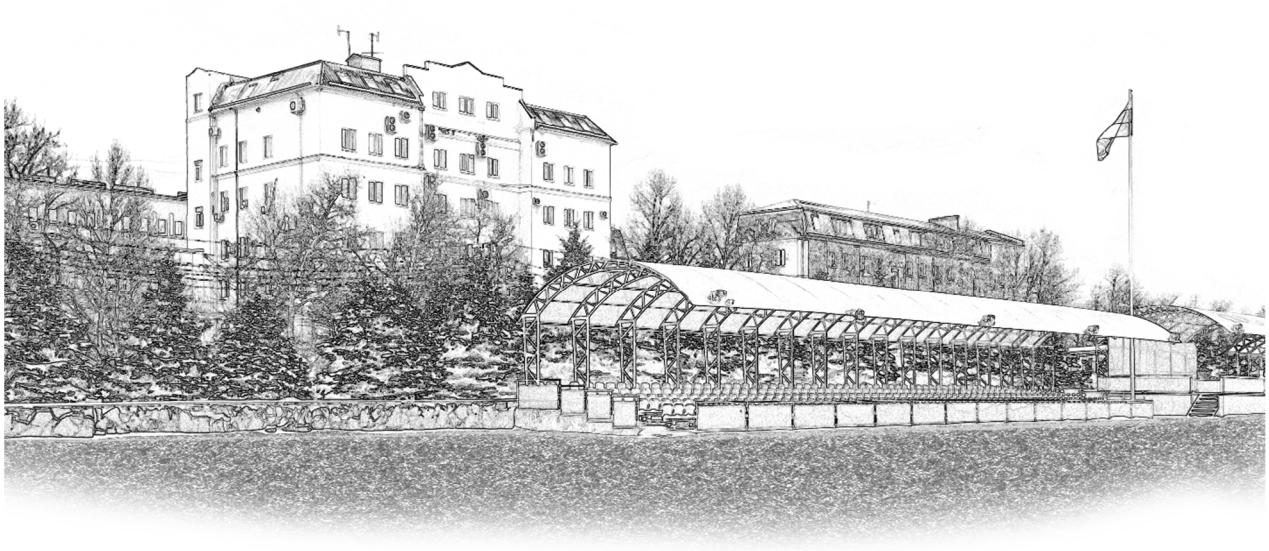
Краснодарский университет МВД России

Е. В. Михайленко

МАТЕМАТИКА
(для подготовки специалистов подразделений тылового обеспечения органов внутренних дел)



Краснодар
2026

Краснодарский университет МВД России

Е. В. Михайленко

МАТЕМАТИКА
(для подготовки специалистов подразделений тылового обеспечения органов внутренних дел)

Учебник

Краснодар
2026

УДК 51
ББК 22.1
М690

Одобрено
редакционно-издательским советом
Краснодарского университета
МВД России

Рецензенты:
В. М. Бакулин, кандидат физико-математических наук (Волгоградская академия МВД России);
С. В. Крыгин, кандидат юридических наук, доцент (Нижегородская академия МВД России).

Михайленко Е. В.
М690 Математика (для подготовки специалистов подразделений тылового обеспечения органов внутренних дел) : учебник / Е. В. Михайленко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2026. – 432 с.

ISBN 978-5-9266-2242-0

Содержатся разделы математики: элементы линейной алгебры, основы математического анализа, теория вероятностей, введение в математическую статистику – для обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 Менеджмент (направленность образовательной программы – Тыловое обеспечение органов внутренних дел). Излагаются понятия, определения, методы, алгоритмы и примеры решения задач.

Для профессорско-преподавательского состава, адъюнктов, курсантов, слушателей образовательных организаций МВД России и сотрудников органов внутренних дел Российской Федерации.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9266-2242-0

© Краснодарский университет
МВД России, 2026
© Михайленко Е. В., 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ... 13
Раздел 1. Элементы линейной алгебры ... 16
Глава 1. Введение в линейную алгебру ... 16
1.1. Понятие множества ... 16
1.2. Операции над множествами ... 18
1.3. Числовые множества ... 21
1.3.1. Перечень числовых множеств ... 21
1.3.2. Счетные множества ... 22
1.4. Множество действительных чисел ... 24
1.4.1. Основные свойства вещественных чисел ... 24
1.4.2. Изображение действительных чисел ... 25
1.4.3. Абсолютная величина действительного числа ... 26
1.4.4. Числовые промежутки ... 27
1.5. Понятие комплексного числа ... 27
1.5.1. Определение комплексного числа ... 28
1.5.2. Геометрическое изображение комплексных чисел ... 30
1.5.3 Модуль и аргумент комплексного числа ... 30
1.6. Действия над комплексными числами ... 31
1.6.1. Сумма и разность комплексных чисел ... 31
1.6.2. Произведение комплексных чисел ... 32
1.6.3. Деление комплексных чисел ... 32
1.6.4. Решение квадратных уравнений ... 33
Глава 2. Матрицы и определители ... 36
2.1. Основные понятия матричного счисления ... 36
2.1.1. Определение матрицы ... 36
2.1.2. Квадратные матрицы ... 37
2.1.3. Транспонирование матриц ... 39
2.2. Операции над матрицами ... 40
2.2.1. Сложение матриц ... 40

2.2.2. Умножение матрицы на число 41
2.2.3. Матричное произведение 42
2.3. Определители 44
2.3.1. Вычисление определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков 45
2.3.2. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы ... 47
2.3.3. Вычисление определителей n-ого порядка 48
2.3.4. Свойства определителей 49
2.4. Ранг матрицы 52
2.4.1. Понятие ранга матрицы и базисных миноров 52
2.4.2. Метод окаймляющих миноров 54
2.4.3. Вычисление ранга матрицы методом Гаусса 55
2.5. Обратная матрица 57
2.5.1. Определение обратной матрицы 57
2.5.2. Нахождение обратной матрицы 57
2.5.3. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса 58
Глава 3. Системы линейных алгебраических уравнений 63
3.1. Линейное уравнение 64
3.2. Системы линейных алгебраических уравнений 66
3.2.1. Основные понятия и определения 66
3.2.2. Элементарные преобразования 67
3.2.3. Матричная форма записи системы линейных уравнений 69
3.3. Теорема Кронекера-Капелли 70
3.4. Методы решения определенных систем 73
3.4.1. Метод обратной матрицы 73
3.4.2. Метод Крамера 75
3.5. Метод Гаусса 77
3.5.1. Описание метода Гаусса 77
3.5.2. Решение определенных систем 80
3.5.3. Решение неопределенных систем 83
3.6. Однородные системы линейных алгебраических уравнений 86

3.6.1. Основные понятия систем однородных уравнений 86
3.6.2. Условия совместности однородных систем 87
3.6.3. Решение однородных систем линейных уравнений 88
3.7. Фундаментальная система решений 90
3.7.1. Понятие фундаментальной системы 90
3.7.2. Построение фундаментальной системы решений 92
Глава 4. Векторная алгебра 96
4.1. Основные понятия векторной алгебры 97
4.2. Линейные операции над векторами 99
4.3. Метод координат. 101
4.3.1. Разложение вектора по ортам координатных осей. 101
4.3.2. Модуль вектора. 103
4.3.3. Направляющие косинусы 103
4.3.4. Равенство и коллинеарность векторов 105
4.4. Скалярное произведение 106
4.4.1. Определение скалярного произведения 106
4.4.2. Выражение скалярного произведения через координаты 107
4.4.3. Приложения скалярного произведения 108
4.5. Векторное произведение 109
4.5.1. Определение и свойства векторного произведения 109
4.5.2. Векторное произведение в координатной форме 111
4.5.3. Некоторые приложения векторного произведения 113
4.6. Смешанное произведение векторов 115
4.6.1. Определение и свойства смешанного произведения 115
4.6.2. Смешанное произведение в координатах 117
4.6.3. Некоторые приложения смешанного произведения 118
Раздел 2. Основы математического анализа 124
Глава 5. Теория пределов и непрерывных функций 124
5.1. Функция одной переменной 124
5.1.1. Определение функции 124

5.1.2. Способы задания функций 125
5.1.3. Область определения функции 127
5.2. Основные свойства функций 129
5.2.1. Четность, нечетность функции 129
5.2.2. Периодичность 130
5.2.3. Монотонность функции 131
5.3. Классификация функций 133
5.3.1. Явные и неявные функции 133
5.3.2. Обратные функции 134
5.3.3. Сложные функции 135
5.3.4. Понятие элементарной функции 135
5.4. Понятие предела функции 137
5.4.1. Предел числовой последовательности 137
5.4.2. Предел функции в бесконечности 138
5.4.3. Предел функции в точке 140
5.5. Бесконечно малые и бесконечно большие величины 142
5.5.1. Бесконечно малые величины 142
5.5.2. Бесконечно большие величины 144
5.5.3. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин 146
5.6. Основные теоремы о пределах 148
5.6.1. Свойства пределов 148
5.6.2. Признаки существования пределов 150
5.6.3. Замечательные пределы 150
5.7. Непрерывность функции 152
Глава 6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной 155
6.1. Основные понятия дифференциального исчисления 155
6.1.1. Определение производной 155
6.1.2. Геометрический смысл производной 156
6.2. Дифференцирование функций 157

6.2.1. Основные формулы дифференцирования 158
6.2.2. Правила дифференцирования 158
6.3. Методы нахождения производных 161
6.3.1. Производная сложной функции 161
6.3.2 Производная обратной функции 161
6.3.3. Производные высших порядков 162
6.4. Правило Лопиталя 163
6.5. Локализация корней функции 165
6.5.1 Графическая локализация корней 165
6.5.2. Аналитическая локализация корней 167
6.6. Асимптоты функции 168
6.6.1. Вертикальные асимптоты 169
6.6.2. Наклонные асимптоты 170
6.7. Исследование функции с помощью производных 171
6.7.1. Монотонность функции 172
6.7.2. Экстремумы функции 173
6.7.3. Выпуклость и вогнутость функции 174
6.7.4. Точки перегиба 175
6.8. Исследование функций по общей схеме 176
Глава 7. Функции нескольких переменных 190
7.1. Понятие функции нескольких переменных 190
7.1.1. Основные определения 191
7.1.2. Предел функции нескольких переменных 192
7.1.3. Основные свойства непрерывных функций двух переменных 194
7.2. Дифференцирование функции нескольких переменных 195
7.2.1. Частные производные первого порядка 195
7.2.2. Производные сложных функций 197
7.2.3. Дифференциал функции. 198
7.2.4. Частные производные высших порядков 198

7.3. Производные по направлению. Градиент 200
7.3.1. Производная по направлению 200
7.3.2. Градиент 202
7.4. Экстремумы функции двух переменных 202
7.4.1. Необходимые условия экстремума 203
7.4.2. Достаточные условия экстремума 206
7.5. Исследование функции в замкнутой области 208
7.5.1. Общая схема исследования функций в замкнутой области 208
7.5.2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений 209
Глава 8. Неопределенные интегралы 214
8.1. Понятие неопределенного интеграла 215
8.2. Основные свойства и табличные интегралы 216
8.2.1. Основные свойства неопределенного интеграла 216
8.2.2. Табличные интегралы 217
8.3. Простейшие методы интегрирования 218
8.3.1. Непосредственное интегрирование 218
8.3.2. Внесение под знак дифференциала 221
8.3.3. Метод замены переменных 225
8.3.4. Метод интегрирования по частям 228
8.4. Интегрирование рациональных дробей 231
8.4.1. Приведение дроби к правильной 231
8.4.2. Разложение правильной дроби 232
8.4.3. Знаменатели дробей с комплексными корнями 234
Глава 9. Определенные, несобственные и кратные интегралы 237
9.1. Понятие определенного интеграла 237
9.1.1. Основные определения 237
9.1.2. Формула Ньютона-Лейбница 239
9.1.3. Свойства определенного интеграла 241
9.2. Особенности вычисления определенных интегралов 242
9.2.1. Непосредственное интегрирование 242

9.2.2. Интегрирование подстановкой (замена переменной) 244
9.2.3. Интегрирование по частям 245
9.2.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах 246
9.3. Геометрические приложения определенного интеграла 247
9.3.1. Вычисление площадей плоских фигур 247
9.3.2. Вычисление длины дуги плоской кривой 251
9.3.3. Вычисление объемов тел вращения 252
9.4. Несобственные интегралы 252
9.4.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования 252
9.4.2. Несобственные интегралы от разрывных функций 257
Раздел 4. Теория вероятностей 262
Глава 10. Комбинаторный анализ 262
10.1. Основные понятия комбинаторики 262
10.1.1. Правило сложения 264
10.1.2. Правило умножения 265
10.2. Комбинаторные конфигурации без повторений 266
10.2.1 Размещения без повторений 267
10.2.2. Перестановки без повторений 269
10.2.3. Сочетания без повторений 271
10.3. Комбинаторные конфигурации с повторениями 273
10.3.1. Размещения с повторениями 274
10.3.2. Перестановки с повторениями 276
10.3.3. Сочетания с повторениями 277
10.4. Разбиения 278
Глава 11. Вероятность события 282
11.1. Основные понятия теории вероятностей 282
11.1.1. Основные понятия и классификация событий 284
11.1.2. Операции над событиями 290

