотрим все шесть пунктов общей схемы проверки статистической гипотезы.

1. Основная гипотеза имеет вид:

H_0 : тренд отсутствует; альтернативная гипотеза не формулируется.

2. Определяем уровень значимости, чаще всего в экономических задачах, его полагают равным $\alpha = 0,05$.

3. Критерием проверки данной гипотезы служит случайная величина, которая распределена по закону Стьюдента.

4. Перед определением выборочного значения найдем следующие величины:

$$m_t = \begin{cases} 1, & y_t > y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1 \\ 0, & \text{в остальных} \end{cases}$$

$$l_t = \begin{cases} 1, & y_t < y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1 \\ 0, & \text{в остальных} \end{cases}$$

$$d_t = m_t - l_t \quad D = \sum d_t \quad T_H = \frac{D}{\sigma_D}$$

Для величины σ_D существует таблица, по которой для каждого объема выборки можно найти значение этой величины.

Таблица 2.6

n	σ_D	n	σ_D	n	σ_D	n	σ_D
10	1,964	35	2,509	60	2,713	85	2,837
15	2,153	40	2,561	65	2,742	90	2,857
20	2,279	45	2,606	70	2,769	95	2,876
25	2,373	50	2,645	75	2,793	100	2,894
30	2,447	55	2,681	80	2,816		

Однако существует и формула, позволяющая определить эту величину без таблицы:

$$\sigma_D = \sqrt{2 \sum_{t=2}^n \frac{1}{t}} = \sqrt{2 \ln n - 0,8456}$$

5. Критическая область является двусторонней и симметричной. Критическая точка $t_{кр}$ зависит от уровня значимости и числа степеней свободы $n - 1$ и находится по таблице распределения Стьюдента.

6. Статистический вывод состоит в следующем:

Если $|T_H| > t_{кр}$, то основная гипотеза отвергается и тренд присутствует. В противном случае нет основания отвергнуть нулевую гипотезу об отсутствии тренда.

Для обнаружения тренда может быть использован еще один метод, который носит название медианного.

Медианный метод

Медианный метод обнаружения тренда состоит из следующих шагов.

1. Значения уровней ряда ранжируются в порядке возрастания.

2. По ранжированному ряду определяется медиана Me , т. е. величина, которая делит ранжированный ряд уровней на две равные по числу элементов части.

3. Каждому уровню исходного ряда ставится в соответствии число 0 или 1 по следующему правилу:

$$y_t \rightarrow \begin{cases} 0, & y_t \leq Me \\ 1, & y_t > Me \end{cases}$$

4. Определяется число серий K и длина максимальной серии τ . Серией называется последовательность, состоящая только из нулей, или только из единиц.

5. Рассматривается выполнение двух неравенств:

$$\begin{cases} \tau < 1,43 \cdot \ln(1 + n) \\ K < \frac{n + 2}{2} + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{n - 1}{4}} \end{cases}$$

6. Формулируется вывод: если не выполнено хотя бы одно из двух описанных выше неравенств, то тренд существует. Если оба неравенства оказываются верными, то наличие тренда не подтверждается.

Если тренд выявить явно не удастся, то для временного ряда могут быть применены приемы сглаживания.

Сглаживание временных рядов

Для выявления возможной тенденции могут быть применены приемы сглаживания уровней временного ряда. Процесс сглаживания временного ряда применяется в том случае, когда тенденция развития экономического процесса скрыта случайными отклонениями уровней ряда в большую или меньшую сторону. Эти приемы делятся на две группы: механическое и аналитическое выравнивание.

Для механического выравнивания отдельных уровней используют процедуры усреднения данных по ряду и построение их сглаженных усредненных значений — метод скользящих средних.

Основное содержание всех методов механического сглаживания можно описать следующим образом. Вначале получают интервал сглаживания, для этого выбирают несколько первых уровней рассматриваемого временного ряда.

Для выбранных уровней строится полином (многочлен) фиксированной степени, при этом степень полинома не может быть больше числа уровней, по которым определен интервал сглаживания. Используя вид построенного полинома, определяют новое значение уровня, которое по сравнению с первоначальным будет более выровненным. Это значение записывают в новый столбец напротив старого уровня ряда, который находится в середине интервала сглаживания. После этого первый полученный интервал сглаживания сдвигают на один уровень вниз (или вправо), получая новый интервал сглаживания, с которым производят те же действия и т. д.

При аналитическом выравнивании строится линия, которая проходит между конкретными уровнями ряда — уравнение тренда.

Рассмотрим вначале более подробно методы механического сглаживания, в частности, метод скользящих средних.

Метод скользящих средних

Метод скользящих средних — это один из самых старых, простых и наиболее известных методов сглаживания временного ряда, в результате применения которого уровни ряда заменяются на их усредненные сглаженные значения.

Наиболее широкое применение метод скользящих средних находит либо в условиях, когда исследователь имеет дело с так называемыми короткими рядами, либо в условиях высокой нестабильности, хаотичности исследуемого экономического процесса.

Суть метода состоит в переходе от начальных исходных значений уровней к их средним значениям, которые определяются на конкретном интервале времени. Длина интервала должна быть определена заранее, при этом сам интервал как бы «скользит» вдоль ряда, сдвигаясь каждый раз на одну единицу вниз (или вправо). Полученный таким образом, новый временной ряд будет более сглаженным, чем исходный. Новые уровни ряда будут подвержены колебаниям в меньшей степени, чем исходные, т. е. дисперсия случайной составляющей будет существенно уменьшена за счет усреднения, что будет способствовать более четкому проявлению возможной тенденции развития рассматриваемого процесса.

При выборе интервала сглаживания ориентируются на следующее. Если это возможно из смыслового значения уровней ряда, то длину интервала сглаживания рекомендуется определять нечетным числом. Интервал сглаживания лучше выбирать побольше, если исследуемый ряд содержит некоторые мелкие беспорядочные колебания. Если, наоборот, требуется сохранить более мелкие колебания, то интервал сглаживания уменьшают.

Иногда метод скользящих средних рассматривают как предварительный этап перед применением методов аналитического выравнивания, т. е. перед построением уравнения тренда.

При применении метода скользящих средних используют простую или взвешенную скользящую среднюю.

Сглаживание временного ряда с применением простой скользящей средней происходит по следующей схеме:

1. Определяют длину интервала сглаживания l , т. е. число последовательных уровней ряда, для которых будет фиксироваться среднее значение.

2. Разбивают весь временной ряд на участки, но при этом сам интервал сглаживания «скользит» по ряду с шагом, равным 1.

3. Находят арифметические средние для уровней ряда, образующих участок.

4. Формируют новый ряд, заменяя исходные уровни ряда, стоящие в центре каждого участка, на соответствующие средние значения этого участка.

При использовании метода простой скользящей средней большое значение имеет определение длины интервала, на выбор которого влияет величина колебания уровней ряда. Необходимо еще раз отметить, что чем сильнее колебания уровней ряда, тем больше должна быть длина интервала, так как при более широком интервале сглаживания в большей степени погашаются колебания и тенденция приобретает более плавный характер. Однако, с другой стороны, при более широком интервале теряются значения большего числа первых и последних уровней ряда.

Кроме этого, как было отмечено ранее, наиболее удобно выбирать длину интервала в виде нечетного числа. В этом случае найденные средние арифметические четко приходятся на средний элемент участка сглаживания. Например, если $l = 3$, то среднюю арифметическую из трех уровней y_1, y_2, y_3 записывают вместо y_2 :

$$\bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

При данной процедуре сглаживания происходит полное устранение периодических колебаний в том случае, если длина интервала будет кратна периоду колебаний. Однако при наличии сезонных колебаний, чаще всего, период колебаний является четным числом (4, 6, 12 ...). В этом случае, т. е. когда длина интервала является четным числом, фиксируют число уровней на 1 больше и формулу для нахождения средней арифметической немного меняют, а именно, берут половину первого и последнего значений уровней на каждом участке. Например, если $l = 4$, то среднюю арифметическую берут из пяти уровней y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 и записывают вместо y_3 :

$$\bar{y}_3 = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5}{4}.$$

Нетрудно заметить, что при применении метода скользящей средней теряются значения нескольких первых и последних уровней ряда, что является существенным недостатком этого метода. Существует несколько приемов, с помощью которых можно восстановить потерянные значения. Рассмотрим один из них, использующий понятие среднего прироста.

Для восстановления потерянных значений последних уровней ряда нужно:

1. Вычислить значение среднего абсолютного прироста на последнем участке сглаживания по формуле:

$$\overline{\Delta y} = \frac{y_n - y_p}{l - 1},$$

где y_p — значение первого уровня на последнем участке.

2. Получить сглаженные значения потерянных последних уровней ряда путем последовательного прибавления среднего абсолютного прироста к последнему сглаженному значению.

Аналогично, вычитая значение среднего абсолютного прироста, можно получить потерянные первые значения уровней. При этом само значение $\overline{\Delta u}$ определяется на первом участке сглаживания.

Метод простой скользящей средней применяют тогда, когда графическое представление временного ряда близко к прямой линии. Если же трендовая составляющая имеет какие-то изгибы или мелкие волны, то выравнивание ряда с помощью простой скользящей средней нецелесообразно. Более того, ее применение в этом случае может привести к существенным искажениям реального процесса. В этом случае простая скользящая средняя заменяется на взвешенную.

При применении простой скользящей средней сглаживание на каждом участке происходит по прямой, а при применении взвешенной — по многочленам (полиномам) невысоких порядков, чаще всего второго и третьего.

Весовые коэффициенты при сглаживании по многочленам второго и третьего порядка могут быть найдены с применением метода наименьших квадратов. Их значения в зависимости от некоторых длин интервала сглаживания приведены в следующей таблице:

Таблица 2.7

Длина интервала сглаживания	Весовые коэффициенты
5	$\frac{1}{35} [-3, +12, +17]$
7	$\frac{1}{21} [-2, +3, +6, +7]$
9	$\frac{1}{231} [-21, +14, +39, +54, +59]$
11	$\frac{1}{429} [-36, +9, +44, +69, +84, +89]$
13	$\frac{1}{143} [-11, 0, +9, +16, +21, +24, +25]$

В таблице приведены значения для половины уровней сглаживаемого участка, так как веса симметричны относительно центрального уровня. Например, центральное значение первого участка при сглаживании по параболе второго порядка для длины интервала, равной 5 определяется по формуле:

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{35}(-3y_1 + 12y_2 + 17y_3 + 12y_4 - 3y_5).$$

Приведенные веса обладают следующими важными свойствами:

1. Веса симметричны относительно центрального (серединного) уровня.
2. Сумма всех весов равна 1 (с учетом множителя, вынесенного за скобки).
3. Существуют положительные и отрицательные веса, что позволяет новой сглаженной кривой учесть и сохранить возможные изгибы кривой тренда.

Как было отмечено ранее, кроме механического выравнивания уровней временного ряда, существует аналитическое выравнивание (сглаживание), при котором строится некоторая линия, проходящая между конкретными уровнями исследуемого ряда.

Аналитическое сглаживание временных рядов

Аналитическое сглаживание по своей сути является построением некоторой функции, называемой кривой роста, которая будет характеризовать зависимость значения исследуемого показателя от времени. Аналитическое сглаживание также иногда называют построением уравнения тренда или моделированием тенденции временного ряда.

По кривой роста получают такие значения уровней, которые наблюдались, если бы динамика рассматриваемого процесса полно-

стью совпадала с кривой. Кривая роста далее будет применяться для прогнозирования.

При моделировании тенденции временного ряда, т. е. при аналитическом сглаживании необходимо решить две задачи: определить вид уравнения тренда (кривой роста), форма которого должна наиболее полно соответствовать характеру изменения уровней временного ряда, и произвести оценку неизвестных параметров уравнения (кривой роста).