11.2. Вероятность события 291
11.2.1. Классическая вероятность 292
11.2.2. Статистическая вероятность 295
11.2.3. Геометрическая вероятность 297
11.3. Вероятности суммы и произведения несовместных событий 299
11.3.1. Вероятность суммы несовместных событий 299
11.3.2. Вероятность произведения несовместных событий 301
11.4. Вероятность суммы и произведения совместных независимых событий 302
11.4.1. Вероятность произведения совместных независимых событий 302
11.4.2. Вероятность суммы совместных независимых событий 304
11.5. Вероятность суммы и произведения произвольных событий 306
11.5.1. Условная вероятность 306
11.5.2. Вероятность произведения произвольных событий 308
11.5.3. Вероятность суммы произвольных событий 311
11.6. Формула полной вероятности 314
11.6.1. Основные понятия и формулы 314
11.6.2. Вычисление вероятностей с помощью формулы полной вероятности 315
11.7. Формула гипотез Байеса 319
11.7.1. Теорема Байеса 320
11.7.2. Вычисление вероятностей гипотез 320
Глава 12. Повторные испытания 328
12.1. Формула Бернулли 329
12.2. Предельные теоремы в схеме Бернулли 331
12.2.1. Формула Пуассона 332
12.2.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа 334
12.2.3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа 336
12.2.4. Следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа 339

12.3. Наивероятнейшее число 339
Глава 13. Случайные величины 342
13.1. Понятия и определения случайных величин 342
13.1.1 Законы распределения дискретной случайной величины 343
13.1.2. Математические операции над случайными величинами 346
13.2. Функция распределения дискретных случайных величин 349
13.3. Числовые характеристики случайных величин 351
13.3.1. Математическое ожидание 351
13.3.2. Дисперсия 353
13.3.3. Среднее квадратическое отклонение 354
13.4. Законы распределения дискретных случайных величин 355
13.4.1. Биномиальный закон распределения 355
13.4.2. Закон распределения Пуассона 357
13.4.3 Геометрическое распределение 358
13.4.4. Гипергеометрическое распределение 359
13.5. Непрерывные случайные величины 361
13.5.1. Функция распределения непрерывной случайной величины 361
13.5.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины 363
13.5.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин 366
13.6. Законы распределения непрерывных случайных величин 367
13.6.1. Равномерный закон распределения 368
13.6.2. Показательный закон распределения 370
13.6.3. Нормальный закон распределения 372
Раздел 4. Введение в математическую статистику 378
Глава 14. Основные понятия математической статистики 378
14.1. Предмет и история развития математической статистики 380
14.2. Основные понятия и определения 382

14.2.1. Основные определения 382
14.2.2. Понятие вариационного ряда 383
14.2.3. Дискретные и интервальные вариационные ряды 385
14.2.4. Эмпирическая функция распределения 387
14.3. Графическое изображение статистического распределения 388
14.4. Числовые характеристики статистического распределения 393
14.4.1. Выборочное среднее 393
14.4.2. Выборочная дисперсия 394
14.4.3. Выборочное среднее квадратическое отклонение 395
14.5. Выборочные моменты и коэффициенты 396
14.5.1. Выборочные начальные и центральные моменты 396
14.5.2. Выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса 396
Глава 15. Основы регрессионного анализа 402
15.1. Введение в регрессионный анализ 403
15.1.1. Регрессионные модели 403
15.1.2. Виды уравнений парной регрессии 405
15.2. Построение и верификация парной линейной регрессии 409
15.2.1. Метод наименьших квадратов 410
15.2.2. Определение параметров уравнения линейной модели 411
15.2.3. Верификация построенной регрессионной модели 414
15.3. Нелинейные модели парной регрессии 418
15.3.1. Расчет параметров степенной модели 418
15.3.2. Показательная регрессионная модель 421
15.3.3. Гиперболическая модель парной регрессии 424
Заключение 427
Литература 429

Введение

Учебник «Математика» подготовлен на основе лекций по дисциплине математика, читаемых автором для курсантов Краснодарского университета МВД России, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 Менеджмент, направленность образовательной программы – Тыловое обеспечение органов внутренних дел.. Учебный материал учебника содержит понятия, определения, описание методов, алгоритмы и примеры решения задач, рассматриваемых в общей и линейной алгебре, математическом анализе, теории вероятностей и математической статистике.

Учебник состоит из четырех разделов: «1. Элементы линейной алгебры», «2. Основы математического анализа», «3. Теория вероятностей» и «4. Введение в математическую статистику».

Раздел учебника «1. Элементы линейной алгебры» посвящен исследованию абстрактных и числовых множеств, здесь рассматриваются основы матричной алгебры, предлагаются понятия и алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, описываются методы векторной алгебры.

В работе предложены основные понятия множеств, введены операции над ними, описаны основные числовые множества, большое внимание уделено описанию и свойствам действительных чисел. Подробно описывается множество комплексных чисел, рассматриваются понятия модуля и аргумента комплексного числа, даются геометрическое изображение комплексных чисел, действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрический и показательной формах, представлены методы решения квадратных уравнений с комплексными корнями.

Представленный теоретический материал включает основные понятия матричного исчисления, основные операции над матрицами, методы нахождения определителей, алгоритмы нахождения обратной матрицы и ранга матрицы. В работе содержатся основные понятия линейных уравнений и их систем, приводится их классификация, формы записи, рассматриваются

условия совместности систем, подробно описываются методы нахождения решений: метод обратной матрицы, метод Крамера, метод Гаусса. Особое внимание уделяется исследованию нетривиальной совместности однородных систем, представлен алгоритм нахождения фундаментальной системы решений.

В разделе также даются основные понятия векторной алгебры, вводятся линейные операции над векторами, особое внимание уделяется методу координат, определению, свойствам, методам вычисления и приложениям скалярного, векторного и смешенного произведений векторов.

Второй раздел учебника «Основы математического анализ» включает главы, рассматривающие теорию функций и пределов, основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных.

В этом разделе мы рассмотрим основные способы задания функции одной переменной, свойства функций, их классификацию, понятие предела функции в точке и бесконечности, понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин, свойства и признаки существования пределов. Большое место в разделе уделено дифференциальному исчислению. Здесь представлены определение и геометрический смысл производной, даются основные формулы и правила дифференцирования, методы нахождения производных высших порядков и принципы использования их для исследования функций. Для функций нескольких переменных определяются частные и смешанные производные, производные по направлению и градиент, представлены алгоритмы исследования функций в замкнутой области.

Кроме того, мы рассмотрим понятие и основные свойства неопределенного интеграла, простейшие методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замены переменных, по частям, интегрирование рациональных дробей, перейдем к определенным интегралам, особенностям их вычисления, геометрическим приложениям определенных интегралов, ознакомимся с несобственными интегралами.

Третий раздел учебника «Теория вероятностей» предназначен для изучения комбинаторики, основ теории вероятностей и случайных величин.

В разделе мы рассмотрим основные понятия и правила комбинаторики, комбинаторные конфигурации без повторений и с повторениями, разбиения. Мы изучим основные понятия и классификацию событий, операции над событиями, определения классической, статистической и геометрической вероятности, рассмотрим вероятность суммы и произведения несовместных, совместных независимых и произвольных событий, методы использования формулы полной вероятности и вычисления вероятностей гипотез по формуле Байеса. Существенное место в учебнике отведено нахождению вероятностей при повторных испытаниях.

В этом разделе мы также рассмотрим понятия и определения случайных величин, математические операции над ними, числовые характеристики и законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин.

Четвертый раздел «Элементы математической статистики» посвящен исследованию различных явлений методами статистического анализа.

Изучая математическую статистику, мы дадим основные понятия дискретного и интервального вариационных рядов, определим эмпирическую функцию распределения, представим некоторые приемы графического изображения статистического распределения, формулы для нахождения выборочного среднего, выборочной дисперсии, среднего квадратического отклонения, выборочных моментов и коэффициентов.

Большое внимание в учебнике посвящено методам регрессионного анализа. В последней главе мы рассмотрим корреляционную зависимость двух исследуемых факторов, определим виды популярных регрессионных уравнений двух переменных, алгоритмы оценки коэффициентов линейных и нелинейных моделей, методы верификации построенных модельных уравнений.

Для лучшего восприятия учебного материала все вводимые понятия, определения, теоремы, формулы и вычислительные методы поясняются рисунками и примерами решения задач с подробным описанием хода решений.

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Глава 1. Введение в линейную алгебру

Понятие «*множество*» является одним из основных неопределяемых понятий математики. Теория множеств – одна из самых молодых математических дисциплин. Ее появление связано с работами немецкого математика Георга Кантора, опубликованными в 1874–1884 годах.

Понятие множества оказалось настолько общим и в то же время полезным, что многие сложные конструкции алгебры, геометрии и математического анализа получили ясное теоретико-множественное описание. Это сделало теорию множеств универсальным математическим языком. С другой стороны, математиков давно интересовал вопрос логического обоснования своей науки. Развитие логики в XIX веке и появление теории множеств привело к значительному прогрессу в этих исследованиях. В настоящее время теория множеств – активно развивающаяся область математики.

В настоящей главе мы дадим определения основных понятий теории множеств, введем наиболее общие операции над множествами, установим связи между основными числовыми множествами, изучим основные свойства счетных и несчетных множеств, рассмотрим понятия супремума и инфимума ограниченных множеств.

Особое место в главе занимает множество действительных чисел. Здесь рассматриваются основные операции над вещественными числами, свойства операций над числами, сравнения и непрерывности вещественных чисел, изображение действительных чисел на числовой оси, определение и свойства абсолютной величины чисел, а также классификация числовых промежутков.

1.1. Понятие множества

Под *множеством* понимают совокупность (собрание, класс, семейство, коллекция) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве курсантов взвода (учебной группы), о множестве

точек отрезка, о множестве вершин четырехугольника, о множестве корней уравнения $x^2+3x-4=0$, о множестве всех натуральных чисел и т.д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$, а их элементы – малыми буквами $a, b, c, \ldots$

Запись $a \in A$ (читается: a принадлежит A) или $A \ni a$ (читается: A содержит a) означает, что a есть элемент множества A. Записи $a \notin A$ (a не принадлежит A) означает, что a не является элементом множества A.

Множество может содержать любое число элементов, конечное и бесконечное.

Множество, не содержащее ни одного, элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

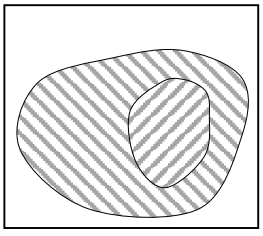
Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Пример. Запись $A=\{-1;2;5\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел -1, 2 и 5.

Пример. Запись $A=\{x \mid 0 \le x \le 3\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \le x \le 3$.

Для графического (наглядного) изображения множеств и их свойств используются диаграммы Эйлера – Венна (Леонард Эйлер (1707-1783) – швейцарский математик, механик и физик; Джон Венн (1834 - 1923) – английский логик). На них множество отождествляется с множеством точек на плоскости, лежащих внутри некоторых замкнутых кривых, например, окружностей (круги Эйлера).

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B (обозначение – $B \subseteq A$ или $A \supseteq B$).



Если одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то множества A и B *равны* или *совпадают* (обозначение – $A = B$).

Пример. Пусть $A = \{-1;0;3\}$, $B = \{-2;-1;0;2;3;5\}$, $C = \{-1;0;3\}$. В этом случае $A \subseteq B$, $A = C$, $C \subseteq B$.

1.2. Операции над множествами

Пусть даны два произвольных множества A и B.

Прямым произведением множеств A и B называется упорядоченное множество всех пар элементов $(a;b)$ таких, что a принадлежит множеству A, а b – множеству B.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Пример. Для множеств $A = \{-1;1;3\}$ и $B = \{-1;2\}$ вычислим $A \times B$.

По определению $A \times B = \{(a,b) \mid a \in \{-1;1;3\}, b \in \{-1;2\}\}$ или $A \times B = \{(-1;-1);(-1;2);(1;-1);(1;2);(3;-1);(3;2)\}$.

Множество $A \times B$ изображено на рисунке 1.1.

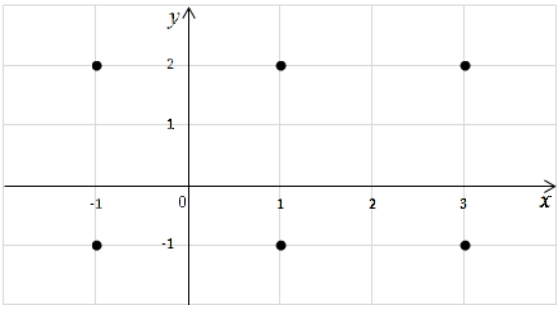
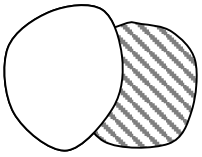


Рис. 1.1. Прямое произведение двух множеств.

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих или множеству A или множеств B или множеству A и B одновременно.