Очевидно, что зависимость значения показателя от времени может иметь разные виды, а следовательно, для ее описания могут быть использованы разные функции. Для построения трендов чаще всего применяются следующие функции:

линейный тренд: $\hat{y}_t = a + b \cdot t$;

гиперболический тренд: $\hat{y}_t = a + \frac{b}{t}$;

экспоненциальный тренд: $y_t = e^{a+bt}$ (или $y_t = a \cdot b^t$);

степенной тренд: $y_t = a \cdot t^b$;

полиномиальный тренд: $y_t = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \dots + b_m \cdot t^m$.

Для определенного вида процессов могут использоваться и другие виды кривых. Одними из самых известных являются кривая Гомперца и логистическая кривая. Эти кривые, называемые S-образными, применяются для процессов, при которых воздействие некоторого фактора начинает проявляться только после определенного момента, а до этого момента процесс развивался по экспоненциальному закону.

Кривая Гомперца имеет вид $\hat{y}_t = k \cdot a^{b^t}$. Уравнение логистической кривой имеет вид $\frac{1}{\hat{y}_t} = k + a \cdot b^t$ или $\hat{y}_t = \frac{k}{1+b \cdot e^{-at}}$. Приблизительно графики этих кривых имеют вид (рис. 2.2):

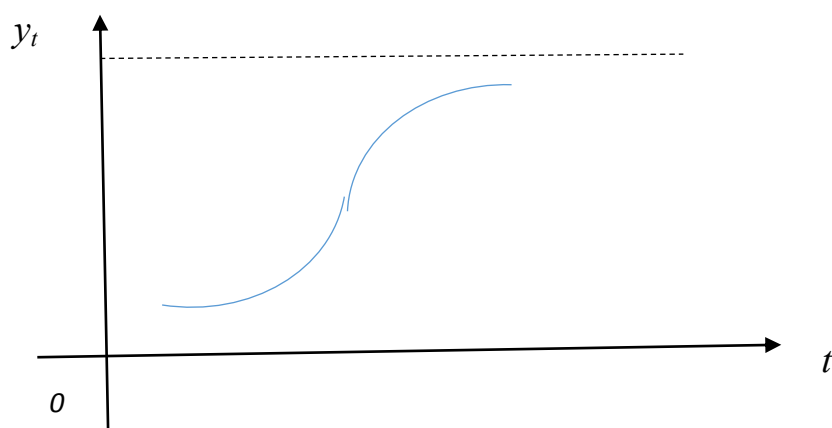


Рис. 2.2.

Эти функции вначале достаточно быстро возрастают, затем темп роста замедляется и далее почти полностью прекращается. Такой вид функций хорошо описывает развитие нового производства, новой отрасли. В этом случае вначале производство развивается медленно, так как технические методы еще не очень хорошо разработаны, очень высоки издержки производства, а спрос на рынке достаточно мал. Однако через некоторое время производство начинает расти быстрее, благодаря прежде всего тому, что происходит усовершенствование технологии изготовления какого-либо изделия, увеличивается емкость рынка, начинается массовое производство товара. По истечении некоторого времени рынок насыщается, что приводит к замедлению производства и, наконец, почти к его прекращению. Таким образом, в результате получаем кривую, изображенную на рис. 2.2.

Оценки параметров всех перечисленных выше уравнений трендов определяются обычным методом наименьших квадратов, при применении которого в качестве независимой переменной используют время $t = 1, 2, \dots, n$, а в качестве зависимой переменной используют фактические уровни временного ряда y_t .

Если тренд имеет нелинейный характер, то при возможности, вначале проводят стандартную процедуру линеаризации тренда, чаще всего с помощью замены переменной и процесса логарифмирования.

Для определения вида тенденции существует несколько методов.

Наиболее распространенным методом является качественный анализ изучаемого процесса, включающий построение и визуальный анализ графика зависимости значений уровня рассматриваемого ряда от временного фактора.

Для этого же можно использовать и значения коэффициентов автокорреляции уровней ряда, что было отмечено ранее.

Выбор наилучшего нелинейного тренда осуществляется путем перебора основных нелинейных уравнений тренда с учетом нахождения по каждому рассматриваемому уравнению двух показателей: скорректированного коэффициента детерминации и средней ошибки аппроксимации. Этот метод легко реализуется на компьютере.

После выбора вида кривой роста происходит оценивание ее параметров. Для оценки параметров большинства кривых роста, как было отмечено ранее, используют метод наименьших квадратов (МНК). Оценки параметров, полученные по методу МНК, определяются как значения, которые решают следующую оптимизационную задачу:

$$\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2 \rightarrow \min ,$$

где y_t — фактическое значение уровня исходного ряда;

$\hat{y}_t$ — расчетное значение, т. е. значение для того же момента времени, но найденное по уравнению линии тренда.

Если в качестве кривой роста рассматривается полином (многочлен), то в процессе решения задачи минимизации квадратов разности получают систему нормальных уравнений, при этом для много-

члена невысокой степени система выглядит достаточно просто. Так, например, если в качестве кривой роста используют многочлен первого порядка $y_t = a_0 + a_1 t$, то нормальные уравнения для определения параметров a_0 и a_1 имеют вид:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n y_t &= a_0 n + a_1 \sum_{t=1}^n t \\ \sum_{t=1}^n y_t t &= a_0 \sum_{t=1}^n t + a_1 \sum_{t=1}^n t^2\end{aligned}$$

В процессе получения оценок параметров многочлена второй степени $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ решают следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n y_t &= a_0 n + a_1 \sum_{t=1}^n t + a_2 \sum_{t=1}^n t^2 \\ \sum_{t=1}^n y_t t &= a_0 \sum_{t=1}^n t + a_1 \sum_{t=1}^n t^2 + a_2 \sum_{t=1}^n t^3 \\ \sum_{t=1}^n y_t t^2 &= a_0 \sum_{t=1}^n t^2 + a_1 \sum_{t=1}^n t^3 + a_2 \sum_{t=1}^n t^4\end{aligned}$$

При определении параметров других кривых роста часто используют переход к логарифмам, который позволяет после введения новых переменных получить полиномиальную модель кривой роста.

Как было отмечено ранее, систематическая компонента ряда, кроме трендовой, содержит и периодическую (сезонную или циклическую) составляющую. Эта составляющая может оказывать существенное влияние на протекание рассматриваемого процесса. Поэтому исследование сезонной составляющей считается необходимым при анализе любого социально-экономического процесса, представленного временным рядом.

§ 2.4. Исследование сезонной составляющей

Рассмотрим временной ряд, который содержит сезонные колебания. Для анализа таких рядов рассчитывают значения сезонной составляющей и устраняют ее для получения аддитивной или мультипликативной модели, содержащей только трендовую и случайную составляющие.

Существует несколько подходов для решения такой задачи.

Одним из самых простых и наиболее часто применяемых является моделирование сезонной составляющей. Это моделирование предполагает расчет значений сезонной составляющей методом скользящей средней, а после этого возможно удаление сезонной составляющей из аддитивной или мультипликативной модели временного ряда.

Рассмотрим все шаги, связанные с анализом и исключением сезонной составляющей на выше рассмотренном примере (таблица 2.3).

Ранее проведенный анализ показал, что рассматриваемый временной ряд содержит сезонные колебания с периодичностью 4, а также что амплитуда сезонных колебаний приблизительно постоянна, поэтому возможно применение аддитивной модели, т. е.

$$y(t) = \hat{y}(t) + S(t) + E(t).$$

Шаг 1. Нахождение оценок сезонной составляющей.

Проведем выравнивание исследуемого ряда методом скользящей средней и затем рассчитаем значения сезонной составляющей.

Все расчеты будут представлены в таблице 2.8.

В первом и втором столбцах таблицы представлены данные рассматриваемого временного ряда.

Элементами третьего столбца являются суммы уровней ряда за каждые 4 года со сдвигом на один момент времени.

После деления каждого элемента столбца 3 на 4, получаем скользящую среднюю по годам (столбец 4). Выровненные компоненты столбца 4 уже не содержат сезонной компоненты.

В столбце 5 находятся значения центрированных скользящих средних, которые определяются как средние значения из двух последовательных скользящих средних. Таким образом, значения скользящих средних приводятся в соответствие с фактическими моментами времени.

Шестой столбец состоит из оценок сезонной компоненты, которые определяются как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними.

Таблица 2.8

№ го- да, t	Количество возбужденных дел, y_t	Итого за че- тыре года	Скользящая средняя по годам	Центрированная скользящая средняя	Оценка се- зонной компоненты
1	2	3	4	5	6
1	60	–	–	–	–
2	44	244	61	–	–
3	50	256	64	62,5	–12,5
4	90	260	65	64,5	25,5
5	72	270	67,5	66,25	5,75
6	48	280	70	68,75	–20,75
7	60	288	72	71	–11
8	100	296	74	73	27
9	80	300	75	74,5	5,5
10	56	310	77,5	76,25	–20,25
11	64	320	80	78,75	–14,75
12	110	330	82,5	81,25	28,75
13	90	336	84	83,25	6,75
14	66	334	83,5	83,75	–17,75
15	70	–	–	–	–
16	108	–	–	–	–

Шаг 2. Нахождение значений сезонной составляющей.

Для нахождения значений сезонной составляющей используем ее оценки, полученные на шаге 1 (6 столбец таблицы 2.8).

Найдем средние оценки сезонной составляющей за каждый квартал по всем годам (см. таблицу 2.9).

Для аддитивной модели сумма значений сезонной составляющей по всем кварталам должна быть равна 0. Для рассматриваемого ряда эта сумма равна (см. таблицу 2.9):

$$\sum \bar{s}_i = 6 + (-19,58) + (-12,75) + 27,08 = 0,75.$$

Необходимо определить корректирующий коэффициент:

$$k = \frac{\sum s_i}{4} = 0,1875$$

Найдем скорректированные значения сезонной составляющей по формуле:

$$s_i = \bar{s}_i - k.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 2.9:

Таблица 2.9

Показатели	Год	№ квартала, i			
		I	II	III	IV
	1999	–	–	–12,5	25,5
	2000	5,75	–20,75	–11	27
	2001	5,5	–20,25	–14,75	28,75
	2002	6,75	–17,75	–	–
Всего за i -й квартал		18	–58,75	–38,25	81,25
Средняя оценка сезонной компоненты для i -го квартала, $\bar{s}_i$		6	–19,58	–12,75	27,08
Скорректированная сезонная компонента, s_i		5,81	–19,77	–12,94	26,90

Пересчитаем сумму значений сезонных компонент:

$$\sum s_i = 5,81 + (-19,77) + (-12,94) + 26,90 = 0.$$

Расчетные значения, полученные для всех остальных шагов будут приведены в таблице 2.10, представленной ниже.

Шаг 3. Нахождение значений уровней без сезонной составляющей.

Для нахождения значений уровней с исключением влияния сезонной составляющей необходимо из значения каждого уровня y_t исходного ряда вычесть полученные значения сезонной составляющей s_i .

Результат представлен в столбце 4 таблицы 2.10. Полученные значения приведены для каждого момента времени, они содержат только трендовую и случайную составляющую.

Шаг 4. Определение значений трендовой составляющей.

Для нахождения конкретных значений трендовой составляющей проведем аналитическое выравнивание элементов полученного ряда (столбец 4) с помощью линейной функции. В результате получаем следующее уравнение тренда:

$$\hat{y}_t = 57,15 + 1,86 \cdot t.$$

Подставляя в это уравнение значения времени $t = 1, 2, \dots, 16$, получим значения трендовой составляющей для каждого момента времени t (столбец 5).

Шаг 5. Нахождение значений уровня ряда и абсолютной ошибки для аддитивной модели.

Для нахождения значений уровней ряда с использованием аддитивной модели необходимо к значениям трендовой составляющей прибавить значения сезонной составляющей для соответствующих кварталов (столбец 6):

$$\hat{y}_t + s_t.$$

Абсолютная ошибка, т. е. значения случайной составляющей определяются по формуле:

$$e_t = y_t - (\hat{y}_t + s_t)$$

Значения случайной составляющей представлены в столбце 7, а квадраты этих значений в столбце 8.

Таблица 2.10

t	y_t	s_t	$y_t - s_t$	$\hat{y}_t$	$\hat{y}_t + s_t$	e_t	$(e_t)^2$	$(y_t - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	60	5,81	54,19	59,02	64,83	-4,83	23,34	169
2	44	-19,77	63,77	60,88	41,11	2,89	8,34	841
3	50	-12,94	62,94	62,75	49,81	0,19	0,04	529
4	90	26,90	63,10	64,61	91,51	-1,51	2,27	289
5	72	5,81	66,19	66,48	72,29	-0,29	0,08	1
6	48	-19,77	67,77	68,34	48,57	-0,57	0,32	625
7	60	-12,94	72,94	70,20	57,27	2,73	7,48	169
8	100	26,90	73,10	72,07	98,96	1,04	1,07	729
9	80	5,81	74,19	73,93	79,74	0,26	0,07	49
10	56	-19,77	75,77	75,80	56,03	-0,03	0,00	289
11	64	-12,94	76,94	77,66	64,72	-0,72	0,52	81
12	110	26,90	83,10	79,52	106,42	3,58	12,81	1369
13	90	5,81	84,19	81,39	87,20	2,80	7,83	289
14	66	-19,77	85,77	83,25	63,48	2,52	6,34	49
15	70	-12,94	82,94	85,12	72,18	-2,18	4,75	9
16	108	26,90	81,10	86,98	113,88	-5,88	34,54	169
Сумма							109,8	5656

Восьмой и девятый столбцы нужны для оценки качества построенной модели. Оценка качества модели может быть определена по аналогии с оценкой качества модели регрессии, т. е. по значению коэффициента детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2},$$

где $\bar{y}$ — это среднее арифметическое значение уровней. Для рассматриваемого ряда $\bar{y}$:

$$R^2 = 1 - \frac{109,8}{5656} \approx 0,98,$$

что говорит о хорошем качестве построенной модели.

Шаг 6. Прогнозирование по аддитивной модели.

Предположим, что по нашему примеру необходимо дать прогноз о возможном числе правонарушений (числе возбужденных дел) на I и II кварталы следующего года. Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в аддитивной модели есть сумма трендовой и сезонной компонент.

Для определения трендовой компоненты воспользуемся уравнением тренда

$$T = 57,154 + 1,864 \cdot t$$

Получим

$$T_{17} = 57,154 + 1,864 \cdot 17 = 88,842$$

$$T_{18} = 57,154 + 1,864 \cdot 18 = 90,706$$

Значения сезонных компонент за соответствующие кварталы равны:

$$S_1 = 5,81 \quad \text{и} \quad S_2 = -19,77$$

Таким образом,

$$F_{17} = T_{17} + S_1 = 88,842 + 5,81 \approx 95$$

$$F_{18} = T_{18} + S_2 = 90,706 - 19,77 \approx 71$$

Т. е. в первые два квартала следующего года следовало ожидать порядка 95 и 71 правонарушений соответственно.

После анализа трендовой и сезонной составляющих временного ряда переходят к решению следующей основной задачи — задачи получения правильного прогноза о дальнейшем развитии рассматриваемого процесса. При рассмотрении примера на последнем шаге уже был сделан прогноз относительно развития рассматриваемого про-

цесса в следующих кварталах. В следующем разделе вопросы, связанные с прогнозированием, будут рассмотрены более подробно.

Контрольные вопросы

1. Какие графики используются для изображения временного ряда?
2. Какие процедуры выполняют в ходе предварительного анализа временного ряда?
3. Какие методы выявления аномальных уровней временного ряда существуют?
4. Каково основное понятие и формула нахождения среднего абсолютного прироста, среднего темпа роста, среднего темпа прироста?
5. Какова сущность методов сглаживания?
6. Каково назначение скользящих средних?
7. Влияние каких составляющих временного ряда можно устранить методом скользящих средних?
8. В каком случае целесообразно использовать взвешенную скользящую среднюю, а для каких временных рядов лучшие результаты могут быть получены при применении простой скользящей средней?
9. Каковы основные шаги алгоритма сглаживания по простой скользящей средней?
10. Как провести сглаживание временного ряда с периодическими колебаниями?
11. В чем состоит отличие алгоритма метода взвешенной скользящей средней от алгоритма метода простой скользящей средней?
12. Сколько значений теряется при использовании скользящей средней с длиной интервала сглаживания $m = 5$?

13. Как можно восстановить потерянные уровни после реализации процедур сглаживания?
14. Как можно рассчитать простые скользящие средние при четной длине интервала сглаживания?
15. Как определяются весовые коэффициенты, которые используются для расчета взвешенных скользящих средних?
16. С помощью каких статистических показателей, описывается динамика экономических процессов?
17. Какая взаимосвязь существует между цепными и базисными коэффициентами роста?
18. Что такое автокорреляция уровней временного ряда?
19. Что такое автокорреляционная функция?
20. Что такое временной лаг?
21. Каковы основные виды кривых роста, которые наиболее часто используются при формировании трендовой составляющей?
22. Для каких целей может быть использован метод Фостера-Стюарта?

Тестовые задания

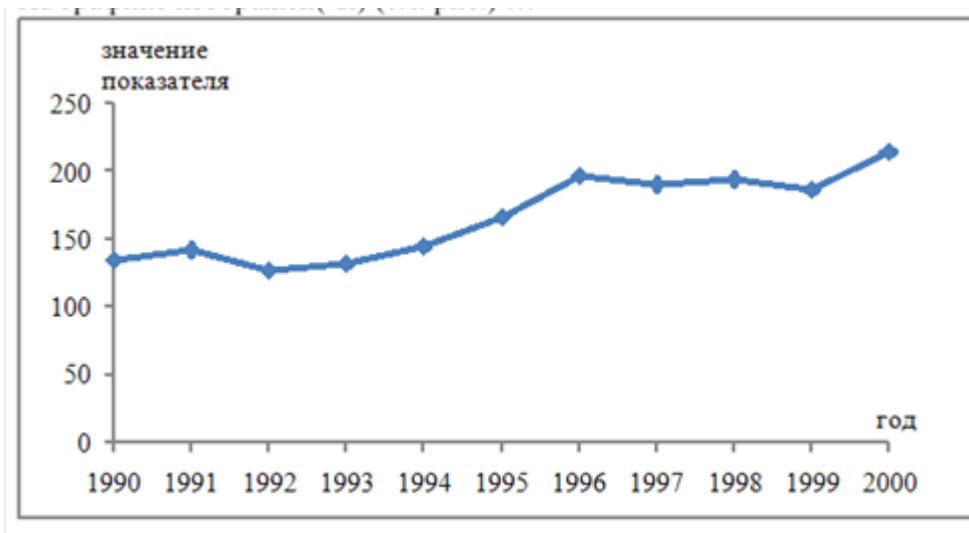
1. Установите соответствие между эконометрическими терминами и их определениями:

- 1) Автокорреляция уровней временного ряда;
 - 2) Коэффициент автокорреляции уровней временного ряда;
 - 3) Автокорреляционная функция;
 - 4) Коррелограмма
- а) график зависимости значений автокорреляционной функции от величины лага;
- в) корреляционная зависимость между последовательными уровнями ряда;

с) коэффициент линейной корреляции между последовательными уровнями;

д) последовательность коэффициентов автокорреляции первого, второго и т. д. порядков.

2. На графике изображен временной ряд, содержащий возрастающую тенденцию. Исходя из данной структуры ряда, можно предположить, что наиболее высокое значение коэффициента автокорреляции уровней ряда будет наблюдаться для _____ порядка:



- а) первого;
- б) седьмого;
- в) одиннадцатого;
- г) пятого.

3. Значение коэффициента автокорреляции второго порядка равно $-0,6$, следовательно ряд содержит:

- а) тенденцию;
- б) убывающую тенденцию;
- в) затухающую сезонную волну периодичностью два момента времени;
- г) полиномиальную тенденцию с точкой минимума.

4. Для мультипликативной модели временного ряда сумма скорректированных сезонных компонент равна:

- а) 0;
- б) 1;
- в) 2;
- г) 3.

5. Для аддитивной модели временного ряда сумма скорректированных сезонных компонент равна:

- а) 0;
- б) 1;
- в) 2;
- г) 3.

6. Под автокорреляцией уровней временного ряда подразумевается _____ зависимость между последовательными уровнями ряда:

- а) корреляционно-функциональная;
- б) функциональная;
- в) детерминированная;
- г) корреляционная.

7. Способом определения структуры временного ряда являются (укажите несколько вариантов ответа):

- а) анализ автокорреляционной функции;
- б) расчет коэффициента корреляции между объясняющими переменными;
- в) построение коррелограммы;
- г) агрегирование данных за определенный промежуток времени.

8. Значение коэффициента автокорреляции первого порядка характеризует:

- а) тесноту линейной связи;

- б) значимость тренда;
- в) качество модели временного ряда;
- г) тесноту нелинейной связи.

9. Лаг, это число периодов по которым определяется:

- а) коэффициент корреляции;
- б) коэффициент детерминации;
- в) коэффициент автокорреляции;
- г) коэффициент аппроксимации.

10. Автокорреляция — это наличие корреляции между параметрами:

- а) фактическими и расчетными;
- б) текущих и прогнозируемых наблюдений;
- в) экзогенных и эндогенных переменных;
- г) текущих и предыдущих наблюдений.

11. При сглаживании временного ряда с помощью 5-членной скользящей средней теряются:

- а) только первые два значения временного ряда;
- б) только последние два значения временного ряда;
- в) два первых и два последних значения временного ряда;
- г) пять первых и пять последних значений временного ряда.

12. Данные об изменении некоторого показателя за 10 лет представлены в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	14,9	12,6	15,2	15,9	14,4	16,2	18,0	18,3	17,0	18,8

Сглаженное значение девятого уровня при использовании 5-членной простой скользящей средней равно:

- а) 14,6;
- б) 20,5;
- в) 9,3;

г) 14,1.

13. Более гладкий временной ряд, менее подверженный случайным колебаниям, будет получен при использовании:

- а) 3-летней скользящей средней;
- б) 5-летней скользящей средней;
- в) 7-летней скользящей средней;
- г) 19-летней скользящей средней.

14. Временной ряд:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	14,9	12,6	15,2	15,9	14,4	16,2	18,0	18,3	17,0	18,8

сглаживается с помощью 5-летней взвешенной скользящей средней. Сглаженное значение четвертого уровня ряда равно:

- а) 15,4;
- б) 23,8;
- в) 7,9;
- г) 14,9.

Задания для самостоятельной работы

1. Известны данные о поступлении единого социального налога (ЕСН) в некий региональный бюджет за 24 месяца (в тыс. руб.):

месяц	ЕСН, тыс. руб.	месяц	ЕСН, тыс. руб.
1	376842	13	501145
2	213854	14	229470
3	282036	15	336705
4	302301	16	368367
5	300327	17	378257
6	296497	18	388235
7	369010	19	413939
8	330873	20	414 123
9	330538	21	408 899
10	314843	22	382 538
11	324831	23	421 251
12	340315	24	427 532

Выяснить наличие аномальных уровней и построить линейную диаграмму.

2. Даны сведения о выручке предприятия от реализации продукции по месяцам, в тыс. руб.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
456	476	566	522	662	687	702	743	721	752	784	767

Определите наличие аномальных уровней для данных временных рядов методом Ирвина.

3. В таблице приведены (а) данные о доходах от операций с коммерческими кредитами на начало месяца в тыс. руб.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2380	2978	3270	3451	3633	3733	4008	4235	4467	4439	4590	5110

(б) годовые данные о трудоемкости производства 1 т цемента (в нормо-сменах) за 10 лет:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7,9	8,3	7,5	6,9	7,2	6,5	5,8	4,9	5,1	4,4

Определить средний уровень ряда, средний абсолютный прирост, средний темп роста и прироста для данных временных рядов.