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

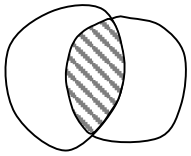


Пример. Для множеств $A = \{-1;2;3\}$ и $B = \{0;2;5;6\}$ вычислим $A \cup B$.

$A \cup B = \{-1;2;3\} \cup \{0;2;5;6\} = \{-1;0;2;3;5;6\}.$

Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и множеству B одновременно

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \ и \ x \in B\}$$

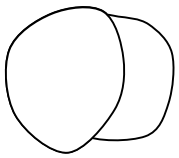


Пример. Для множеств $A = \{-1;2;3\}$, $B = \{0;2;5;6\}$ вычислим $A \cap B$.

$A \cap B = \{-1;2;3\} \cap \{0;2;5;6\} = \{2\}.$

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее только из тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \ и \ x \notin B\}$$



Пример. Для множеств $A = \{-1;2;3\}$ и $B = \{0;2;5;6\}$ вычислим $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

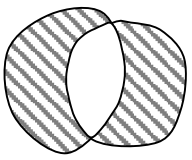
$A \setminus B = \{-1;2;3\} \setminus \{0;2;5;6\} = \{-1;3\}$, $B \setminus A = \{0;2;5;6\} \setminus \{-1;2;3\} = \{0;5;6\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество C, включающее все элементы множеств A и B, и не содержащее элементы принадлежащие одновременно обоим этим множествам.

$C = A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

или

$C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$



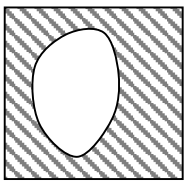
Пример. Для множеств $A = \{-1;2;3\}$ и $B = \{0;2;5;6\}$ вычислим $A \Delta B$.

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{-1;0;2;3;5;6\} \setminus \{2\} = \{-1;0;3;5;6\}.$

Пусть дано произвольное множество A.

Дополнение множества A – это множество всех элементов, не принадлежащих множеству A.

$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$, где U – *универсальное множество*.



Универсальное множество U, как правило, изображается множеством точек некоторого прямоугольника.

Для множеств существует понятие *мощность*. Для конечных множеств мощность совпадает с количеством элементов.

Пример. Вычислим мощность множеств $A = \{\varnothing\}$, $B = \{-1\}$, $C = \{-2;0;1;3\}$.

Множество A не содержит ни одного элемента, следовательно, $|A| = 0$.

Множество B содержит один элемент, следовательно, $|B| = 1$.

Множество C содержит четыре элемента, следовательно, $|C| = 4$.

Свойства операций над множествами

Пусть дано универсальное множество U. Тогда для любых множеств A, B, C ($A, B, C \subseteq U$) справедливы следующие свойства множеств:

1. Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность);
2. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$;
3. Если $A \supseteq B$, то $A \cup B = A$;
4. Если $A \supseteq B$, то $A \cap B = B$;
5. $A \cup A = A$ (идемпотентность объединения);
6. $A \cap A = A$ (идемпотентность пересечения);
7. $A \cup U = U$ (свойство единицы);
8. $A \cap U = A$ (свойство единицы);
9. $A \cup \varnothing = A$ (свойство нуля);
10. $A \cap \varnothing = \varnothing$ (свойство нуля);
11. $A \setminus A = \varnothing$;
12. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);
13. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность объединения);
14. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
15. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность пересечения);

16. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

17. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);

18. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

19. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

20. $(A \cap B) \cup A = A$ (поглощение);

21. $(A \cup B) \cap A = A$ (поглощение);

22. $\overline{\overline{A}} = A$ (свойство двойного дополнения);

23. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана);

24. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана);

25. $A \cup \overline{A} = U$ (свойство дополнения);

26. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (свойство дополнения);

27. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

1.3. Числовые множества

1.3.1. Перечень числовых множеств

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Рассмотрим основные числовые множества, а также установим связи между ними.

$N = \{1;\ 2;\ 3;\ldots;\ n;\ldots\}$ *–множество натуральных чисел*;

$Z_0 = \{0;1;2;3;\ldots;\ n;\ldots\}$ *– множество целых неотрицательных чисел*;

$Z = \{\ldots;-n;\ldots;-2;-1;0;1;2;3;\ldots;\ n;\ldots\}$ *– множество целых чисел*;

$Q = \left\{\dfrac{m}{n} :\ m \in Z, n \in N\right\}$ *– множество рациональных чисел*;

R – множество действительных чисел.

Очевидно, что имеет место включение $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

$I = R \setminus Q$ *– множество иррациональных чисел*.

Пример. Из множества действительных чисел $\left\{-8{,}3;\ -4;\ tg3;\ 0;\ 0{,}7;\ 1;\ \sin\frac{\pi}{6};\ \ln 5;\ e;\ \pi;\ 3{,}(2);\ \frac{17}{3};\ 6\right\}$ выберем подмножества: натуральных, целых, рациональных и иррациональных чисел.

Множество натуральных чисел: $\{1;\ 6\}$; множество целых чисел: $\{-4;\ 0;\ 1;\ 6\}$; множество рациональных чисел: $\left\{-8{,}3;\ -4;0;0{,}7;1;\ \sin\frac{\pi}{6};\ 3{,}(2);\ \frac{17}{3};6\right\}$; множество иррациональных чисел: $\{tg3;\ \ln 5;\ e;\ \pi\}$.

1.3.2. Счетные множества

Конечное множество – множество, количество элементов которого конечно, то есть, существует неотрицательное целое число k, равное количеству элементов этого множества. В противном случае множество называется *бесконечным*.

Пример. Множество чисел $\left\{-8{,}3;\ -4;0;0{,}7;1;\ \sin\frac{\pi}{6};\ 3{,}(2);\ \frac{17}{3};6\right\}$ является счетным, так как количество элементов данного множества конечно и равно девяти.

Пример. Множество решений уравнения $\sin x = 0$ бесконечно, поскольку имеет бесконечное множество решений.

Счетное множество – это бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.

Пример. Множество целых чисел является счетным, поскольку оно является бесконечным и его элементы можно пронумеровать:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	n	…
Число	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	…	$(-1)^n\cdot[n/2]$	…

В таблице показано, что любому натуральному числу n можно сопоставить целое число вычисляемое по формуле $(-1)^n\cdot[n/2]$, где $[n/2]$ – целая часть от деления натурального числа n на два.

Пример. Множество иррациональных чисел не является счетным, поскольку нумерацию всех его элементов осуществить нельзя.

Свойства счетных множеств

1. Любое подмножество счетного множества не более чем счетно (т.е. конечно или счетно).

2. Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно.

3. Прямое произведение конечного числа счетных множеств счетно.

4. Множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

5. Множество всех подмножеств счетного множества континуально (*от лат. continuum – непрерывное*) и, в частности, не является счетным.

Несчетное множество – бесконечное множество, которое не является счетным.

Мощность множества – характеристика множеств, обобщающее понятие количества (числа) элементов конечного множества.

Точная верхняя граница (верхняя грань) и *точная нижняя граница (нижняя грань)* – обобщение понятий максимума и минимума множества соответственно.

Точной (наименьшей) верхней гранью (границей), или *супремумом (лат. supremum – самый высокий*) подмножества упорядоченного множества, называется наименьший элемент, который равен или больше всех элементов множества. Другими словами, *супремум* – это наименьшая из всех верхних граней. Обозначается *sup X.*

Точной (наибольшей) нижней гранью (границей), или *инфимумом* (лат. *infimum* – самый низкий) подмножества упорядоченного множества, называется наибольший элемент, который равен или меньше всех элементов множества. Другими словами, *инфимум* – это наибольшая из всех нижних граней. Обозначается *inf X.*

Пример. Найдем верхнюю и нижнюю границы множеств $X = [1;3)$ и $Y = (1;2) \cup (3;5)$.

$\inf X = 1$, $\sup X = 3$, $\inf Y = 1$, $\sup Y = 5$.

1.4. Множество действительных чисел

Множество действительных чисел R можно рассматривать как совокупность всех рациональных и иррациональных чисел.

1.4.1. Основные свойства вещественных чисел

I. Сложение и умножение вещественных чисел

Для любой пары a и b вещественных чисел определены и притом единственным образом два вещественных числа $a+b$ и ab, называемые соответственно их *суммой* и *произведением,* причем имеют место следующие свойства:

Каковы бы ни были числа a, b и c справедливы следующие соотношения:

1°. $a+b=b+a$ (переместительное свойство).

2°. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (сочетательное свойство).

3°. $a\cdot b=b\cdot a$ (переместительное свойство).

4°. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (сочетательное свойство).

5°. $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (распределительное свойство).

6°. *Существует единственное число 0 такое, что* $a+0=a$ *для любого числа* a.

7°. Для любого числа a существует такое число $(-a)$, *что* $a+(-a)=0$.

8°. *Существует единственное число* $1\neq 0$ *такое, что для любого числа a имеет место равенство* $a\cdot 1=a$.

9°. *Для любого числа* $a\neq 0$ *существует такое число* a^{-1} *такое, что* $a\cdot a^{-1}=1$. Число a^{-1} обозначают символом $\frac{1}{a}$.

II. Сравнение вещественных чисел

Для любых двух вещественных чисел a и b справедливо одно из отношений: $a=b$ (a равно b), $a>b$ (a больше b) или $b>a$.

10°. Если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$ (транзитивность).

Каковы бы ни были числа a, b и c справедливы следующие соотношения:

11°. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (транзитивность).

12°. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

13°. Если $a > b$ и $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$.

14°. Если $a > b$ и $c < 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.

Каковы бы ни были числа a, b, c и d справедливы следующие соотношения:

15°. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c < b + d$.

16°. Если $a > b$ и $c > d$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$), то $a \cdot c < b \cdot d$.

17°. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c < b - d$.

18°. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

19°. Если $a > b > 0$ $n \in N$, то $a^n > b^n$.

Эти соотношения называются *неравенствами.* Неравенства вида $a < b$ и $a > b$ называются *строгими неравенствами*; неравенства $a \le b$ и $a \ge b$ – *нестрогими*.

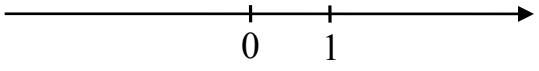
III. Непрерывность множества вещественных чисел

20°. Пусть X и Y – два множества, состоящие из вещественных чисел. Тогда, если для любых чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \le y$, то существует хотя бы одно число c такое, что для всех чисел x и y выполняются неравенства $x \le c \le y$.

1.4.2. Изображение действительных чисел

Действительные числа можно изображать точками числовой оси.

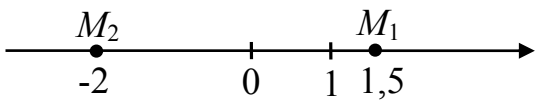
Числовой осью (*координатной прямой*) называется прямая, на которой выбраны начальная точка (начало), положительное направление (обозначено стрелкой) и отрезок, длина которого равна единице (масштабная единица). Направление, противоположное положительному направлению числовой оси, называется *отрицательным*.



Если действительное число $x > 0$, то оно изображается точкой числовой оси, находящейся от начала на расстоянии x в положительном направлении. Если действительное число $x < 0$, то оно изображается точкой числовой оси, находящейся от начала на расстоянии равном $(-x)$ в отрицательном направлении. Число 0 изображается начальной точкой.

Действительное число x называется *координатой точки* M *числовой оси*. Если x является координатой точки M, то принято писать $M(x)$.

Пример. На числовой оси отметить точки $M_1(1{,}5)$ и $M_2(-2)$.



1.4.3. Абсолютная величина действительного числа

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа x называется само число x, если $x \geq 0$, или число $-x$, если $x < 0$.

Абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$. Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ при } x \geq 0, \\ -x, \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Пример. Вычислить абсолютную величину чисел: -2, 0, 3.

По определению абсолютной величины, имеем $|-2| = 2$, $|0| = 0$, $|3| = 3$.

Свойства абсолютной величины

1°. $|x| \geq 0$.

2°. $|x| = |-x|$.

3°. $-|x| \leq x \leq |x|$.

4°. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда неравенства $|x| \leq \varepsilon$ и $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ равносильны.

5°. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

6°. $|x - y| \leq |x| + |y|$.

7°. $|x - y| \geq |x| - |y|$.

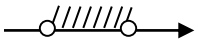
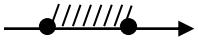
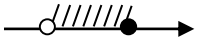
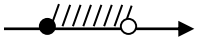
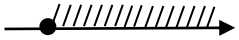
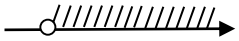
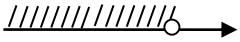
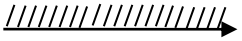
8°. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

9°. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

10°. $|x|^2 = x^2$.