4. Для временных рядов, приведенных в предыдущем задании, рассчитать три первых коэффициента автокорреляции, сделать вывод об их значимости. Построить графики автокорреляционных функций. Найти величину временного лага.

5. Для временных рядов, приведенных в предыдущем задании, определить наличие тренда во временном ряду, используя:

- а) метод проверки разности средних уровней;
- б) метод Фостера–Стюарта.

6. Для следующих временных рядов а) постройте линейную модель, определив её параметры методом наименьших квадратов; б) осуществите выбор наилучшей кривой роста методом характеристик прироста.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7,9	8,3	7,5	6,9	7,2	6,5	5,8	4,9	5,1	4,4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
43	47	50	48	54	57	61	59	65	62

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
43	47	50	48	54	57	61	59	65	62

7. В следующей таблице приведены данные о ценах на сырье (руб. за единицу объема):

Период	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Цена, руб.	203	220	231	240	248	260	273	282	279	270	268	260

а) выберите степень полинома, аппроксимирующего данный временной ряд, методом конечных разностей; б) постройте выбранную полиномиальную модель.

8. В следующих задачах требуется:

1. Найти коэффициенты автокорреляции первого–восьмого уровней.

2. Построить коррелограмму.

3. По данным коэффициентов определить существует ли для ряда только тенденция или циклическая составляющая (с каким периодом времени).

4. Построить поле корреляции для временного ряда и сравнить с выводами по третьему вопросу.

Задача 1. Исследовались данные об изменении дохода (в млн руб.) некоторой промышленной компании за год (12 месяцев):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_t	7	8	9	18	15	20	19	12	13	17	24

Задача 2. Исследовались данные об объемах потребления электроэнергии жителями региона за 16 кварталов:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	6	4,4	5	9	7,2	4,8	6	10	8	5,6	6,4	11	9	6,6	7	10,8

Задача 3. Исследовались данные о прибыли кампании за последние четыре года

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_t	53,4	55	60,3	61,7	62,5	65,5	68,5	73,3	72,2	74	77,4	80,4	82,1	85,9

9. Исследовались данные об изменении дохода (в млн руб.) некоторой промышленной компании за год (12 месяцев):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_t	9	7	8	9	18	15	20	19	12	11	17

1. Проверить гипотезу об отсутствии тенденции в изменении дохода компании с помощью метода а) Фостера–Стюарта; б) серий (медиан).

2. Рассчитать простую скользящую среднюю с длиной интервала сглаживания а) $l = 3$; б) $l = 4$; в) взвешенную скользящую среднюю с длиной интервала сглаживания $l = 7$. Для пункта б) восстановить потерянную информацию.

3. Построить графические зависимости дохода и всех найденных средних от времени t .

10. Исследовались данные об изменении дохода (в млн руб.) некоторой промышленной компании за год (12 месяцев):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_t	7	8	9	18	15	20	19	12	11	17	24

1. Проверить гипотезу об отсутствии тенденции в изменении дохода компании с помощью метода а) Фостера–Стюарта; б) серий (медиан).

2. Рассчитать простую скользящую среднюю с длиной интервала сглаживания а) $l = 3$; б) $l = 4$; в) взвешенную скользящую среднюю с длиной интервала сглаживания $l = 7$. Для пункта б) восстановить потерянную информацию.

3. Построить графические зависимости дохода и всех найденных средних от времени t .

11. Данные об изменении урожайности зерновых культур за 9 лет представлены в следующем временном ряду:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	13,9	11,6	14,2	14,9	13,4	15,2	17,0	17,3

Рассчитать трех- и пятилетние простые скользящие средние и графически сравнить результаты.

12. По данным временного ряда, характеризующего динамику реализованной продукции объединения (млн руб.) в течение 12 месяцев:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_t	33,1	39,2	46,1	44,3	50	57,5	65,2	67	69,7	71,2	75

Рассчитать цепные, базисные и средний абсолютные приросты. В качестве базисного взять начальный уровень ряда.

13. Рассчитать четырехлетние скользящие средние для следующих данных о численности населения города (тыс. чел.) за 12 лет (на начало года):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y _t	42	38	41	45	49	48	53	51	64	75

Сравнить графически исходный временной ряд и сглаженный ряд.

14. Имеются следующие данные о производстве зерна в одном из хозяйств за 10 лет:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y _t	33	39	43	47	50	54	62	70	75	80

Рассчитать цепные, базисные и средний абсолютные приросты.

В качестве базисного взять начальный уровень ряда.

15. По данным временного ряда, характеризующего динамику реализованной продукции объединения (млн руб.) в течение 12 месяцев:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y _t	23	29	36	34	40	47	55	57	59	61	65

Рассчитать цепные, базисные и средний темпы прироста. В качестве базисного взять начальный уровень ряда.

РАЗДЕЛ III. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Как было отмечено ранее, временные ряды используются при прогнозировании. При этом предполагается, что тенденция развития, рассмотренная в прошлом, сохранится и в будущем. По значениям временного ряда можно получить точечные и интервальные прогнозы. Однако их правильность, адекватность действительности можно гарантировать только в том случае, если будут выполнены определенные условия, связанные, прежде всего, со случайной составляющей.

§ 3.1. Проверка адекватности полученной модели

Понятие адекватности — это понятие в определенной мере условное, так как построенная модель не может полностью соответствовать реальному процессу или объекту. При построении модели ее адекватность рассматривается как соответствие наиболее существенным для исследования свойствам рассматриваемого процесса, а не адекватность «вообще».

При правильном построении модели, связывающей систематические компоненты, изменение случайной составляющей должно носить случайный характер, т. е. это изменение не должно зависеть от изменения времени. В связи с этим модель считается адекватной изучаемому процессу, если случайная составляющая является случайной величиной, удовлетворяющей следующим свойствам:

1. Колебания значений уровней случайной составляющей не должны подчиняться никакой закономерности, т. е. должны иметь случайный характер.

2. Значения случайной компоненты должны подчиняться нормальному закону распределения.

3. Математическое ожидание случайной компоненты должно равняться нулю.

4. Значения уровней случайной компоненты должны не зависеть между собой.

Таким образом, проверка адекватности полученной модели (уравнения тренда) реальному процессу включает в себя анализ случайной составляющей. Случайная составляющая получается после исключения из уровней ряда тренда и сезонной (циклической) составляющей, если таковая имеется. Сезонная составляющая и ее исключение были рассмотрены ранее. Предположим теперь, что рассматриваемый временной ряд не содержит сезонной составляющей, и модель ряда является аддитивной. В этом случае уровень ряда можно представить в виде суммы трендовой и случайной составляющих:

$$y_t = \hat{y}_t + e_t.$$

Ряд остатков (значений случайной составляющей) будет представлять разность между фактическим (выборочным) значением и расчетным, найденным по уравнению тренда:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t.$$

Оценки неизвестных коэффициентов в уравнении тренда, как было отмечено ранее, определяются по выборочным данным с использованием метода наименьших квадратов (МНК). Поэтому для получения уравнения, которое адекватно описывает исследуемый процесс необходимо выполнение определенных предпосылок МНК, которые связаны со случайной составляющей. По сути, эти предпо-

сылки и определяют перечисленные выше свойства. Поясним последнее более подробно.

В соответствии с предпосылками МНК для того, чтобы модель трендовой составляющей была адекватна рассматриваемому процессу, необходимо, чтобы значения случайной составляющей (остатки) являлись независимыми, одинаково распределенными случайными величинами, имеющими нормальный закон распределения.

Если уравнение тренда выбрано правильно, т. е. учитывает все возможные закономерности экономического процесса, то отклонение от тренда — остатки будут иметь случайный характер. Это означает, что изменения значений остатков будут не связаны с изменением времени. Последнее означает отсутствие тенденции в остатках. Проверить это утверждение можно, например, по методу Фостера–Стюарта или методу медиан, применив их для ряда значений случайной составляющей.

На неудачность выбора вида функции, описывающую трендовую составляющую, может указывать и отсутствие независимости последовательных значений ряда остатков. Если эти значения будут коррелировать между собой, т. е. не будет выполняться условие независимости, то прогнозы по полученному уравнению тренда могут быть далеки от реальных. В этом случае будет иметь место автокорреляция ошибок (остатков), т. е. не будет выполнено свойство 4.

Автокорреляция остатков

Причины возникновения автокорреляции в остатках могут иметь различную природу. Во-первых, автокорреляция может возникнуть из-за неправильного сбора исходных данных, из-за наличия при измерении значений исследуемого признака, фактора. Во-вторых, нали-

чие автокорреляции может быть связано с неправильной спецификацией модели. Последнее может состоять не только в том, что неправильно выбран вид уравнения тренда, но и в том, что неправильно выбран временной показатель.

Если автокорреляция в остатках возникла из-за неправильного выбора вида трендовой составляющей, то исправлению этой ситуации может помочь изменение вида модели. Без этого изменения нельзя использовать методы для расчета коэффициентов уравнения тренда.

Для проверки существования автокорреляции в остатках чаще всего применяют метод, в основе которого лежит критерий Дарбина–Уотсона. Главной формулой при применении этого критерия является формула, в которой сравниваются значения остатков, т. е.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}$$

Величина d , найденная по описанной выше формуле, по своей сути определяет отношение суммы квадратов разностей последовательных значений остатков к так называемой остаточной сумме квадратов, найденных по значениям модели тренда исследуемого временного ряда.

Величина d тесно связана с коэффициентом автокорреляции первого порядка r_1 . При достаточно больших значениях n , эти величины связывает следующая формула:

$$d = 2 \cdot (1 - r_1).$$

По значению r_1 можно оценить возможные значения величины d , а именно, если $r_1 = 1$, то $d = 0$; если $r_1 = -1$ то, следовательно, $d = 4$. В первом случае имеется наличие положительной автокорреляции

уровней, во втором — отрицательной. Если $r_1 = 0$, т. е. автокорреляция уровней отсутствует, то $d = 2$. Отсюда следует, что величина d изменяется в пределах $0 \leq d \leq 4$.

Метод определения наличия автокорреляции остатков на основе критерия Дарбина–Уотсона по сути является методом проверки соответствующей статистической гипотезы.

Общая схема проверки такой статистической гипотезы состоит из следующих пунктов.

Формируется основная гипотеза H_0 , которая утверждает, что автокорреляция остатков в данной модели отсутствует. Альтернативными являются не одна, как обычно, а две гипотезы H_1 и H_1^* , в которых утверждается наличие положительной или отрицательной автокорреляции, соответственно.

Для подтверждения или опровержения основной и альтернативных гипотез находят по специальным таблицам (см. приложение) величины d_L и d_U , называемые критическими значениями критерия Дарбина–Уотсона. Выбор этих значений зависит от уровня значимости α , объема выборки (числа наблюдений) n и числа переменных в модели m . В соответствии с этими значениями числовой промежуток $[0; 4]$ разбивается на пять отрезков.

Далее определяют, в какой из отрезков попадет величина d и окончательный ответ с вероятностью $1 - \alpha$ о принятии или отклонении гипотез дают с использованием следующего правила:

если $0 < d < d_L$, то существует положительная автокорреляция остатков, гипотеза H_0 отклоняется и с вероятностью $p = 1 - \alpha$ принимается гипотеза H_1 ;

если $d_L < d < d_U$ или $4 - d_U < d < 4 - d_L$, то появляется зона неопределенности;

если $d_U < d < 4 - d_U$, то оснований отклонять H_0 нет, поэтому можно считать, что автокорреляция остатков отсутствует;

если $4 - d_L < d < 4$, то существует отрицательная автокорреляция остатков, гипотеза H_0 отклоняется и с вероятностью $p = 1 - \alpha$ принимается гипотеза H_1^* .

Зона неопределенности означает, что данный критерий не может дать ответ, существует или нет для рассматриваемой модели автокорреляция, однако на практике в этом случае для получения более точных результатов лучше предположить, что автокорреляция существует, т. е. отклонить гипотезу H_0 .

Применение критерия Дарбина–Уотсона может быть ограничено несколькими условиями:

1. Критерий Дарбина–Уотсона нельзя применять к моделям, в которых в качестве независимых переменных используются лаговые значения исследуемого показателя.
2. Критерий Дарбина–Уотсона используется на выявление существования автокорреляции в остатках только первого порядка.
3. Критерий Дарбина–Уотсона дает хорошие результаты в том случае, когда временной ряд имеет достаточно большую длину.

Исследуем наличие автокорреляции в остатках для рассмотренной ранее модели временного ряда, уровни которого определяют число правонарушений на таможне. Все данные и необходимые промежуточные расчеты представлены в следующей таблице:

Таблица 3.1

t	y_t	$\varepsilon_t = E$	ε_{t-1}	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$	ε_t^2
1	2	3	4	5	6
1	60	8,904	–	–	79,28
2	44	–17,091	8,904	675,74	292,10
3	50	–10,670	–17,091	41,23	113,85
4	90	28,751	–10,670	1554,02	826,62
5	72	7,255	28,751	462,08	52,64
6	48	–18,740	7,255	675,74	351,19
7	60	–12,319	–18,740	41,23	151,76
8	100	27,102	–12,319	1554,02	734,52
9	80	5,606	27,102	462,08	31,43
10	56	–20,389	5,606	675,74	415,71
11	64	–13,968	–20,389	41,23	195,11
12	110	25,453	–13,968	1554,02	647,86
13	90	3,957	25,453	462,08	15,66
14	66	–22,038	3,957	675,74	485,67
15	70	–15,617	–22,038	41,23	243,89
16	108	23,804	–15,617	1554,02	566,63
Сумма		0	–23,804	10470,17	5203,90

Для данной модели фактическое значение критерия Дарбина–Уотсона равно:

$$d = 2,011.$$

Определим гипотезы: H_0 — автокорреляции в остатках не существует; H_1 — существует положительная автокорреляция в остатках; H_1^* — существует отрицательная автокорреляция в остатках.

Задаем вероятность ошибки первого рода, т. е. уровень значимости $\alpha = 0,05$.

По таблице значений критерия Дарбина–Уотсона определяем критические значения с учетом того, что число наблюдений $n = 16$ и число независимых параметров модели $k = 1$ (в этом случае была рассмотрена зависимость только от времени t) $d_L = 1,10$ и $d_U = 1,37$.

Фактическое значение d -критерия Дарбина–Уотсона попадает в интервал $d_U < d < 4 - d_U$ ($1,37 < 2,011 < 2,63$). Таким образом, нет основания отклонять гипотезу H_0 об отсутствии автокорреляции в остатках, что говорит о возможном неплохом прогнозе в рассматриваемой ситуации.

Кроме проверки отсутствия автокорреляции в остатках, для подтверждения адекватности модели и получения по ней наиболее точных прогнозов необходимо проверить, имеют ли остатки нормальный закон распределения, т. е. проверить выполнение свойства 2. Так как рассматриваемые временные ряды реальных экономических процессов, как правило, невелики, то проверка нормальности остатков может быть проведена лишь приближенно. Наиболее часто эта проверка производится на основе анализа показателей асимметрии и эксцесса.

Нормальный закон распределения остатков

Для нормально распределенной случайной величины показатели асимметрии (A) и эксцесса ($\mathcal{E}$) равны нулю. Поэтому для доказательства нормальности распределения остатков находят выборочные характеристики асимметрии и эксцесса и их среднеквадратические ошибки. Затем на основе сравнения полученных значений отвергается или не отвергается гипотеза о нормальном распределении остатков.

Для определения выборочных асимметрии A , эксцесса $\mathcal{E}$, среднеквадратической ошибки асимметрии σ_A и среднеквадратической ошибки эксцесса $\sigma_{\mathcal{E}}$ используют следующие формулы:

$$A = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2\right)^3}}; \quad \mathcal{E} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2\right)^2} - 3;$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}; \quad \sigma_{\mathfrak{A}} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}$$

Гипотеза о нормальном распределении остатков не отвергается, если одновременно выполняются следующие два неравенства:

$$|A| < 1,5 \cdot \sigma_A; \quad \left| \mathfrak{A} + \frac{6}{n+1} \right| < 1,5 \cdot \sigma_{\mathfrak{A}}.$$

Гипотеза о нормальном распределении остатков отвергается, если выполняется хотя бы одно из следующих двух неравенств:

$$|A| \geq 2 \cdot \sigma_A; \quad \left| \mathfrak{A} + \frac{6}{n+1} \right| \geq 2 \cdot \sigma_{\mathfrak{A}}.$$

Проверим, является ли нормальным закон распределения остатков в предыдущем примере.

Таблица 3.2

t	y_t	$\varepsilon_t = E$	ε_t^2	ε_t^3	ε_t^4
1	2	3	4	5	6
1	60	8,904	79,28	705,92	6285,51
2	44	-17,091	292,10	-4992,32	85323,74
3	50	-10,670	113,85	-1214,77	12961,57
4	90	28,751	826,62	23766,15	683300,63
5	72	7,255	52,64	381,87	2770,45
6	48	-18,740	351,19	-6581,26	123332,73
7	60	-12,319	151,76	-1869,50	23030,42
8	100	27,102	734,52	19906,92	539517,29
9	80	5,606	31,43	176,18	987,67
10	56	-20,389	415,71	-8475,94	172815,90
11	64	-13,968	195,11	-2725,23	38065,97
12	110	25,453	647,86	16489,86	419716,37
13	90	3,957	15,66	61,96	245,17
14	66	-22,038	485,67	-10703,27	235878,69
15	70	-15,617	243,89	-3808,84	59482,67
16	108	23,804	566,63	13488,07	321070,03
Сумма		0	5203,90	34605,80	2724784,81

Для примера получаем:

$$A = 0,3687; \quad \Xi = -1,3901;$$

$$\sigma_A = 0,5099; \quad \sigma_{\Xi} = 0,7785$$

Гипотеза о нормальном распределении остатков не отвергается, так как одновременно выполняются следующие два неравенства:

$$|A| = |0,3687| < 1,5 \cdot 0,5099 = 0,7649;$$

$$\left| \Xi + \frac{6}{n+1} \right| = |-1,0371| < 1,5 \cdot 0,7785 = 1,1678.$$

Таким образом, для данного ряда условие 2 выполнено.

Кроме рассмотренного метода существует еще ряд методов проверки выполнения нормального закона распределения случайной составляющей: метод Вестергарда, RS-критерий и другие.

Выполнение условия 3 о равенстве нулю математического ожидания можно проверить с использованием критерия Стьюдента. Эта проверка основывается на проверке статистической гипотезы о равенстве генеральной средней (математического ожидания) конкретному значению (в данном случае нулю) при неизвестном среднеквадратическом отклонении, при этом предполагается доказанным, что закон распределения случайной составляющей является нормальным.

Общая схема проверки гипотезы состоит из следующих пунктов.

1. Основная гипотеза имеет вид $H_0: \bar{\varepsilon} = 0$;

Альтернативными могут быть следующие гипотезы:

$$H_1: \bar{\varepsilon} \neq 0 \quad \text{или} \quad H_1: \bar{\varepsilon} > 0 \quad \text{или} \quad H_1: \bar{\varepsilon} < 0.$$

2. Определяется уровень значимости α (чаще всего 0,05).

3. Критерием проверки данной гипотезы служит случайная величина T , которая распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 1$.

4. Выборочное значение критерия находится по формуле:

$$T_B = \frac{\bar{\varepsilon}_B}{S} \sqrt{n},$$

где n — объем выборки, а S — это исправленное среднеквадратическое отклонение, $\bar{\varepsilon}_B$ — это выборочное среднее.

5. Вид критической области определяется по альтернативной гипотезе H_1 по следующему правилу:

если $H_1: \bar{\varepsilon} \neq 0$, то критическая область V_1 — двусторонняя и симметричная;

если $H_1: \bar{\varepsilon} > 0$, то критическая область V_1 — правосторонняя;

если $H_1: \bar{\varepsilon} < 0$, то критическая область V_1 — левосторонняя.

Критические точки $t_{кр.}$ находятся по таблице критических точек распределения Стьюдента, по следующему правилу:

для двусторонней и симметричной области величина α выбирается в верхней строке таблицы;

для правосторонней и для левосторонней областей величина α выбирается в нижней строке таблицы, при этом в случае левосторонней области критическая точка должна иметь отрицательное значение.

6. Статистическое решение принимается на основе общего правила: если выборочное значение не попало в критическую область, то гипотеза о равенстве нулю математического ожидания остатков не отвергается, т. е. условие 3 можно считать выполненным. В противном случае эта гипотеза отвергается, и модель нельзя считать адекватной.

Пример. Пусть $\bar{\varepsilon}_B = 0,3$; объем выборки равен 36, а среднеквадратическое исправленное отклонение равно 0,6. Проверить гипотезу о равенстве нулю генеральной средней.

Решение. Проведем проверку гипотезы по предложенной выше схеме. По условию задачи $\bar{\varepsilon}_B = 0,3$; $n = 16$ и $S = 0,6$.

1. $H_0: \bar{\varepsilon} = 0$ и $H_1: \bar{\varepsilon} \neq 0$.

2. $\alpha = 0,05$.

3. Критерий — случайная величина T , распределенная по закону Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = 35$.

4. Выборочное значение критерия $T_B = \frac{0,3}{0,6} \sqrt{16} = 2$.

5. Альтернативная гипотеза $H_1: \bar{\varepsilon} \neq 0$ определяет симметричную двухстороннюю критическую область.

Критические точки $t_{кр.}$ находим по таблице критических точек распределения Стьюдента: $t_{кр.}(0,05; 15) = 2,13$.

6. $T_B = 2 < t_{кр.} = 2,13$, т. е. $T_B \neq V_1$, следовательно, нет оснований отвергнуть основную гипотезу, т. е. можно считать, что генеральная средняя равна 0.

Проверку первого условия можно провести с помощью критериев Фостера–Стюарта, критерия серий, основанного на медиане. Эти критерии были описаны ранее, как критерии обнаружения тренда для временного ряда.

Если после анализа ряда окажется, что все четыре условия выполнены, то можно считать модель адекватной реальному рассматриваемому процессу и перейти к решению задач прогнозирования. Если же не удастся доказать адекватность модели, то рекомендуется строго проанализировать процесс моделирования и, при необходимости, выбрать другую математическую модель, для которой также вначале оценить параметры и затем провести проверку адекватности.

§ 3.2. Понятие прогноза, виды прогнозов и их точность

Под прогнозом понимается описание возможного состояния показателя, объекта, процесса и т. д. в будущем, которое подтверждает-

ся научным анализом. Кроме этого, в прогнозе могут быть указаны альтернативные пути и сроки достижения того или иного значения, того или иного состояния. Сам процесс разработки и получения прогноза называется прогнозированием.

Классификация прогнозов зависит от конкретных признаков, основными из которых являются время упреждения, т. е. отрезок времени с момента получения последних статистических данных до момента получения прогноза; цель или тип прогнозирования; масштаб прогноза; способ представления результатов.

Условно можно описать следующие виды прогнозов:

1. В зависимости от временного охвата (от времени упреждения) прогнозы могут быть долгосрочными (на срок более 5 лет), среднесрочными (на срок от года до 5 лет), краткосрочными (от одного месяца до года) и оперативными (на срок до одного месяца).

2. В зависимости от цели прогнозирования существуют поисковые и нормативные прогнозы. Цель поисковых прогнозов, ответить на вопрос: что скорее всего произойдет в будущем? Нормативные прогнозы предполагают определение условий для достижения конкретного конечного результата по прогнозируемому состоянию процесса или объекта. Например, нормативный прогноз может указать при каком количестве инвестиций и к какому сроку возможно обеспечение новыми квартирами жильцов старого дома.