1.4.4. Числовые промежутки

Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$. Определим числовые промежутки, как подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

№	Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
1.	Интервал		$(a;b)$	$a < x < b$
2.	Отрезок		$[a;b]$	$a \le x \le b$
3.	Полуинтервал		$(a;b]$	$a < x \le b$
4.	Полуинтервал		$[a;b)$	$a \le x < b$
5.	Луч		$[a;+\infty)$	$x \ge a$
6.	Луч		$(-\infty;b]$	$x \le b$
7.	Открытый луч		$(a;+\infty)$	$x > a$
8.	Открытый луч		$(-\infty;b)$	$x < b$
9.	Интервал		$(-\infty;+\infty)$	$x \in R$

1.5. Понятие комплексного числа

Комплексные числа, как квадратные корни из отрицательных чисел, впервые были получены в первой половине XVI века известным итальянским математиком Никколо Тартальей (1499 – 1557) в связи с выведением им формулы вычисления корней кубических уравнений. Идея использования таких чисел была поддержана Джероламо Кардано (1501 – 1576), в предложенном им

оригинальном методе нахождения корней многочленов вида ax^3+bx^2+cx+d (формула Кардано).

Попытки сравнить комплексные числа между собой на больше – меньше и поместить их на числовую ось не увенчались успехом. Великий Рене Декарт (1596-1650) в своих работах вообще отверг существование таких чисел и с его подачи их стали называть «мнимыми».

Однако в XVIII веке к комплексным числам снова обратились. Были введены операции над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение и деление, появилась тригонометрическая форма записи комплексных чисел и Абрахамом де Муавром (1667 - 1754) решена задача возведения в натуральную степень и извлечения корней n-ой степени из комплексного числа.

Большой вклад в теорию комплексных чисел внес Леонард Эйлер (1707 – 1783), который ввёл общепризнанное обозначение *i* и ввел операции для показательной формы комплексных чисел. Само же понятие «комплексного числа» было дано лишь в 30–х годах XIX века Карлом Фридрихом Гауссом (1777 –1855).

Уникальные свойства комплексных чисел и функций нашли широкое применение для решения многих практических задач в различных областях математики, физики и техники: в обработке сигналов, теории управления, электродинамике, теории колебаний, теории упругости и механике деформируемого твердого тела, квантовой физики многих других областях.

1.5.1. Определение комплексного числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара вещественных чисел $(x;y)$. Число x называется действительной частью комплексного числа z или $Re\ z$, число y называется мнимой частью комплексного числа z или $Im\ z$.

Если $\boldsymbol{y}$ = 0, то комплексные числа вида ($\boldsymbol{x}$; 0) отождествляются с действительными числами, т.е. (x; 0) = x.

Пример. (5; 0) = 5.

Множество всех вещественных чисел (R) является подмножеством множества комплексных чисел (C), т.е. $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Комплексное число вида $(0; 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается буквой i.

Пример. $(0; 1) = i$.

В *алгебраической форме* всякое комплексное число можно представить в виде: $z = x + yi$.

Пример. $(0; 7) = 7i$; $(-2; 5) = -2 + 5i$; $(3; -4) = 3 - 4i$.

Пример. Для чисел $z_1 = 7$, $z_2 = 6i$, $z_3 = 8 - i$, $z_4 = -17 + 2i$ определим действительную и мнимую части:

$\mathrm{Re}(z_1) = 7$; $\mathrm{Im}(z_1) = 0$; $\mathrm{Re}(z_3) = 8$; $\mathrm{Im}(z_3) = -1$;

$\mathrm{Re}(z_2) = 0$; $\mathrm{Im}(z_2) = 6$; $\mathrm{Re}(z_4) = -17$; $\mathrm{Im}(z_4) = 2$.

Два комплексных числа, отличающихся только знаком перед мнимой частью, называются *комплексно сопряженными.*

Пример. Для чисел $z_1 = 10$, $z_2 = 14i$, $z_3 = 13 - 16i$, $z_4 = -1 + i$ найдем комплексно сопряженные числа:

$$z_1 = 10 = 10 + 0i \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_1 = 10; \quad z_3 = 13 - 16i \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_3 = 13 + 16i;$$

$$z_2 = 14i = 0 + 14i \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_2 = -14i; \qquad z_4 = -1 + i \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_4 = -1 - i.$$

Два комплексных числа, отличающихся знаками действительной и мнимой частей, называются *противоположными.*

Пример. Для чисел $z_1 = 14i$, $z_2 = 8 - 5i$ найдем противоположные.

$-z_1 = -14i$; $\quad -z_2 = -8 + 5i$.

Два комплексных числа $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{z_2}$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

1.5.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот, каждую точку $M(x;y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой*.

Комплексное число $\mathbf{z = x + yi}$ можно задавать с помощью радиус-вектора (рис. 1.2).

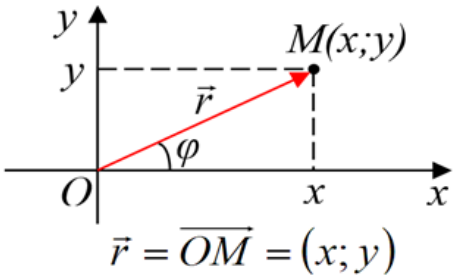


Рис. 1.2. Графическое изображение комплексного числа.

Пример. На комплексной плоскости изобразим векторами комплексные числа: $-1; -2i; 3 + 2i; -2 + i$ (рис. 1.3).

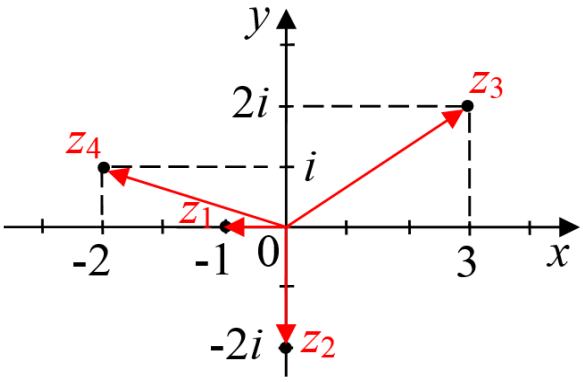


Рис. 1.3. Изображение чисел $-1; -2i; 3 + 2i; -2 + i$.

1.5.3 Модуль и аргумент комплексного числа

Длина вектора, изображающего комплексное число z называется *модулем* этого числа и обозначается |z|.

Пример. Найдем модули комплексных чисел: $-5i; 12 + 9i; -7 + 2i$.

$$|-5i| = 5; \quad |12+9i| = \sqrt{12^2+9^2} = \sqrt{225} = 15; \quad |-7+2i| = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53}.$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси *Ox* и радиус-вектором числа z называется *аргументом* этого числа и обозначается *Arg* z.

Аргумент $\varphi = Arg\ z$ определяется из формул:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}; \qquad \sin\varphi = \frac{y}{x}.$$

Пример. Найти аргументы чисел: $z_1 = -6i$; $z_2 = 3 + 4i$.

$\cos\varphi_1 = \frac{x_1}{r_1} = \frac{0}{6} = 0$, так как $x = 0$, а $y > 0$, то $ARG(\varphi_1) = -\arccos 0 = -\frac{\pi}{2}$.

$tg\varphi_2 = \frac{x_2}{y_2} = \frac{3}{4}$, так как $x > 0$ и $y > 0$, то $ARG(\varphi_2) = arctg\frac{3}{4}$.

1.6. Действия над комплексными числами

1.6.1. Сумма и разность комплексных чисел

Пусть $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ – два комплексных числа.

Суммой двух *комплексных чисел* z_1 и z_2 называется число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Пример. Найдем сумму чисел $z_1 = (-5; 4)$ и $z_2 = (2; 3)$.

$$z_1 + z_2 = (-5 + 2; 4 + 3) = (-3; 7).$$

Для комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, сложение можно совершать как над многочленами.

Пример. Найдем сумму чисел $z_1 = 14 - 9i$ и $z_2 = -20 - 2i$.

$$z_1 + z_2 = 14 - 9i - 20 - 2i = -6 - 11i.$$

Разность комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ определяется как сумма числа z_1 и числа противоположного z_2:

$$z = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2).$$

Пример. Найдем разность чисел $z_1 = -13 + 16i$ и $z_2 = -1 + 5i$.

$$z_1 - z_2 = (-13 + 16i) - (-1 + 5i) = -13 + 16i + 1 - 5i = -12 + 11i.$$

1.6.2. Произведение комплексных чисел

Пусть $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ – два комплексных числа.

Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называется число:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1).$$

Пример. Найдем произведение чисел $z_1 = (1; 6)$ и $z_2 = (-3; 7)$.

$$z_1 \cdot z_2 = (1\cdot(-3) - 6\cdot7; 1\cdot7 + (-3)\cdot6) = (-45; -11).$$

Пример. Вычислим i^2.

$$i^2 = i \cdot i = (0;1) \cdot (0;1) = (0\cdot0 - 1\cdot1; 0\cdot1 + 1\cdot0) = (-1; 0) = -1.$$

Для комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, умножение также можно совершать как произведение многочленов.

Пример. Найдем произведение чисел $z_1 = 3 - 4i$ и $z_2 = 5 + i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 4i)(5 + i) = 15 + 3i - 20i - 4i^2 = 15 - 17i - 4\cdot(-1) =$$

$$= 15 - 17i + 4 = 19 - 17i.$$

Пример. Вычислить $(3 + i)^3$.

$$(3 + i)^3 = (3 + i)^2(3 + i) = (9 + 6i + i^2)(3 + i) = (8 + 6i)(3 + i) =$$

$$= 24 + 8i + 18i + 6i^2 = 18 + 26i.$$

1.6.3. Деление комплексных чисел

Пусть $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ – два комплексных числа.

Частным комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ $(z_2 \neq 0)$ называется число:

$$z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Пример. Найти частное чисел $z_1 = (14; -8)$ и $z_2 = (2; -4)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(14; -8)}{(2; -4)} = \left(\frac{14\cdot2 + (-8)\cdot(-4)}{2^2 + (-4)^2}; \frac{2\cdot(-8) - 14\cdot(-4)}{2^2 + (-4)^2} \right) =$$

$$\left(\frac{28 + 32}{20}; \frac{-16 + 56}{20} \right) = \left(\frac{60}{20}; \frac{40}{20} \right) = (3;2).$$

Для комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, деление также можно совершать, как произведение многочленов. Для этого необходимо умножить числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное знаменателю, а затем упростить выражение.

Пример. Найти частное чисел $z_1 = -14 + 27i$ и $z_2 = 4 + 3i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-14+27i}{4+3i} = \frac{(-14+27i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{(-14)\cdot 4 + 27i\cdot 4 + 3i\cdot 14 - 3i\cdot 27i}{16-9i^2} =$$

$$= \frac{-56+150i-81i^2}{16-9\cdot(-1)} = \frac{-56+150i-81\cdot(-1)}{16+9} = \frac{25+150i}{25} =$$

$$\frac{25}{25} + \frac{150i}{25} = 1 + 6i.$$

1.6.4. Решение квадратных уравнений

При решении квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ с вещественными коэффициентами a, b и c при отрицательном дискриминанте действительных корней нет. Однако в любом случае получатся два комплексно сопряженных корня.

Пример. Решим уравнение $4x^2 + 3 = 0$.

Сначала рассчитаем дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4\cdot 4\cdot 3 = -48$. Затем найдем корни уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\ x_1 = \frac{0-\sqrt{-48}}{2\cdot 4} = \frac{-4\sqrt{-3}}{8} = \frac{-4\sqrt{3}i}{8} = -\frac{\sqrt{3}i}{2};$$

$$x_2 = \frac{0+\sqrt{-48}}{2\cdot 4} = \frac{4\sqrt{-3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}i}{8} = \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Таким образом получим два корня: $x_1 = -\frac{\sqrt{3}i}{2};\ x_2 = \frac{\sqrt{3}i}{2}$.

Пример. Решим уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Рассчитаем дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 4 - 8 = -4$. Найдем корни уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}} \qquad x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{-4}}{2\cdot 1} = \frac{2-2\sqrt{-1}}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i;$$

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{-4}}{2\cdot 1} = \frac{2+2\sqrt{-1}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i.$$

Таким образом получим два корня: $x_1 = 1-i;\ x_2 = 1+i.$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое множество? Как определяется подмножество для данного множества?

2. Приведите примеры множеств, являющихся подмножествами других множеств.

3. Какие операции над множествами вы знаете?

4. Каким образом можно иллюстрировать операции над множествами с помощью диаграмм?

5. Приведите перечень основных числовых множеств. Какие числовые множества являются подмножествами других числовых множеств?

6. Чем отличаются счетные множества от несчетных? Приведите примеры счетных и несчетных множеств.

7. Как определить точную верхнюю и точную нижнюю границы числовых множеств? Приведите примеры нахождения точной верхней и нижней границ множества.

8. Какие операции над множеством действительных чисел определены в теории множеств? Приведите примеры выполнения этих операций.

9. Перечислите основные свойства действительных чисел. Приведите примеры, иллюстрирующие эти свойства.

10. Как определяется абсолютное значение действительных чисел? Перечислите свойства абсолютного значения действительных чисел.

11. Каким образом можно изобразить действительные числа геометрически?

12. Какие виды промежутков используются для действительных чисел? Как они обозначаются? Приведите примеры.

13. Как понимают абсолютную величину действительного числа? Какие

свойства абсолютной величины вы знаете?

14. Какие числовые промежутки бывают?

15. Дайте определение комплексного числа. Как обозначается число $\sqrt{-1}$?

16. Каким образом представляются комплексные числа в алгебраической форме? Приведите примеры.