3. По масштабу прогнозы могут быть глобальными, макро- и микро-прогнозами, межотраслевыми и отраслевыми, межрегиональными и региональными и т. д.

4. По способу представления результатов прогнозы делятся на точечные и интервальные, о чем более подробно пойдет речь далее.

Для конкретных прогнозов могут применяться и другие признаки классификации прогнозов.

Большое значение в теории прогнозирования имеет оценка точности модели или оценка точности прогноза.

Оценка точности прогноза

Точность прогноза почти всегда зависит от величины погрешности (ошибки). Ошибкой прогноза называется разница между фактическим, реальным значением анализируемого показателя и его значением, полученным в результате прогноза, т. е. прогнозируемым значением. Такой метод для получения оценки точности прогноза может использоваться только тогда, когда закончился период упреждения, в результате чего на период упреждения получены фактические значения. Также возможно применение такого подхода и в случае ретро прогноза.

Ретроспективное прогнозирование, т. е. ретро прогноз получают для некоторого момента времени не в настоящем или будущем, а в прошлом. При этом предполагается, что для него имеются фактические данные. Для выполнения такой задачи вся имеющаяся информация делится на две части. Информация первой части состоит из более ранних данных, которые используют для подбора экономико-математической модели. После построения модели по информации первой части строится прогноз на следующий оставшийся период времени.

Информация второй части состоит из более поздних данных рассматриваемого ряда и используется для оценки прогнозных качеств модели. В результате получают ошибки прогноза, которые в определенной мере могут служить для оценки точности подобранных моделей, а также могут использоваться для сравнения различных других моделей прогнозирования.

Необходимо отметить, что ошибка ретроспективного прогноза получена при использовании лишь некоторой части данных, имеющих у исследователя. В связи с этим, когда будет использоваться полный объем данных, вид подобранной модели может изменяться, а также могут измениться значения критериев точности и качества.

При наличии данных о реализации прогнозов, качество прогноза можно оценить с помощью величины

$$\gamma = p/(p + q) ,$$

где p — это число прогнозов, которые были подтверждены реальными фактическими данными;

q — это число прогнозов, которые не были подтверждены реальными фактическими данными.

Необходимо отметить, что коэффициенты γ могут использоваться для разных моделей только в том случае, если будут считаться одинаковыми доверительные вероятности прогнозов.

Все вышеизложенное относится к интервальному прогнозу. Если прогноз представлен точечной оценкой, то точность прогноза могут характеризовать определенные статистические характеристики, такие как среднеквадратическая ошибка прогноза или средняя абсолютная ошибка прогноза.

Иногда в качестве меры качества прогноза может использоваться следующий коэффициент расхождения или коэффициент несоответствия, предложенный Г. Тейлом:

$$v = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^n y_t^2}} .$$

В этом коэффициенте используются и фактические и предсказанные значения уровней временного ряда.

Если предсказанные и фактические значения совпадают, т. е. происходит случай «совершенного прогнозирования», то, очевидно, что коэффициент расхождения равен 0. Этот коэффициент будет равен 1, если при построении экстраполяции предполагают неизменность приростов. И, наконец, если коэффициент расхождения больше 1, то прогноз считается очень плохим, т. к. дает худшие результаты, чем прогноз, полученный с помощью метода простой экстраполяции.

Если информация о результатах использования модели отсутствует, то можно оценить, так называемую априорную или предполагаемую точность. Априорная точность модели может дать характеристику только точности аппроксимации. Наиболее часто в качестве показателей точности используют показатели, связанные с ошибками:

- абсолютная ошибка $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$;
- средняя абсолютная ошибка $\bar{\varepsilon}$;
- средняя квадратическая ошибка

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_t^2}{n - k}},$$

где n — количество уровней ряда, k — число оцениваемых параметров модели;

- относительная ошибка

$$e_{\text{отн}} = \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \cdot 100;$$

- средняя относительная ошибка

$$\bar{e}_{\text{отн}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \cdot 100.$$

Последний показатель чаще других используется при сравнении точности прогнозов, осуществляемых по различным методикам. Обычно лучшим признается тот прогноз, который имеет меньшее значение этого показателя. Принято считать, что если значение средней относительной ошибки менее 3–5 %, то точность высокая; если значение средней относительной ошибки не превышает 10 %, то точность хорошая; от 10 % до 15 % точность удовлетворительная.

Применяются также коэффициент сходимости и коэффициент детерминации:

$$\phi^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2},$$

$$R^2 = 1 - \phi^2.$$

Из свойств коэффициента сходимости следует, что при уменьшении значения коэффициента сходимости точность модели увеличивается. Для коэффициента детерминации ситуация другая: чем больше значение коэффициента детерминации, тем больше степень точности модели.

Прогнозирование значений анализируемого показателя на основе экономико-математической модели временного ряда включает в себя решение следующих задач:

- нахождение точечного прогноза рассматриваемого показателя;
- нахождение интервального прогноза рассматриваемого показателя;
- оценка качества полученных результатов.

Перейдем к рассмотрению представленных выше задач.

§ 3.3. Понятие точечного и интервального прогнозов

Получение точечных и интервальных прогнозов происходит на основе кривых роста и использует методы экстраполяции, т. е. методы, которые предполагают наблюдавшуюся в прошлом тенденцию продлить в будущее. При применении этих методов предполагается, что, во-первых, тренд во временном ряде присутствует и, во-вторых, имеется существенное предположение, что маловероятно изменение имеющейся тенденции.

Точечные и интервальные прогнозы получают по трендовой модели. В основе их получения лежит, как было отмечено ранее, идея экстраполяции.

Точечным прогнозом является число, которое характеризует единственное возможное значение в будущем прогнозируемого показателя. Это значение легко найти, если известно уравнение тренда, что было показано при решении примера в конце § 2.4. Такой прогноз назван точечным, так как на графике его можно изобразить одной точкой.

Нетрудно понять, что точное совпадение найденного значения точечного прогноза и полученного в будущем фактического значения рассматриваемого показателя маловероятно. Поэтому точечный прогноз, как правило, дополняется интервальным, т. е. построением интервала, в котором с определенной долей вероятности можно ожидать появления значения исследуемого показателя. Таким образом, для значения анализируемого показателя задается некая «вилка» его возможных значений. Интервальный прогноз представляется в виде доверительного интервала прогноза.

Интервальный прогноз представляет собой интервал, в котором ожидается появление фактического значения исследуемого показате-

ля с определенной вероятностью. Выводы и формулы для расчета границ доверительного интервала используют основные выводы и формулы корреляционно-регрессионного анализа. Однако, так как временные ряды, как было отмечено ранее, имеют существенные отличия от статистических совокупностей в виде пространственных выборок, к оцениванию доверительных интервалов на основе теории корреляционно-регрессионного анализа необходимо подходить с некоторой осторожностью.

Методы, позволяющие находить интервальный прогноз, зависят от следующих значений:

- от стандартной ошибки оценки исследуемого прогнозируемого показателя;
- от времени упреждения прогноза;
- от числа уровней временного ряда;
- от уровня значимости (вероятности ошибки первого рода), заданного исследователем.

Доверительный интервал прогноза, как любой интервал, предполагает наличие двух чисел — концов интервала, значения которых определяются по формуле:

$$\hat{y}_{n+L} \pm t_{\alpha} S_p,$$

где n — длина временного ряда;

L — период упреждения;

$\hat{y}_{n+L}$ — точечный прогноз на момент времени $n + L$;

t_{α} — значение критической точки распределения Стюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы $n - 1$;

S_p — средняя квадратическая ошибка прогноза.

Приведем формулы для расчета доверительного интервала прогноза в случае линейного тренда: $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$. Квадрат средней квадратической ошибки прогноза можно определить по формуле:

$$S_p^2 = S_y^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n + 2L - 1)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} \right),$$

где S_y^2 — дисперсия отклонений фактических значений от расчетных.

Дисперсия в случае линейного тренда (число оцениваемых параметров равно двум) определяется по формуле:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - 2},$$

где y_t — фактические значения уровней ряда;

$\hat{y}_t$ — расчетные значения уровней ряда.

Для величины

$$K = t_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}$$

имеются таблицы для разных уровней значимости.

Например, таблица значений величины K для уровня значимости $\alpha = 0,2$ имеет вид:

Таблица 3.3

Число уровней, n	Период упреждения, L					
	1	2	3	4	5	6
7	1,932	2,106	2,300	2,510	2,733	2,965
10	1,692	1,774	1,865	1,964	2,069	2,180
13	1,581	1,629	1,682	1,738	1,799	1,863
15	1,536	1,572	1,611	1,653	1,697	1,745

Найдем доверительный интервал прогноза для примера, рассмотренного в § 2.4 для периода упреждения $L = 1$, при этом будем считать, что временной ряд не содержит сезонной составляющей. За-

фиксируем уровень значимости $\alpha = 0,05$ и выпишем данные, которые были найдены ранее:

$$n = 16;$$

$$L = 1;$$

$$\hat{y}_t = 57,154 + 1,864 \cdot t;$$

$$\hat{y}_{n+L} = \hat{y}_{17} \approx 89.$$

Найдем по формулам и таблицам следующие значения:

$$t_\alpha = 2,14;$$

$$S_y^2 = \frac{109,8}{14} \approx 7,84;$$

$$S_p^2 = 7,84 \cdot \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{3(16 + 2 - 1)^2}{16 \cdot (16^2 - 1)} \right) = 7,84 \cdot 1,275 = 9,996;$$

$$S_p = 3,162; \quad t_\alpha S_p = 2,14 \cdot 3,162 = 6,77 \approx 7.$$

Таким образом, нижняя граница интервального прогноза равна 82 правонарушениям, а верхняя — 96 правонарушениям.

Необходимо отметить, что длина периода упреждения имеет большое значение, и для каждого экономического процесса она определяется отдельно. Считается, что она не должна превышать одной трети объема данных, если рассматриваются ряды годовых наблюдений и двух лет, если рассматриваются ряды квартальных или месячных наблюдений.

При аналитическом выравнивании временных рядов, т. е. при выравнивании с помощью кривых роста, необходимо выяснить величину длины ряда, который будет выбран для прогнозирования. Нетрудно понять, что, если временной ряд будет слишком коротким, то тенденция его развития может быть не обнаружена. С другой стороны, если ряд будет слишком длинный, то он может охватить периоды, для которых существуют различные тенденции, поэтому его описа-

ние с помощью одной кривой роста может привести к отрицательным результатам. Поэтому без строгого теоретического обоснования рекомендовано поступать следующим образом.

Рекомендовано брать по возможности больший промежуток времени, если нет никаких особых соображений или пожеланий качественного порядка. Если в развитии экономического процесса прослеживается цикличность, то рекомендовано рассматривать период, начинающийся с середины первого периода цикла до середины последнего. Если же ряд содержит периоды, которые имеют разные тенденции, т. е. описываются разными уравнениями тренда, то рекомендовано сократить ряд, при этом отбрасываются наиболее ранние уровни, относящиеся к периоду с другой тенденцией развития.

При прогнозировании динамики экономического процесса по трендовым моделям экстраполяционным методом необходимо провести верификацию прогноза, т. е. проверить его истинность. Проведение верификации прогнозов с использованием трендовых моделей означает проведение сравнения расчетных данных, полученных по трендовой модели, с соответствующими реальными действительными данными, т. е. данными, полученными из фактов, свойств и закономерностей экономического развития.

При проведении верификации прогнозной модели используют совокупность определенных методов, процедур и критериев, которые позволяют оценить качество полученного прогноза на основе многостороннего исследования. Однако в действительности при проведении верификации оценка качества полученного результата прогнозирования сводится, по сути, к оценке метода прогнозирования, с помощью которого получены прогнозные значения. Последнее связано

с тем, что до настоящего времени не существует эффективного метода, позволяющего оценить качество прогноза до его реализации. Тем не менее, нельзя считать бесполезной работой получение прогноза, даже, если он не оправдался. Даже в этом случае, исследователь получает определенную информацию, может частично контролировать процесс и как-то на него воздействовать, т. е. использовать прогнозную информацию приемлемым для себя образом.