17. Как находятся противоположные и комплексно сопряженные числа?

18. Как определяются модуль и аргумент комплексного числа?

19. Расскажите об особенностях графического изображения комплексных чисел, заданных в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

20. Какие действия определены над комплексными числами в алгебраической форме?

21. Каким образом осуществляется решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом? Какие корни получаются в результате решения таких уравнений?

22. Приведите примеры нахождения произведения, частного комплексных чисел в тригонометрической форме.

23. Каким образом комплексные числа в тригонометрической форме возводятся в натуральную степень и из них извлекаются корни натуральной степени?

24. Приведите примеры нахождения произведения, частного комплексных чисел в показательной форме. Каким образом комплексные числа в показательной форме возводятся в натуральную степень и из них извлекаются корни натуральной степени?

Глава 2. Матрицы и определители

При изучении различных по природе и физическим характеристикам явлений или процессов исследователь часто имеет дело с целым набором различных данных, которые оформляются в виде числовых прямоугольных таблиц. Дальнейшая обработка этих данных, анализ полученных результатов предполагает вычислительную работу с табличными формами.

Использование методов математической статистики, математического моделирования, алгоритмов построения прогнозов также предполагают глубокую аналитическую работу по исследованию табличных массивов, выполнению различных операций и преобразований исходных числовых данных.

Для математической обработки таблиц введено понятие матрицы, представляющей числовой двумерный массив. Матрицы являются алгебраическими структурами, для них установлены преобразования, определены алгебраические операции, предложены различные оценки их качественных характеристик.

Матричное счисление является мощным математическим инструментом в руках компетентного специалиста, который для получения оптимальных решений в своей области рассматривает проблему в комплексе, используя алгебраические приемы, методы системного анализа, математической статистики, опирается на большие массивы наблюдений, качественных и количественных показателей.

2.1. Основные понятия матричного счисления

2.1.1. Определение матрицы

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа m и n называются порядками матрицы. В случае если $m = n$, матрица называется квадратной, а число $m = n$ – ее порядком.

Для записи матрицы обычно применяются круглые скобки, а для краткого обозначения матрицы часто используются заглавные латинские буквы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Числа a_{ij}, входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. В записи a_{ij} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j – номер столбца.

Элементы матрицы могут иметь любые значения из множества действительных чисел.

Пример. Ниже представлена матрица порядков 3x2.

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3{,}5 & 9 & 9 \\ 0 & \frac{2}{3} & 65 & 400 & \sqrt{8} \\ \cos 3 & 17 & 0{,}8 & \pi & \log_2 5 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы считаются равными, если они имеют одинаковые порядки и все их соответствующие элементы совпадают.

Матрица называется *нулевой* порядков m и n, если все ее элементы равны нулю. Она обозначается символом О. В качестве примера приведем нулевую матрицу порядков 2 и 3.

Пример. Нулевая матрица порядков 2x3.

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Квадратные матрицы

Матрица называется квадратной, если ее порядки совпадают. В этом случае количество строк матрицы совпадает с количеством ее столбцов.

В случае квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, идущая из левого верхнего угла этой матрицы в правый нижний

ее угол. Побочной диагональю той же матрицы называется диагональ a_{n1}, $a_{(n-1)2}$, …, a_{1n}, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Среди квадратных матриц отметим, так называемые, симметричные матрицы. Действительно, для таких матриц наблюдается симметрия относительно их главных диагоналей. Таким образом, для каждой пары элементов a_{ij} *и* $a_{ji.}$ симметричной матрицы A выполняется равенство:

$$a_{ij} = a_{ji..}$$

*Пример. С*имметричная матрица порядков 4х4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Еще одним классом квадратных матриц являются треугольные матрицы. Матрица А называется верхней треугольной, если все ее элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны нулю, и соответственно нижней треугольной, если все ее элементы, находящиеся выше главной диагонали, равны нулю.

Пример. Ниже представлены верхняя треугольная матрица B и нижняя треугольная матрица C.

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 13 & 1 \end{pmatrix}.$$

Среди квадратных матриц выделим класс так называемых диагональных матриц, у каждой из которых элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Каждая диагональная матрица порядка n имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$

где d_1, d_2, ..., d_n – произвольные числа.

В классе всех диагональных матриц рассмотрим матрицы с совпадающими элементами d_i, то есть такие матрицы у которых элементы главной диагонали равны между собой: $d_1 = d_2 = \dots = d_n$.

Особо важную роль из них играет матрица, все диагональные элементы которой равны единицам. Такая матрица называется единичной матрицей n-го порядка и обозначается символом E или E_n.

Пример. Единичная матрица порядков 4x4.

$$\boldsymbol{E}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.3. Транспонирование матриц

Преобразование матрицы, заключающееся в замене строк этой матрицы на ее столбцы с сохранением их порядка, называется *транспонированием матрицы*.

Пусть дана исходная матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

тогда, согласно определению, транспонированная матрица A^T имеет вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Пусть даны две матрицы F и G:

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix},$$

тогда соответствующие им транспонированные матрицы имеют вид:

$$G^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & -2 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad F^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

2.2. Операции над матрицами

Перейдем к определению основных линейных операций над матрицами.

2.2.1. Сложение матриц

Суммой двух матриц *A* и *B* одних и тех же порядков *m* и *n* называется матрица *C* тех же порядков *m* и *n*, элементы которой равны*:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (i = 1,2, ..., n; j = 1, 2, ..., m). \qquad (2.3)$$

Для обозначения суммы двух матриц используется запись $C = A + B$. Операция составления суммы матриц называется их *сложением*.

Итак, по определению

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & ... & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдем сумму двух матриц.

$$A + B = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 4 & -12 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 20 & 8 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11+(-6) & 3+20 & -2+8 \\ 4+5 & -12+2 & 5+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 23 & 6 \\ 9 & -10 & 19 \end{pmatrix}$$

Из определения суммы матриц непосредственно вытекает, что операция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения вещественных чисел, а именно:

1) *коммутативностью* (переместительным свойством):

$A + B = B + A$;

2) *ассоциативностью* (сочетательным свойством):

$(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) *существованием нуля*:

$A + O = O + A$.

Эти свойства позволяют не заботиться о порядке следования слагаемых матриц при сложении двух или большего числа матриц.

2.2.2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на вещественное число k называется матрица C, элементы которой равны:

$$c_{ij} = ka_{ij} \ (i = 1,2, ..., n; j = 1, 2, ..., m). \qquad (2.4)$$

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись $C = kA$ или $C = Ak$. Операция составления произведения матрицы на число называется *умножением* матрицы на это число.

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Умножим матрицу A на число 3.

$$A \cdot 3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 12 & 0 & -6 \\ 24 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из определения ясно, что умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1) *коммутативностью*:

$$kA = Ak;$$

2) *ассоциативностью* относительно числового множителя:

$$(kp)A = k(pA);$$

3) *дистрибутивностью* (распределительным свойством) относительно суммы матриц:

$$k(A + B) = kA + kB;$$

4) *дистрибутивностью* относительно суммы чисел:

$$(k + p)A = kA + pA.$$

Замечание. Разностью двух матриц A и B, одинаковых порядков n и m, естественно назвать такую матрицу C тех же порядков n и m, которая в сумме с матрицей B дает матрицу A. Для обозначения разности двух матриц используется естественная запись: $C = A - B$.

Очень легко убедиться в том, что разность C двух матриц A и B может быть получена по правилу $C = A + (-1)\cdot B$.

2.2.3. Матричное произведение

Произведением матрицы A, имеющей порядки, соответственно равные n и m, на матрицу B, имеющую порядки, соответственно равные n и p, называется матрица C, имеющая порядки, соответственно равные m и p, и элементы c_{ij} определяемые формулой:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \ (i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., p). \qquad (2.5)$$

Выше указанная формула представляет собой правило составления элементов матрицы C, являющейся произведением матрицы A на матрицу B. Это правило можно сформулировать и словесно: элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $C = AB$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-u строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

В качестве примера применения указанного правила приведем формулу перемножения квадратных матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения произведения матрицы A на матрицу B используют запись $C = AB$. Операция составления произведения матрицы A на матрицу B называется *перемножением* этих матриц.

Из сформулированного выше определения вытекает, что матрицу A можно умножить не на всякую матрицу B: необходимо, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B.

Пример. Умножим матрицу А на матрицу В.

Если $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, то

$$AB=\begin{pmatrix} 2\cdot 4+0\cdot 0+1\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 1 & 2\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 0\cdot 4+(-1)\cdot 0+2\cdot 0 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 3+2\cdot 1 & 0\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В частности, оба произведения AB и BA можно определить лишь в том случае, когда число столбцов A совпадает с числом строк B, а число строк A совпадает с числом столбцов B. При этом обе матрицы AB и BA будут квадратными, но порядки их будут, вообще говоря, различными.

Пример. Найдем матричные произведения AB и *BA*.

Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то

$$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot 4+0\cdot(-2)+1\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 2 \\ 2\cdot 4+(-1)\cdot(-2)+3\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 19 & 8 \end{pmatrix},$$

однако

$$BA=\begin{pmatrix} 4\cdot 1+1\cdot 2 & 4\cdot 0+1\cdot(-1) & 4\cdot 1+1\cdot 3 \\ -2\cdot 1+0\cdot 2 & -2\cdot 0+0\cdot(-1) & -2\cdot 1+0\cdot 3 \\ 3\cdot 1+2\cdot 2 & 3\cdot 0+2\cdot(-1) & 3\cdot 1+2\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы оба произведения AB и BA не только были определены, но и имели одинаковый порядок, необходимо и достаточно, чтобы обе матрицы A и B были квадратными матрицами одного и того же порядка.

Из определения вытекают следующие свойства произведения матрицы A на матрицу B:

1) *ассоциативность* относительно произведения матриц:

$$(AB)C = A(BC);$$

2) *дистрибутивность* относительно суммы матриц:

$$(A + B)C = AC + BC \ \text{ или } \ A(B + C) = AB + AC;$$

3) *существование единицы*:

$$AE = EA = A.$$

Вопрос о коммутативности произведения матрицы A на матрицу B имеет смысл лишь для квадратных матриц A и B одинакового порядка (так как только для таких матриц A и B оба произведения AB и BA определены и являются матрицами одинаковых порядков). Две матрицы, для произведения которых справедливо перестановочное свойство, принято называть *коммутирующими*. Элементарные примеры показывают, что произведение двух квадратных матриц одинакового порядка не обладает, вообще говоря, коммутативностью.

Пример. Рассмотрим две матрицы.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

однако,

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 6\cdot 3 & 5\cdot 2 + 6\cdot 4 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 3 & 7\cdot 2 + 8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

2.3. Определители

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A любого порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

С каждой такой матрицей свяжем вполне определенную численную характеристику, называемую *определителем*, соответствующим этой матрице. В отличие от матрицы для обозначения определителя употребляют не круглые, а прямые скобки, а перед буквенным выражением указывается слово *det*.Определитель матрицы *A* обозначается:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем говорить об элементах, строках или столбцах определителя, подразумевая под этими терминами соответственно элементы, строки или столбцы отвечающей этому определителю матрицы.

2.3.1. Вычисление определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков

Если порядок *n* матрицы равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11}.

Определителем первого порядка, соответствующим такой матрице, является величина ее единственного элемента:

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}. \qquad (2.6)$$

Пример. Если $A = (-7)$, то

$$\det A = |-7| = -7.$$

Если порядок *n* матрицы равен двум, т. е. если эта матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то определителем второго порядка, соответствующим такой матрице, назовем число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Таким образом, определитель второго порядка, соответствующий вышеуказанной матрице, равен разности произведения

элементов, стоящих на главной диагонали этой матрицы, и произведения элементов, стоящих на побочной ее диагонали:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (2.7)$$

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Если порядок *n* матрицы равен трем, эта матрица будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

и ее определитель можно вычислить следующим образом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{11}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{31}. \qquad (2.8)$$

Следует запомнить правило, по которому оно получается. Три первых слагаемых представляют собой произведения элементов, находящихся на главной диагонали матрицы, и элементов, находящихся на двух диагоналях параллельных главной, соответственно. Для построения этих диагоналей перенесем элемент a_{13}, а также элементы a_{12}, a_{23} вниз.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{11}a_{12}a_{23} - \ldots$$

$$a_{12} \quad a_{13}$$

$$a_{23}$$

Четвертое, пятое и шестое слагаемые представляют собой произведения элементов, находящихся на побочной диагонали матрицы, и элементов, находящихся на двух диагоналях параллельных побочной, взятые с

противоположным знаком. Для построения этих диагоналей перенесем вниз элементы a_{13} и a_{23}.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{11}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{31}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & & a_{23} \end{matrix}$$

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, то

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (-2)\cdot 0\cdot 0 + 4\cdot 2\cdot(-5) + (-1)\cdot(-4)\cdot 1 - \\ -(-5)\cdot 0\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot(-2) - \\ -(-1)\cdot(-4)\cdot 1 = 0 - 40 + 4 - 0 + 4 - 4 = -36. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -2 & -4 & -5 \\ 3 & & 1 \end{matrix}$$

Вычисление определителей 4-го и последующих порядков сводится к вычислению определителей 2-го и 3-го порядков.

2.3.2. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

Если в определителе *n*-го порядка вычеркнуть какую-нибудь строку и какой-нибудь столбец, то оставшиеся элементы образуют определитель *(n-1)*-го порядка, называемый минором элемента, стоящего на пересечении вычеркнутых рядов.

Минор элемента a_{ij} обозначается M_{ij}.

Пример. Минором для элемента a_{23} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ является

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется минор этого элемента, взятый со знаком (-1). Обозначается A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \qquad (2.9)$$

Пример. Алгебраическим дополнением элемента a_{23} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

является

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot (-6) = 6 .$$

2.3.3. Вычисление определителей n-ого порядка

Естественно возникает вопрос, нельзя ли использовать для получения величины определителя матрицы их элементы и отвечающие им миноры. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1.1. *Лапласа* (1749-1827). Определитель любой матрицы можно вычислить как сумму произведений элементов любой строки или любого столбца на их алгебраические дополнения.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} . \qquad (2.10)$$

Пример. Найдем определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 9 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

Для начала выберем строку или столбец, по которым можно разложить определитель. Естественно, нас интересуют строка или столбец, содержащие наибольшее количество нулевых элементов. Представим определитель матрицы в виде суммы произведений элементов второй строки на алгебраические дополнения этих элементов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 9 & 8 & 0 \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24}.$$

Теперь достаточно вычислить только A_{21} и A_{24}, так как произведения $0 \cdot A_{22}$ и $0 \cdot A_{232}$ равны нулю.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot 26 = -26.$$

$$A_{24} = (-1)^{3+4} \cdot M_{24} = 1 \cdot 81 = 81.$$

Подставив найденные значения в вычисления получим окончательное решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 9 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-26) + 1 \cdot 81 = -78 + 81 = 3.$$

2.3.4. Свойства определителей

Установим ряд свойств, которыми обладает произвольный определитель *n*-го порядка.

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.

Пример. Определить матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ равен нулю, поскольку все элементы третьего столбца равны нулю.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на произвольное число λ, то ее определитель умножится на это число λ.

Пример. Если определитель матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ равен –7, то определитель матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$, полученной умножение второго столбца на 4 будет равен –28.

3. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется.

Пример. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ равен 25, после транспонирования определитель матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ также будет равен 25.

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

Пример. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ равен -1. Если поменять местами второй и третей столбцы, то определитель матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ будет равен единице.

5. Если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.

Пример. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 7 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ равен нулю, поскольку первый и второй столбцы равны.

6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

Пример. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -12 \\ -3 & -6 & 9 \\ 7 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ также равен нулю, поскольку первая и вторая строки матрицы пропорциональны.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю.

Пример. Возьмем матрицу третьего порядка $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Рассчитаем произведение элементов первого столбца на алгебраические дополнения третьего столбца:

$$a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} .$$

Найдем алгебраические дополнения A_{31}, A_{32}, A_{33}:

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 41; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 .$$

Тогда

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

Пример. Возьмем ту же матрицу третьего порядка $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Определитель этой матрицы равен –4. Теперь прибавим к элементам первой строки элементы второй, предварительно умноженные на 10:

$$\begin{pmatrix} 9+0\cdot 10 & 4+3\cdot 10 & 1+2\cdot 10 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 34 & 21 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определитель полученной матрицы также будет равен –4.

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

Пример. Возьмем две матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 8 & -11 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Определители этих матриц соответственно будут равны:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 8 & -11 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6; \qquad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Найдем произведение двух матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 8 & -11 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 9 & 12 \\ -66 & -14 & -17 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Согласно девятому свойству $\begin{vmatrix} 39 & 9 & 12 \\ -66 & -14 & -17 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 = 42$.

2.4. Ранг матрицы

2.4.1. Понятие ранга матрицы и базисных миноров

Пусть дана матрица A, состоящая из m строк и n столбцов. Произвольным образом выделим k строк и k столбцов. Элементы, находящиеся на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка.

Определитель полученной матрицы называется *минором k-го порядка* матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{32} & a_{3n} \\ a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

В матрице A порядков m, n вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k \le \min(m,n)$. Определители таких подматриц называются *минорами k-го порядка матрицы A*.

Миноров k-го порядка можно создать несколько, если только исходная матрица сама не является квадратной k-го порядка. При этом максимальный порядок миноров не будет превышать меньший порядок самой матрицы.

Из всех возможных миноров матрицы A выделим миноры отличные от нуля, тогда из всех ненулевых миноров можно найти, по крайней мере, один минор наибольшего порядка.

Наивысший порядок миноров матрицы A, отличных от нуля, называется рангом матрицы A, а отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы A, называется базисным минором.

Столбцы и строки матрицы, участвующие в образовании базисного минора, обычно называются базисными столбцами и базисными строками. У каждой матрицы может быть один или несколько базисных миноров.

Следствия из определения

1. Ранг матрицы A_{mn} не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A) \le min(m;n)$.

2. $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю.

3. Для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица A - невырожденная.

Пример. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Для данной матрицы $r(A) \le min(3;4) \Rightarrow r(A) \le 3$.

Проверим, равен ли ранг 3, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \leq 2$. Так существует ненулевой минор второго порядка, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7.$$

Таким образом, ранг матрицы равен двум.

2.4.2. Метод окаймляющих миноров

Нахождение ранга матрицы можно произвести методом окаймляющих миноров. Метод использует достаточно простой алгоритм.

1. Будем считать, что ранг матрицы не меньше единицы, если матрица содержит хотя бы один ненулевой элемент.
2. При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков.
3. Если найден минор k-го порядка, определитель которого отличен от нуля, то требуется вычислить миноры (k+1)-го порядка, окаймляющие этот минор.
4. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Пример. Найдем ранг матрицы A порядков 6 и 7.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 10 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 9 & 5 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & -4 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 11 & 17 & 14 & 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы больше нуля, поскольку матрица содержит ненулевые элементы. Переходим к минорам больших порядков. Найдем хотя бы один минор второго порядка. Если двигаться от левого верхнего угла, то можно взять минор, полученный выделением второй, третьей строк и второго, третьего столбцов:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$

Рассмотрим окаймляющие миноры порядка 2 + 1 = 3. При добавлении, например, четвертой строки и четвертого столбца получим минор третьего порядка:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} = 25 \neq 0.$$

Рассмотрим окаймляющие миноры порядка 3 + 1 = 4. При добавлении, например, пятой строки и пятого столбца получим минор четвертого порядка:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \\ 3 & 9 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} = -25 \neq 0.$$

Все миноры, окаймляющие минор M_4, равны нулю. Ранг матрицы A, таким образом, равен четырем.

2.4.3. Вычисление ранга матрицы методом Гаусса

Метод Гаусса сводится к приведению матрицы к верхнему треугольному виду с помощью элементарных преобразований. Эти преобразования можно определить так:

1. Транспонирование.
2. Перемена мест двух строк (столбцов).
3. Умножение всех элементов строки (столбца) на некоторое число $a \neq 0$.
4. Суммирование всех элементов одной строки (столбца) с соответствующими элементами иной строки (столбца), умноженными на некое действительное число.

Если после преобразований исходная матрица стала треугольной (трапециевидной), то ранг матрицы будет равен количеству ненулевых строк.

Пример. Найдем ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ методом Гаусса.

Для того, чтобы левый верхний элемент матрицы не был равен нулю, поменяем местами 1-ю и 2-ю строки.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Добьёмся того, чтобы в первом столбце все элементы, кроме верхнего, стали равными нулю. Для этого Из 3-й строки, умноженной на 2 вычтем 1-ю строку, умноженную на 3, а из 4-й строки вычитаем 1-ю строку, умноженную на 2. Получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Первые две строки матрицы оставим без изменения, а к третьей и четвертой строкам, умноженным на 2, прибавим вторую строку:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Для дальнейших преобразований оставим без изменения первые три строки, а из четвертой строки вычтем третью:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из полученной матрицы вычеркнем четвертую строку, оказавшуюся нулевой:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда ранг матрицы A будет равен количеству оставшихся после преобразования строк: $rang(A)=3$.

2.5. Обратная матрица

2.5.1. Определение обратной матрицы

Обратной матрицей для данной квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1}, произведение матрицы A на которую и справа и слева является единичной матрицей:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E .$$

Пример. Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ являются взаимообратными, поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.2. (необходимое и достаточное условие существование обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная.

2.5.2. Нахождение обратной матрицы

Найти обратную матрицу можно по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (2.11)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Пример. Найти матрицу, обратную к данной $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Выясним, является ли матрица невырожденной. Для этого вычислим определитель этой матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Определитель не равен нулю, поэтому для матрицы *A* существует обратная.

Найдем все алгебраические дополнения матрицы А.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{33} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

2.5.3. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

Еще одним методом нахождения обратной матрицы является метод Гаусса. Алгоритм его использования достаточно прост.

К матрице ***A***, по отношению к которой ищется обратная матрицы, приписывается справа единичная матрица ***E***:

$$A=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right).$$

Затем с помощью преобразований «прямым ходом» и «обратным ходом» метода Гаусса всей полученной системы матриц ($A|E$), находящаяся слева матрица A приводится к виду единичной матрицы, а в то же время находящаяся справа единичная матрица одновременно превращается в матрицу A^{-1}.

Для выполнения элементарных преобразований можно использовать следующие правила:

1. Умножение всех элементов строки (столбца) на некоторое число $a\neq 0$.

2. Суммирование всех элементов одной строки с соответствующими элементами другой строки, умноженными на некоторое число.

Процесс нахождения обратной матрицы будет выглядеть следующим образом:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \ldots & a'_{1n} & b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} & \ldots & b'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2n} & b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} & \ldots & b'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \ldots & a'_{3n} & b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} & \ldots & b'_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_{n1} & b'_{n2} & b'_{n3} & \ldots & b'_{nn} \end{array}\right) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{11}'' & a_{12}'' & a_{13}'' & \ldots & a_{1n}'' \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{21}'' & a_{22}'' & a_{23}'' & \ldots & a_{2n}'' \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{31}'' & a_{32}'' & a_{33}'' & \ldots & a_{3n}'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n1}'' & a_{n2}'' & a_{n3}'' & \ldots & a_{nn}'' \end{array}\right).$$

Пример. Найдем обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & -11 \end{pmatrix}$.

Припишем к матрице A единичную матрицу E такого же размера и произведем эквивалентные преобразования полученной системы «прямым ходом» метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3c_2 + c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 5c_3 - c_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -3 & 5 \end{array}\right).$$

Продолжим преобразования «обратным ходом» метода Гаусса:

$$\begin{matrix} c_1 - 12c_3 \\ c_2 + 6c_3 \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 73 & 36 & -60 \\ 0 & 5 & 0 & -35 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -3 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 5c_1 - 2c_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 435 & 210 & -360 \\ 0 & 5 & 0 & -35 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -3 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} c_1 / 15 \\ c_2 / 5 \\ -c_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 29 & 14 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Таким образом, обратная матрица для матрицы A равна

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & 14 & -24 \\ -7 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение матрицы. Какие виды матриц вы знаете?
2. В чем заключается операция транспонирования матриц?
3. Какие операции над матрицами вы знаете?
4. Приведите примеры сложения двух матриц. Какие матрицы можно складывать?
5. Перечислите свойства матричного сложения.
6. Приведите примеры умножения двух матриц. Какие свойства матричного произведения вы знаете?
7. В чем заключаются алгоритмы нахождения определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков?
8. Каким образом определяются миноры и алгебраические дополнения элементов матриц?
9. С помощью какой теоремы можно вычислить определители матриц четвертого порядка? Каким образом можно найти определитель пятого порядка?
10. Какие свойства определителей вы знаете? Приведите примеры.
11. Как вы считаете, чему равен определитель диагональной матрицы?
12. Каким образом можно найти определители треугольных матриц?
13. Дайте определение обратной матрице? Какие методы нахождения обратной матрицы вы знаете? Приведите примеры.
14. Опишите алгоритм нахождение обратной матрицы методом Гаусса.
15. Приведите пример нахождения обратной матрицы методом Гаусса. В чем заключается основной принцип данного метода?
16. Что такое минор k-того порядка? Сколько миноров 4-го порядка содержится в матрице порядков 5x6?
17. Дайте определение ранга матрицы. В чем заключается метод

окаймляющих миноров?

18. Приведите пример нахождения ранга матрицы методом Гаусса. Сколько строк осталось в результате преобразований?

19. Каким образом можно определить ранг верхней треугольной или нижней треугольной матриц?

20. Что можно сказать о ранге диагональной матрицы? Каким образом можно найти определитель диагональной матрицы?

Глава 3. Системы линейных алгебраических уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) являются универсальным математическим аппаратом, применяемым в различных сферах профессиональной деятельности. Они используются для исследования больших массивов наблюдений, обработки качественных и количественных показателей изучаемых явлений.

Системы линейных уравнений, являясь частью линейной алгебры, имеют существенное значение не только с точки зрения линейных преобразований. Они востребованы во всех современных разделах высшей математики, в практических приложениях большинства естественнонаучных, технических, экономических и социальных наук.