Например, если прогноз предсказывает нежелательное направление социально-экономического процесса, то исследователь может заранее принять какие-то меры для того, чтобы прогноз не сбылся. Подобного типа прогнозы в теории прогнозирования называются самодеструктивными. С другой стороны, если прогноз предсказывает хорошую ситуацию для исследователя, то он может применить какие-то действия, чтобы увеличить вероятность получения в реальности этого прогноза. Такого типа прогнозы называются саморегулирующими. Таким образом, ценность прогноза состоит не только в его достоверности, но и в его полезности для исследователей.

Как было отмечено ранее, в основе нахождения точечных и интервальных прогнозов лежит предположение о том, что существующие в прошлом основные показатели (факторы), а также тенденции их изменения, сохраняются и в будущем. При этом уровни ряда равноценны при решении задач прогнозирования. Однако при решении ряда задач появляется необходимость учитывать важность именно последних реализаций исследуемого процесса, т. е. предполагать неравноценность уровней ряда. Последнее может быть существенно, например, при краткосрочном планировании. Для исследования подобных процессов используют адаптивные методы прогнозирования.

§ 3.4. Адаптивные методы прогнозирования

Адаптивными методами прогнозирования называются методы, которые строят экономико-математические модели, способные оперативно реагировать на изменение условий с учетом результата прогноза на предыдущем шаге. Эти методы являются «самокорректирующимися», они способны быстро приспособливать структуру и параметры модели рассматриваемого процесса к изменению условий.

При оценке параметров с помощью адаптивных методов, в отличие от методов, рассмотренных ранее, уровням ряда присваиваются определенные значения — веса. Значение веса каждого уровня зависит от того насколько сильным является его влияние на текущий уровень.

Все модели, построенные с помощью адаптивных методов, базируются на двух схемах, а именно, на схеме скользящего среднего и схеме авторегрессии. В данном учебном пособии будет рассмотрена только схема скользящего среднего.

При использовании схемы скользящего среднего оценка текущего уровня определяется как среднее взвешенное предшествующих уровней с разными весами. Значения весов уровней убывают по мере удаления от текущего уровня. Таким образом, вес, т. е. информационная ценность предыдущих уровней, будет тем большей, чем ближе они к концу интервала наблюдений.

Общая схема построения моделей с применением адаптивных методов включает следующие этапы:

1. Выбираются несколько первых уровней ряда, по которым оцениваются значения параметров модели.
2. Определяется прогноз на один шаг по построенной модели.

3. Определяется отклонение найденного прогноза от фактического значения уровня ряда, которое рассматривается как ошибка прогнозирования.

4. Производится корректировка модели с учетом ошибки прогнозирования.

5. Рассчитывается прогноз на следующий момент времени по скорректированной модели и т. д.

Нетрудно понять, что модель, построенная таким образом, постоянно получает и «впитывает» в себя новую информацию, что является важным условием правильного отражения тенденции развития процесса.

На практике наиболее часто используют две модели скользящего среднего: модель Хольта и ее частный случай — модель Брауна, при этом из всех методов скользящей средней применяют метод экспоненциального сглаживания.

Экспоненциальное сглаживание

Экспоненциальное сглаживание, как было отмечено ранее, относится к методам механического выравнивания. Главная особенность этого метода состоит в том, что при нахождении новых сглаженных уровней используют значения только предыдущих уровней этого ряда. Эти уровни берутся с определенным весом, при этом вес уровня увеличивается по мере приближения его к моменту времени, для которого определяется новое, более сглаженное значение уровня ряда.

При применении метода экспоненциального сглаживания используется рекуррентная формула:

$$S_t = \alpha \cdot y_t + \beta \cdot S_{t-1},$$

где S_t — значение экспоненциальной средней в конкретный момент времени t ;

α — параметр сглаживания.

Параметр сглаживания имеет большое значение. Он является постоянной величиной и для него выполнено неравенство $0 < \alpha < 1$, кроме этого $\alpha + \beta = 1$. Таким образом, параметр β , называемый коэффициентом дисконтирования, равен $\beta = 1 - \alpha$.

Экспоненциальную среднюю S_t можно выразить через предшествующие значения уровней ряда, если последовательно использовать вышеприведенное рекуррентное соотношение. В результате получаем формулу:

$$S_t = \alpha \cdot \sum_{i=0}^n \beta^i \cdot y_{t-i}.$$

Следовательно, величина S_t определяется как взвешенная сумма всех членов ряда, при этом веса отдельных уровней убывают при их удалении от рассматриваемого периода. Из-за этого свойства эта величина была названа экспоненциальной средней по аналогии с экспоненциальной функцией. Поясним последнее более подробно. Пусть $\alpha = 0,4$. Тогда, очевидно, вес текущего уровня y_t будет равен этому значению, т. е. 0,4. Вес предыдущего уровня y_{t-1} будет определяться как $\alpha\beta = 0,4 \times 0,6 = 0,24$; для уровня y_{t-2} вес будет равен $\alpha\beta^2 = 0,4 \times 0,36 = 0,144$ и т. д.

При расчете экспоненциальной средней в определенный момент времени t в соответствии с описанной выше рекуррентной формулой необходимо знать значение экспоненциальной средней в предыдущий момент времени. Поэтому возникает вопрос, как найти начальное значение S_0 , которое необходимо для определения S_1 . При решении

практических задач в качестве начального значения S_0 часто используется либо значение первого уровня ряда, либо среднее арифметическое из всех имеющихся уровней временного ряда, либо среднее арифметическое нескольких первых уровней ряда, например,

$$S_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Такое правило определения начального значения обеспечивает достаточно хорошую согласованность первых уровней первоначально заданного и сглаженного рядов.

В методе экспоненциального сглаживания важно правильно выбрать значение параметра сглаживания α . Последнее связано с тем, что именно от этого параметра зависят значения коэффициентов модели, а следовательно, и прогнозные значения. Нетрудно понять, что величина параметра α по-разному влияет на прогнозные оценки. При увеличении значения α влияние на формирование тренда начальных условий достаточно быстро уменьшается, а вклад последних наблюдений, наоборот, становится все больше. Если значение α достаточно мало, то при нахождении значения прогноза будут учитываться все наблюдения, при этом уменьшение влияния более старой информации будет происходить, но достаточно медленно. Наиболее известны два главных правила, по которым определяют приближенное значение параметра α . Первое правило, полученное Р. Брауном, основывается на условии равенства экспоненциальной средней и скользящей средней. По нему параметр α определяется по формуле:

$$\alpha = \frac{2}{n + 1}.$$

Второе правило, по сути, является соотношением Мейера:

$$\alpha \approx \frac{\sigma_n}{\sigma_\varepsilon},$$

где σ_n — среднеквадратическая ошибка модели;

σ_ε — среднеквадратическая ошибка исходного ряда.

Использование второго правила (соотношения Мейера) существенно затруднено тем, что из полученной первоначальной информации очень сложно определить достоверные значения среднеквадратических ошибок.

При решении практических задач, связанных с обработкой экономических временных рядов методом экспоненциального сглаживания, величину параметра α , без точного теоретического обоснования, рекомендуется выбирать из интервала от 0,1 до 0,3. Однако, если при выбранном параметре α , сглаженные значения при подходе к правому концу временного ряда начинают существенно отличаться от соответствующих значений первоначально заданного ряда, то параметр сглаживания необходимо поменять.

Необходимо отметить, что при методе экспоненциального сглаживания начальные и конечные уровни сглаживаемого ряда не теряются.

Контрольные вопросы

1. При прогнозировании временного ряда, какие требования к исходной информации являются необходимыми?
2. Что понимается под прогнозом?
3. Какие бывают прогнозы? Чем они отличаются?
4. Что такое точечный прогноз?
5. Что такое интервальный прогноз?

6. Как определить точечный прогноз? Что для этого необходимо знать?
7. Как определить интервальный прогноз? Что для этого необходимо знать?
8. Каковы основные предпосылки для получения адекватного прогноза?
9. Как определить независимость значений случайной составляющей?
10. Перечислите основные характеристики, которые используются для проверки нормальности случайной составляющей.
11. Какие характеристики точности моделей являются важнейшими для прогнозирования?
12. Как определить значение критических точек для теста Дарбина–Уотсона?
13. Опишите основные этапы проверки статистической гипотезы о наличии автокорреляции в остатках по критерию Дарбина–Уотсона.
14. Поясните, почему расчетное значение статистики в методе Дарбина –Уотсона ненамного отличается от двух, если отсутствует корреляция в остатках.
15. Какие характерные особенности имеют адаптивные методы прогнозирования?
16. Назовите существующие виды адаптивных моделей прогнозирования.
17. Почему экспоненциальное сглаживание имеет название «экспоненциального»?

18. Что понимается под параметром адаптации при проведении процедуры экспоненциального сглаживания?

Тестовые задания

1. Укажите справедливые утверждения по поводу критерия Дарбина– Уотсона (выберите несколько ответов):

- а) изменяется в пределах от 0 до 4;
- б) позволяет проверить гипотезу о наличии тренда;
- в) равен 0 в случае отсутствия автокорреляции;
- г) позволяет проверить гипотезу о наличии автокорреляции первого порядка.

2. Предпосылками метода наименьших квадратов являются (укажите несколько ответов):

- а) случайные отклонения коррелируют друг с другом;
- б) закон распределения случайной составляющей не является нормальным;
- в) случайные отклонения являются независимыми друг от друга;
- г) дисперсия случайных отклонений постоянна для всех наблюдений.

3. Средний абсолютный прирост используется для вычисления прогнозного значения в следующей точке, если:

- а) цепные абсолютные приросты примерно одинаковы;
- б) цепные темпы роста примерно одинаковы;
- в) базисные абсолютные приросты примерно одинаковы;
- г) в любом случае.

4. Изменение ежеквартальной динамики процентной ставки банка в течение 7 кварталов происходило примерно с постоянным темпом роста. Средний темп роста составил 92,7 %. Рассчитайте

прогнозное значение процентной ставки банка в 8 квартале, если в 7 квартале она составила 11 %. Прогноз равен:

- а) 10,2 %;
- б) 11,8 %;
- в) 9,0 %;
- г) 30,1 %.

5. Для ежеквартальной динамики процентной ставки банка оказалось, что значения цепных абсолютных приростов примерно одинаковы в течение 7 кварталов. Средний абсолютный прирост составил — 0,4 %. Рассчитайте прогнозное значение процентной ставки банка в 8 квартале, если в 7 квартале она составила 9,2 %. Прогноз равен:

- а) 10,2 %;
- б) 7,0 %;
- в) 9,9 %;
- г) 8,8 %.

6. На основе временного ряда месячной динамики производства бумаги (с января 2013 года по июль 2024 года) рассчитывается прогноз производства в сентябре 2024 года. Этот прогноз является:

- а) оперативным, поисковым;
- б) краткосрочным поисковым;
- в) краткосрочным нормативным;
- г) невозможно определить.

7. По данным о производстве угля за 9 лет были оценены параметры модели

$\hat{y}_t = 425 - 5,09t - 1,59t^2$. Используя полученную модель, рассчитайте прогноз производства в следующем году ($t = 10$). Прогноз равен:

- а) 215,1;

- б) 240,2;
- в) 300,5;
- г) 400,1.

8. По данным задания 5. Рассчитайте интервальный прогноз угля в следующем году, если дисперсия отклонений фактических значений от расчетных равна 9. Доверительную вероятность принять равной 0,9. Нижняя граница прогноза равна:

- а) 105,7;
- б) 205,7;
- в) 305,7;
- г) 400,7.