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из важнейших задач классической математики. Вопросы решения СЛАУ были сформированы еще в конце XVII века выдающимся немецким ученым Готфридом Лейбницем (1646 – 1716), а один из наиболее популярных методов решения определенных систем, метод Крамера, был опубликован в 1750 году швейцарским математиком Габриэлем Крамером (1704 – 1752) в трактате «Введение в анализ алгебраических кривых».

Метод Крамера получил дальнейшее развитие в работах французских ученых Этьена Безу (1730 – 1783), Александра Вандермонда (1735 – 1796), Огюстена Коши (1789 – 1857), которые внесли огромный вклад в становление линейной алгебры. В это время также был разработан метод обратной матрицы и получил научное обоснование классический метод последовательного исключения переменных, выполняемый с помощью элементарных преобразований, позже названый в честь выдающегося математика Карла Гаусса (1777 – 1855).

В настоящее время задача решения систем линейных алгебраических уравнений не потеряла актуальность и нередко применяется в классической или численной реализации в научных, инженерных, статистических и эконометрических расчетах.

3.1. Линейное уравнение

Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ называется выражение вида:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b, \quad (3.1)$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – коэффициенты при неизвестных, b – свободный член.

Представленную форму записи уравнений принято называть общей.

Набор чисел $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ является решением уравнения, если при подстановке этих чисел в уравнение выполняется равенство:

$$a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \ldots + a_nk_n = b.$$

Таких решений может быть либо бесчисленное множество, либо ни одного. Например, решением уравнения

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 5$$

являются наборы чисел {2; 0; 3; 1}, {-1; 4; -2; 0}, {0; 0; 0; 1}, …

Иногда линейные уравнения записывают в виде

$$x_i = a_1x_1 + \ldots + a_{i-1}x_{i-1} + a_{i+1}x_{i+1} + \ldots + a_nx_n + b. \quad (3.2)$$

Таким образом, записанные уравнения называются *разрешенными* относительно переменной x_i. В отличие от общей формы записи левая часть разрешенного уравнения содержит только одну переменную x_i с коэффициентом равным единице, а в правую часть переносятся все другие слагаемые. Любое линейное уравнение можно записать в виде разрешенного уравнения.

Например, для разрешения уравнения

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 7$$

относительно переменной x_3, достаточно все другие слагаемые перенести в правую часть и разделить все коэффициенты уравнения на –2. После выполнения вышеперечисленных операций получим уравнение:

$$x_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - 4x_4 + \frac{7}{2}.$$

Среди линейных уравнений можно выделить некоторые типы уравнений:

1. *Противоречивое уравнение*

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n = b, \quad (b \neq 0). \tag{3.3}$$

Противоречивые уравнения не имеют решений. Действительно, левая часть противоречивого уравнения при любых значениях переменных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, ..., \boldsymbol{x}_n$ равна нулю, а правая часть, содержащая свободный член $\boldsymbol{b} \neq 0$, отлична от нуля. Примером противоречивого уравнения может служить уравнение

$$0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3 + 0\boldsymbol{x}_4 = 3.$$

2. *Тривиальное уравнение*

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n = 0. \tag{3.4}$$

Этот тип уравнений отличается от противоречивого уравнения тем, что свободный член $\boldsymbol{b}$ равен нулю. Решением тривиальных уравнений является любой набор из n чисел. Например, присвоив произвольные значения переменным $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5$ в уравнении

$$0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 + 0\boldsymbol{x}_3 + 0\boldsymbol{x}_4 + 0\boldsymbol{x}_5 = 0,$$

всегда получим левую и правую части равными нулю.

3. *Однородное* уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0. \tag{3.5}$$

Однородные уравнения имеют бесконечное множество решений. Например, решением однородного уравнения

$$2\boldsymbol{x}_1 - 5\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + 3\boldsymbol{x}_4 = 0$$

являются наборы чисел {1; 1; 0; 1}, {1; 1; 6; 3}, {1; 1; 3; 2}, …

3.2. Системы линейных алгебраических уравнений

3.2.1. Основные понятия и определения

Система алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.6)$$

называется системой из *m* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{mn}$ называются коэффициентами при неизвестных x_1, x_2, x_3, x_n, а числа $b_1, b_2, b_3, ..., b_m$ – свободными членами.

В краткой записи с помощью знаков суммирования систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j \quad (i = 1, 2, ..., m).$$

Набор чисел $\{k_1, k_2, k_3, k_n\}$ называется решением системы уравнений, если они удовлетворяет этой системе, то есть при подстановке этих чисел в систему каждое из уравнений обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Совместные системы линейных уравнений могут иметь либо одно, либо бесконечное множество решений. В первом случае системы называются *определенными*, во втором – *неопределенными*. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Пример. Система уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 6 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 = -8 \\ -\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 = 7 \end{cases}$$

имеет единственное решение {1; 2; -1}. Следовательно, данная система является определенной.

Пример. Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

является неопределенной, так как имеет бесконечное множество решений ({1; 0; 0}, {-4; 6; 7}, …).

Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*. Примером несовместной системы может служить система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Очевидно, что данная система не может иметь ни одного решения.

Системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одно и тот же множество решений. Например, системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 36 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$$

являются эквивалентными, так как каждая из этих систем имеет единственное решение {3; -1; -5).

3.2.2. Элементарные преобразования

Любую из систем линейных уравнений можно получить из другой эквивалентной системы с помощью *элементарных преобразований*.

К элементарным преобразованиям относятся:

1) Перестановка уравнений в системе;

2) Добавление или вычеркивание тривиального уравнения;

3) Умножение уравнения на отличное от нуля число;

4) Прибавление к обеим частям уравнения соответственных частей другого уравнения системы.

Все остальные эквивалентные преобразования можно представить, как комбинации четырех вышеперечисленных операций над системами линейных уравнений.

Пример. Легко увидеть, что первая система получается из второй, если умножить первую строку второй системы на –3:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3c_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 36 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases}.$$

Первую систему можно получить также из третьей. К третьей строке третьей системы прибавим ее четвертую строку, а к четвертой строке прибавим третью.

$$\begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ c_3 + c_4 \\ c_4 + c_3 \end{matrix} \begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 + 9 \\ x_2 - 2x_3 + x_1 = 9 + 3 \end{cases}.$$

Из четвертой строки вычтем третью и полученное тривиальное уравнение вычеркнем.

$$\begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ c_4 - c_3 \end{matrix} \begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}.$$

Третью строку умножим на 3 и поставим ее на первое место в системе, сдвинув все остальные уравнения вниз:

$$\begin{cases} -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 120x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3c_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 36 \\ -7x_1 - x_2 + 6x_3 = -50 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases}.$$

3.2.3. Матричная форма записи системы линейных уравнений

Выпишем коэффициенты при неизвестных в прямоугольную матрицу ***A*** порядков m×n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.7)$$

Полученная матрица называется матрицей системы линейных уравнений или общей матрицей системы.

Введем еще две матрицы, каждая из которых состоит из одного столбца:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{.m} \end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

Матрица B содержит коэффициенты $b_1, b_2, b_3, ..., b_m$ и называется *матрицей свободных членов.*

Матрица X включает неизвестные x_1, x_2, x_3, x_n и называется *матрицей неизвестных.*

Тогда систему линейных уравнений можно записать в виде

$$AX = B. \qquad (3.9)$$

Пример. Для системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

выпишем общую матрицу A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}6\\ -8\\ 7\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, система в матричной форме примет вид:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -8\\ 7\end{pmatrix}.$$

Еще один способ записи систем линейных уравнений состоит в дополнении общей матрицы системы столбцом свободных членов.

$$A_B=\left(\begin{array}{ccccc|c}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m\end{array}\right). \qquad (3.10)$$

Такая матрица называется *расширенной*.

Пример. Для системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=6\\ 2x_1-3x_2+4x_3=-8\\ -x_1+3x_2-2x_3=7\end{cases}$$

расширенная матрица выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{A_B}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 6\\ 2 & -3 & 4 & -8\\ -1 & 3 & -2 & 7\end{array}\right).$$

3.3. Теорема Кронекера-Капелли

Расширенная матрица имеет определяющее значение для установления совместности системы линейных алгебраических уравнений. Основным методом решения данного вопроса является использование следующей теоремы.

Теорема 1.3. (*Кронекера-Капелли*). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг общей матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Пример. Определим, является ли совместной система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}.$$

Для разрешения вопроса найдем ранги общей и расширенной матриц.

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3; \qquad rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right) = 3.$$

Ранг общей матрицы и ранг расширенной матрицы в нашем случае совпадают и равны трем, следовательно, представленная система линейных уравнений является совместной.

Пример. Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

является несовместной, поскольку ранг общей матрицы равен двум, а ранг расширенной матрицы равен трем:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 2; \; rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ -1 & 5 & -5 & 3 \end{array}\right) = 3.$$

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие утверждения.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, то есть $r = n$, то система определенная и имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, то есть $r < n$, то система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пример. Определим количество решений системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}.$$

Найдем ранги общей и расширенной матриц данной системы

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3; \quad rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right) = 3.$$

Система является совместной, так как ранг матрицы и ранг расширенной матрицы совпадают.

Так как ранг матрицы равен числу переменных, то система определенная и имеет единственное решение.

Пример. Определим количество решений системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Найдем ранги общей и расширенной матриц данной системы

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2; \quad rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) = 2.$$

Система является совместной, так как ранг матрицы и ранг расширенной матрицы совпадают.

Так как ранг матрицы меньше числа переменных, то система является неопределенной и имеет бесконечное множество решений.

3.4. Методы решения определенных систем

3.4.1. Метод обратной матрицы

Рассмотрим систему из *n* линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.11)$$

Такие системы принято называть квадратными. Соответствующая системе общая матрица также является квадратной.

Данную систему можно записать в матричном виде:

$$AX = B. \quad (3.12)$$

Предположим, что общая матрица системы является невырожденной, то есть определитель основной матрицы отличен от нуля. Для таких матриц существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения слева на A^{-1}.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Учитывая, что $A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица, получим формулу

$$X = A^{-1}B. \quad (3.13)$$

В случае вырожденности общей матрицы A, система линейных алгебраических уравнений будет либо несовместной, либо совместной, но неопределенной.

Пример. Решим систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 5\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 = -13 \\ 8\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 = -38 . \\ -3\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 7\boldsymbol{x}_3 = -45 \end{cases}$$

Сначала выпишем общую матрицу A, матрицу свободных членов B, матрицу неизвестных X:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 8 & 3 & 2\\ -3 & 1 & 7\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-13\\ -38\\ -45\end{pmatrix};\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}, используя формулу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}. \qquad (3.14)$$

Для этого вычислим определитель и алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 5 & -3\\ 8 & 3 & 2\\ -3 & 1 & 7\end{vmatrix}=-342;\qquad A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 7\end{vmatrix}=19;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8 & 2\\ -3 & 7\end{vmatrix}=-62;\qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=17;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & -3\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-38;\qquad A_{12}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 7\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 5\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-16;\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=19;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 8 & 2\end{vmatrix}=-26;\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 8 & 3\end{vmatrix}=-37.$$

Подставив полученные значения в формулы 1.12 и 1.13, получим

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-342}\begin{pmatrix}19 & -38 & 19\\ -62 & -2 & -26\\ 17 & -16 & -37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-13\\ -38\\ -45\end{pmatrix}=\frac{1}{-342}\begin{pmatrix}342\\ 2052\\ 2052\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -6\\ -6\end{pmatrix}.$$

Таким образом, решением системы уравнений является набор чисел {-1; -6; -6}.

3.4.2. Метод Крамера

Рассмотрим квадратную систему из *n* линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

которой соответствуют квадратная общая матрица A и матрица-столбец свободных членов B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Заменив первый столбец матрицы A на столбец B, получим дополнительную матрицу X_1

$$X_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заменив второй столбец матрицы A на столбец B, получим дополнительную матрицу X_2

$$X_2 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим все другие дополнительные матрицы $X_3, \ldots, X_n$.