Задания для самостоятельной работы

1. Для линейной модели временного ряда:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
43	47	50	48	54	57	61	59	65	62

а) оцените адекватность модели (принять $t_\alpha = 1,09$ при доверительной вероятности 0,7; критические уровни критерия Дарбина-Уотсона $d_1 = 1,08$, $d_2 = 1,36$); б) осуществите оценку точности модели, используя показатели среднего квадратического отклонения и средней относительной ошибки аппроксимации.

2. Исследовались данные о численности населения города (тыс. чел.) за 14 лет. По данным было построено линейное уравнение тренда и для каждого года получены следующие значения остатков:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_t	0,14	-0,6	-0,3	0,98	0,28	0,4	-0,1	0,17	0,49	-0,3	0,03	0,32	-0,2	-0,1

При уровне значимости $\alpha=0,05$ проверить по критерию Дарбина–Уотсона гипотезу об отсутствии в остатках автокорреляции первого порядка.

3. По временному ряду, в котором указаны данные о выпуске продукции y (тыс. ед.) за шесть лет, найдено уравнение тренда $\hat{y}_t = -0,58 + 3,68t$.

t	1	2	3	4	5	6
y_t	3	7	10	15	17	21

Требуется при $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о нормальном распределении случайной компоненты, используя понятия асимметрии и эксцесса.

4. Рассчитать экспоненциальные средние для двух значений параметров $\alpha=0,5$ и $\alpha=0,9$ для следующих данных о численности населения города (тыс. чел.) за 10 лет (на начало года):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	42	38	41	45	49	48	53	51	64	75

В качестве начального значения взять среднее арифметическое из пяти первых значений ряда. Сравнить графически исходный временной ряд и экспоненциально сглаженные ряды.

5. Дан временной ряд, в котором указаны данные об объеме реализованной продукции y (тыс. ед.) за восемь лет:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	3	6	10	15	17	21	25	29

По ряду построено уравнение тренда $\hat{y}_t = -0,58 + 3,68t$. Рассчитать точечный и интервальный прогноз реализации продукции в следующем девятом году, приняв в качестве доверительной вероятности $\gamma=0,9$.

6. Дан временной ряд, в котором указаны данные о численности населения поселка y (тыс. чел.) за восемь лет (на конец года):

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	72	78	83	87	90	95	97	102

По ряду построено уравнение тренда $\hat{y}_t = 68,5 + 4,5t$. Рассчитать точечный и интервальный прогноз численности населения в следующем девятом году, приняв в качестве доверительной вероятности $\gamma=0,9$.

7. Имеются следующие данные о численности населения города (тыс. чел.) за 5 лет (на начало года):

t	1	2	3	4	5
y_t	72	78	83	87	90

Предположив, что тенденция ряда может быть описана параболической моделью $\hat{y}_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$, рассчитать прогнозное значение численности населения в следующем шестом году.

8. Дан временной ряд, в котором указаны данные о производстве картофеля в хозяйствах населения России y (млн т) за восемь лет:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	29,2	31,1	29,8	35,9	34,9	37	39,1	40

По ряду построено уравнение тренда $\hat{y}_t = 27,3 + 1,6t$. Рассчитать точечный и интервальный прогноз производства картофеля в следующем девятом году, приняв в качестве доверительной вероятности $\gamma=0,9$.

9. Исследовались данные о численности промышленно-производственного персонала предприятия за 14 лет. По данным было построено линейное уравнение тренда и для каждого года получены следующие значения остатков:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_t	0,1	-0,5	-0,4	0,98	0,28	-0,4	-0,1	0,17	0,49	-0,3	0,03	0,32	-0,2	-0,1

При уровне значимости $\alpha=0,05$ проверить по критерию Дарбина–Уотсона гипотезу об отсутствии в остатках автокорреляции первого порядка.

10. Приведены следующие данные о численности населения города (тыс. чел.) за 8 лет (на начало года):

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y _t	35	38	41	45	49	48	51	53

Предположив, что тенденция ряда может быть описана линейной моделью $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$, рассчитать прогнозное значение численности населения в следующем десятом году.

11. По временному ряду, в котором указаны данные о численности населения y (тыс. чел.) за шесть лет, найдено уравнение тренда $\hat{y}_t = 68,5 + 4,5t$.

t	1	2	3	4	5	6
y _t	72	78	83	87	90	95

Требуется при $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о нормальном распределении случайной компоненты, используя понятия асимметрии и эксцесса.

12. Имеются следующие данные об остатках наличных денег у населения РФ в течение семи месяцев (на начало месяца, трлн руб):

t	1	2	3	4	5	6	7
y _t	75,8	77,9	80	82,2	84,3	86,6	88,7

Рассчитать прогнозное значение остатка наличных денег в девятом месяце, используя показатель среднего абсолютного прироста, предварительно обосновав правомерность использования этого показателя.

13. Динамика реализации произведенной на производственном объединении продукции (в млн руб.) за 14 лет представлена в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y _t	635	621	616	613	615	613	624	655	599	645	580	545	560	552

Проверить гипотезу об отсутствии тенденции для данного ряда по критерию Фостера–Стюарта с доверительной вероятностью $\gamma=0,95$.

14. Рассчитать экспоненциальные средние при двух значениях параметров $\alpha=0,5$ и $\alpha=0,9$ для следующих данных об объеме реализованной продукции y_t (млн ед.) за 9 лет (на конец года):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y _t	52	48	51	55	59	58	63	61	74

В качестве начального значения взять среднее арифметическое из четырех первых значений ряда. Сравнить графически исходный временной ряд и экспоненциально сглаженные ряды.

15. Исследовались данные о численности населения города за 9 лет. По данным было построено уравнение парной линейной регрессии и для каждого года получены следующие значения остатков:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
e _i	0,14	-0,6	-0,3	0,98	0,28	-0,4	-0,1	0,17	0,49

По критерию Дарбина–Уотсона проверить гипотезу о существовании автокорреляции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена та часть математико-статистического исследования, которая связана, в основном, с применением методов многомерного математико-статистического анализа.

Эти методы непрерывно развиваются и совершенствуются, расширяется их область применения. Особенно успешно происходит применение этих методов с использованием новейших средств вычислительной техники и программных средств (пакетов прикладных программ — SPSS, Statistika и т. д.)

Однако не стоит забывать, что выводы, прогнозы и рекомендации, полученные после математико-статистического исследования, будут точны и надежны только тогда, когда, во-первых, выбор соответствующего метода анализа научно обоснован и, во-вторых, этот метод правильно применен с учетом всех ограничений и допущений.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Нормативные правовые акты

1. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» // Собрание законодательства Российской Федерации, 31.12.2012, № 53 (ч. 1), ст. 7598.
2. Федеральный закон от 27 июля 2006 г. № 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» (с изменениями и дополнениями) // Собрание законодательства Российской Федерации, 27.06.2006, № 3 (ч. 1), ст. 798.

Основная литература

1. Агалаков С. А. Эконометрическое моделирование с Gretl : практикум. — Омск : Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского (ОмГУ), 2020. — 76 с.
2. Артамонов Н. В., Ивин Е. А., Курбацкий А. Н., Фантаццини Д. Введение в анализ временных рядов : учебное пособие для вузов / Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, кафедра эконометрики и математических методов экономики. — Вологда : ВолНИЦ РАН, 2021. — 134 с.
3. Большакова Л. В., Яковлева Н. А. Математико-статистические методы обработки экспериментальных данных при проведении научных исследований : методические рекомендации. В 3-х частях. — Санкт-Петербург : Изд-во СПбУ МВД России, 2022. Часть 3. — 92 с.
4. Попова И. Н. Анализ временных рядов : учебник для вузов — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 74 с.
5. Прохоров Ю. В., Прохоров А. В. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике. — Москва : МЦНМО, 2020. — 144 с.

6. Рубцов Г. Г., Литвиненко А. Н., Большакова Л. В. Тенденции развития отечественной инновационной политики на примере СЗФО // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. — 2020. — Т. 13. — № 1. — С. 65–78.

Дополнительная литература:

7. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика. Основы эконометрики : учебник для вузов. В 2-х т. — Т. 1. Теория вероятностей и прикладная статистика. — Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 656 с.

8. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика. Основы эконометрики : учебник для вузов. В 2-х т. — Т. 2. Основы эконометрики. — Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 432 с.

9. Большакова Л. В., Примакин А. И., Яковлева Н. А. Математико-статистические методы обработки экспериментальных данных при проведении научных исследований : методические рекомендации. В 3-х частях. — Санкт-Петербург : Изд-во СПбУ МВД России, 2014. Часть 1. — 92 с.

10. Большакова Л. В., Примакин А. И., Яковлева Н. А. Применение кластерного и дискриминантного анализов в процессе обработки и интерпретации статистических данных при обеспечении экономической и информационной безопасности хозяйствующего субъекта // Вестник Санкт-Петербургского университета МВД России. — № 2 (62). — 2014. — С. 148–156.

11. Большакова Л. В., Яковлева Н. А. Математико-статистические методы обработки экспериментальных данных при проведении научных исследований : методические рекомендации. В 3-х частях. — Санкт-Петербург : СПбУ МВД России, 2018. — Ч. 2. — 68 с.

12. Большакова Л. В., Яковлева Н. А. Теория проверки статистических гипотез при математико-статистическом исследовании педагогических проблем // Вестник Санкт-Петербургского университета МВД России. — № 4 (72). — 2016. — С. 149–157.

13. Васильева Э. К., Юзбашев М. М. Выборочный метод в социально-экономической статистике : учебное пособие. — Москва : Финансы и статистика, ИНФРА-М, 2010. — 254 с.

14. Громова Н. М., Громова Н. И. Основы экономического прогнозирования. — Москва : Изд-во «Академия Естествознания», 2006. — 112 с.

15. Доугерти К. Введение в эконометрику / пер. с англ. Е. Н. Лукаш и др. — Москва : ИНФРА-М, 1999. — 402 с.

16. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс : учебник. — Москва : Дело, 2007. — 400 с.

17. Орлов А. И. Эконометрика : учебное пособие для вузов. — Москва : Издательство «Экзамен», 2002. — 576 с.

18. Садовникова Н. А., Шмойлова Р. А. Анализ временных рядов и прогнозирование : учебное пособие. — Москва : Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2004. Вып. 2. — 200 с.

19. Эконометрика : учебник / под ред. И. И. Елисеевой. — Москва : Финансы и статистика, 2002. — 344 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,37
Число степеней свободы ν	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Критические точки распределения Пирсона χ^2

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

**Критические точки распределения Фишера–Снедекора
для $\alpha = 0,05$**

v_2	v_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,58	230,16	233,99	238,88	243,90	249,05	254,32
2	18,512	19,000	19,164	19,247	19,297	19,329	19,371	19,421	19,454	19,496
3	10,128	9,557	9,277	9,117	9,013	8,941	8,845	8,744	8,638	8,526
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,030	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,147	4,000	3,841	3,699
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,726	3,575	3,410	3,230
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,438	3,284	3,115	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	2,948	2,788	2,609	2,404
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,849	2,687	2,505	2,296
13	4,667	3,806	3,411	3,197	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,206
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,591	2,425	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,960
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,082	1,843
21	4,325	3,467	3,067	2,840	2,685	2,573	2,420	2,250	2,054	1,811
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,375	2,204	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,964	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,946	1,691
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,291	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,003	1,793	1,509
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,917	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,016	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Большакова Людмила Валентиновна,
кандидат физико-математических наук, доцент;

Сибаров Константин Дмитриевич,
кандидат технических наук, доцент;

Яковлева Наталья Александровна,
кандидат психологических наук, доцент

ПРИМЕНЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Учебное пособие

Редактор *Лукьянова Г. В.*
Компьютерная верстка *Душкова А. Ю.*

ISBN 978-5-00277-009-0



EDN: NWBPJV



Подписано в печать 16.04.2025. Формат 60×84 ¹/₁₆

Печать цифровая. Объем 8,0 п. л. Тираж 50 экз. Заказ № 99/25

Отпечатано в Санкт-Петербургском университете МВД России
198206, Санкт-Петербург, ул. Летчика Пилютова, д. 1