Тогда для решения системы линейных алгебраических уравнений справедливы формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\det X_1}{\det A}; \quad x_2 = \frac{\det X_2}{\det A}; \quad \ldots \quad x_n = \frac{\det X_n}{\det A}. \tag{3.15}$$

Пример. Решим систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -106 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_4 = 20 \\ 5x_1 - 4x_3 - x_4 = -16 \\ -4x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -10 \end{cases}.$$

Данной системе соответствуют квадратная общая матрица A и матрица-столбец свободных членов B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -106 \\ 20 \\ -16 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Заменим соответствующие столбцы матрицы A на столбец свободных членов B и выпишем дополнительные матрицы:

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} -106 & -5 & 6 & 0 \\ 20 & 4 & 0 & 7 \\ -16 & 0 & -4 & -1 \\ -10 & -4 & -6 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -106 & 6 & 0 \\ 5 & 20 & 0 & 7 \\ 5 & -16 & -4 & -1 \\ 0 & -10 & -6 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -106 & 0 \\ 5 & 4 & 20 & 7 \\ 5 & 0 & -16 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{X}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -106 \\ 5 & 4 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & -4 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Найдем определители основной и дополнительных матриц

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -5 \end{vmatrix} = -1228;$$

$$\det \boldsymbol{X}_1 = \begin{vmatrix} -106 & -5 & 6 & 0 \\ 20 & 4 & 0 & 7 \\ -16 & 0 & -4 & -1 \\ -10 & -4 & -6 & -5 \end{vmatrix} = 9824; \quad \det \boldsymbol{X}_2 = \begin{vmatrix} 3 & -106 & 6 & 0 \\ 5 & 20 & 0 & 7 \\ 5 & -16 & -4 & -1 \\ 0 & -10 & -6 & -5 \end{vmatrix} = -9824;$$

$$\det \boldsymbol{X}_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -106 & 0 \\ 5 & 4 & 20 & 7 \\ 5 & 0 & -16 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -5 \end{vmatrix} = 8596; \quad \det \boldsymbol{X}_4 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 & -106 \\ 5 & 4 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & -4 & -6 & -10 \end{vmatrix} = -4912.$$

Теперь, согласно методу Крамера, подставляя вычисленные определители в формулы (2.5) получим решение.

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\det \boldsymbol{X}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{9824}{-1228} = -8; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\det \boldsymbol{X}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{-9824}{-1228} = 8;$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{\det \boldsymbol{X}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{8596}{-1228} = -7; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\det \boldsymbol{X}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{-4912}{-1228} = 4.$$

Таким образом, мы получили следующее решение системы {-8; 8; -7; 4}.

3.5. Метод Гаусса

Наиболее эффективным инструментом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса. Если вышеперечисленные метод обратной матрицы и метод Крамера можно использовать только для определенных систем линейных уравнений, то метод Гаусса применим для любой системы. Кроме того, в ходе решения этим методом определяется также совместность решаемой системы.

3.5.1. Описание метода Гаусса

Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида и соответствующую ей расширенную матрицу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad A_B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Первая часть метода Гаусса называется «прямым ходом». Она заключается в том, чтобы, используя элементарные преобразования систем линейных уравнений, привести расширенную матрицу системы к виду, когда под элементами с одинаковыми индексами располагаются только нулевые элементы:

$$A'_B = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1m} & a'_{1m+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2m} & a'_{2m+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3m} & a'_{3m+1} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{mm} & a'_{mm+1} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right). \qquad (3.16)$$

Если система несовместна, то полученная путем преобразований матрица будет содержать хотя бы одну строку вида

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \,\big|\, b'_j \quad (b'_j \neq 0).$$

Если таких строк нет, то система уравнений является совместной.

В преобразованной матрице соответствующей совместной системе линейных уравнений могут появиться строки вида

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \,\big|\, 0.$$

Этого означает, что соответствующие таким строкам уравнения представляют собой линейную комбинацию других уравнений системы. Эти строки в матрице необходимо удалить.

Предположим, что в преобразованной матрице осталось k строк из m. Тогда в случае определения совместности системы линейных уравнений используется вторая часть метода Гаусса, называемая «обратный ход», и все теми же элементарными преобразованиями полученная матрица преобразуется в вид:

$$A''_B = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{1,k+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & a''_{2,k+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & 0 & a''_{3,k+1} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{kk} & a''_{k,k1} & \dots & a''_{kn} & b''_k \end{array}\right). \quad (3.17)$$

Если $k < n$, то система линейных уравнений будет неопределенной, и иметь бесконечное множество решений. Переменные $x_1, \dots, x_k$, можно объявить базисными, а неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$, соответственно, – свободными. Затем свободные переменные вместе с соответствующими коэффициентами переносятся в правую часть уравнений системы. Таким образом, решение системы будет выглядеть так:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b''_1 - a''_{1,k+1}x_{k+1} - \dots - a''_{1n}x_n}{a''_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b''_2 - a''_{2,k+1}x_{k+1} - \dots - a''_{2n}x_n}{a''_{22}} \\ x_3 = \dfrac{b''_3 - a''_{3,k+1}x_{k+1} - \dots - a''_{3n}x_n}{a''_{33}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \dfrac{b''_k - a''_{k,k+1}x_{k+1} - \dots - a''_{kn}x_n}{a''_{kk}} \end{cases}. \quad (3.18)$$

В случае если $k = n$, решаемая система линейных уравнений является определенной, а матрица, полученная «обратным ходом» будет иметь вид:

$$A''_B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & 0 & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{nn} & b''_n \end{array}\right). \quad (3.19)$$

Следовательно, единственное решение системы уравнений можно записать в виде:

$$\left\{\frac{b''_1}{a''_{11}}; \frac{b''_2}{a''_{22}}; \frac{b''_3}{a''_{33}}; \dots; \frac{b''_n}{a''_{nn}}\right\}. \quad (3.20)$$

3.5.2. Решение определенных систем

С помощью метода Гаусса можно находить решение определенных систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим пример.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x}_1 - 6\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - 6\boldsymbol{x}_4 = -57 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 + 5\boldsymbol{x}_4 = 24 \\ -2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + 6\boldsymbol{x}_4 = 34 \\ -4\boldsymbol{x}_1 + 6\boldsymbol{x}_2 + 7\boldsymbol{x}_3 - 4\boldsymbol{x}_4 = 4 \end{cases}.$$

Этой системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 3 & 4 & -2 & 5 & 24 \\ -2 & -1 & 1 & 6 & 34 \\ -4 & 6 & 7 & -4 & 4 \end{array}\right).$$

Применяя элементарные преобразования, добьемся того, чтобы все элементы матрицы, находящиеся ниже элемента a_{11} были равны нулю. Для обнуления элемента a_{21} достаточно из произведения второй строки на 5 вычесть первую строку, умноженную на 3. Для того чтобы $a_{31} = 0$, к первой строке, умноженной на пять, прибавить вторую, умноженную на 2, а для того, чтобы a_{41} равнялся нулю, можно сложить первую и третью строки, увеличенные в 5 и 4 раз соответственно:

$$\begin{array}{l} \\ 5c_2 - 3c_1 \\ 5c_3 + 2c_1 \\ 5c_4 + 4c_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 5\cdot 3 - 3\cdot 5 & 5\cdot 4 - 3\cdot(-6) & 5\cdot(-2) - 3\cdot 1 & 5\cdot 5 - 3\cdot(-6) & 5\cdot 24 - 3\cdot(-57) \\ 5\cdot(-2) + 2\cdot 5 & 5\cdot(-1) + 2\cdot(-6) & 5\cdot 1 + 2\cdot 1 & 5\cdot 6 + 2\cdot(-6) & 5\cdot 34 + 2\cdot(-57) \\ 5\cdot(-4) + 4\cdot 5 & 5\cdot 6 + 4\cdot(-6) & 5\cdot 7 + 4\cdot 1 & 5\cdot(-4) + 4\cdot(-6) & 5\cdot 4 + 4\cdot(-57) \end{array}\right).$$

В результате арифметических действий получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & -17 & 7 & 18 & 56 \\ 0 & 6 & 39 & -44 & -208 \end{array}\right).$$

Теперь, добьемся того, чтобы под элементом a_{22} оставались только нулевые элементы, для этого мы выполняем соответствующие элементарные преобразования с системой. Первая и вторая строки остаются без изменений, преобразуются только третья и четвертая строки:

$$\begin{matrix} \\ \\ 38c_3+17c_2 \\ 19c_4-3c_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 38\cdot(-17)+17\cdot 38 & 38\cdot 7+17\cdot(-13) & 38\cdot 18+17\cdot 43 & 38\cdot 56+17\cdot 291 \\ 0 & 19\cdot 6-3\cdot 38 & 19\cdot 39-3\cdot(-13) & 19\cdot(-44)-3\cdot 43 & 19\cdot(-208)-3\cdot 291 \end{array}\right).$$

Вычислив, получим систему, в которой коэффициенты третьей и четвертой строк которой можно сократить на 5:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 45 & 1415 & 7075 \\ 0 & 0 & 780 & -965 & -4825 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ c_3/5 \\ c_4/5 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 156 & -193 & -965 \end{array}\right).$$

И, наконец, с помощью элементарных преобразований системы обнуляем элемент a_{43}, изменяя при этом всю четвертую строку:

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ 3c_4-52c_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 3\cdot 156-52\cdot 9 & 3\cdot(-193)-52\cdot 283 & 3\cdot(-965)-52\cdot 1415 \end{array}\right).$$

Произведем соответствующие расчеты и сократим на 15295 элементы четвертой строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 0 & 15295 & 76475 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ c_4/15295 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6 & -57 \\ 0 & 38 & -13 & 43 & 291 \\ 0 & 0 & 9 & 283 & 1415 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная общая матрица решаемой системы приведена к верхнему треугольному виду. Полученная путем преобразований матрица не содержит ни одной строки вида

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,\big|\, b'_j \quad (b'_j \neq 0).$$

На основании этого заключим, что система уравнений является совместной.

Продолжим модификацию матрицы «обратным ходом». Для этого выполним преобразования первой, второй и третьей строк таким образом, чтобы все элементы, находящиеся выше элемента a_{44}, были равны нулю:

$$\begin{matrix} c_1 + 6c_4 \\ c_2 - 43c_4 \\ c_3 - 283c_4 \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & -6+6\cdot 1 & -57+6\cdot 5 \\ 0 & 38 & -13 & 43-43\cdot 1 & 291-43\cdot 5 \\ 0 & 0 & 9 & 283-283\cdot 1 & 1415-283\cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Выполнив действия, сократим на 9 элементы третьей строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & -13 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \\ c_3 / 9 \\ \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & -13 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Аналогично добьемся того, чтобы элементы a_{13} и a_{23} были равны нулю:

$$\begin{matrix} c_1 - c_3 \\ c_2 + 13c_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 1-1 & 0 & -27+0 \\ 0 & 38 & -13+13\cdot 1 & 0 & 76+13\cdot 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Произведем расчеты и разделим на 38 элементы второй строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 38 & 0 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \\ c_2 / 38 \\ \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -6 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

К первой строке прибавим, умноженную на 6, вторую строку:

$$c_1 + 6c_2 \begin{pmatrix} 5 & -6+6\cdot 1 & 0 & 0 & -27+6\cdot 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

выполним действия и разделим на 5 коэффициенты первой строки:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1/5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате элементарных преобразований мы получили систему:

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 5 \end{cases},$$

которой соответствует единственное решение {-3; 2; 0; 5}.

3.5.3. Решение неопределенных систем

С помощью метода Гаусса можно решать и неопределенные системы.

Пример. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений и соответствующую ей расширенную матрицу:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \\ -3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 11 \\ x_1 + 6x_2 + 16x_3 - 4x_4 = 9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 1 & 6 & 16 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Выполним соответствующие шаги «прямого хода» метода Гаусса.

Используя обратные преобразования со второй и четвертой строками, добьемся того, чтобы все элементы первого столбца матрицы, кроме верхнего были равны нулю:

$$\begin{matrix} \\ 2c_2 - c_1 \\ \\ 2c_4 - c_1 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 2\cdot 1-2 & 2\cdot 4-0 & 2\cdot 1-(-3) & 2\cdot(-5)-1 & 2\cdot(-2)-7 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 2\cdot 1-2 & 2\cdot 6-0 & 2\cdot 16-(-3) & 2\cdot(-4)-1 & 2\cdot 9-7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 11 \\ 0 & 12 & 35 & -9 & 11 \end{array}\right).$$

Аналогично, преобразуя систему, работаем со вторым столбцом:

$$\begin{matrix} \\ \\ 8c_3 + 3c_2 \\ 2c_4 - 3c_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 8\cdot(-3)+3\cdot 8 & 8\cdot 5+3\cdot 5 & 8\cdot 6+3\cdot(-11) & 8\cdot 11+3\cdot(-11) \\ 0 & 2\cdot 12-3\cdot 8 & 2\cdot 35-3\cdot 5 & 2\cdot(-9)-3\cdot(-11) & 2\cdot 11-3\cdot(-11) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 55 & 15 & 55 \\ 0 & 0 & 55 & 15 & 55 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & -11 \end{array}\right).$$

И, наконец, обнуляем элемент, находящийся на пересечении четвертой строки и третьего столбца:

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ c_4 - c_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 11-11 & 3-3 & 11-11 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вычеркнем из матрицы получившееся тривиальное уравнение, находящееся в четвертой строке:

$$c_4\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Полученный результат выявил, что система является совместной, значит можно переходить ко второй части метода – «обратному ходу».

Преобразуем матрицу так, чтобы в третьем столбце первой и второй строк появились нулевые элементы:

$$\begin{array}{l} 11c_1 + 3c_3 \\ 11c_2 - 5c_3 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 11\cdot 2+3\cdot 0 & 11\cdot 0+3\cdot 0 & 11\cdot(-3+3)\cdot 11 & 11\cdot 1+3\cdot 3 & 11\cdot 7+3\cdot 11 \\ 0 & 11\cdot 8-5\cdot 0 & 11\cdot 5-5\cdot 11 & 11\cdot(-11)-5\cdot 3 & 11\cdot(-11)-5\cdot 11 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Разделим элементы первой и второй строк соответственно на 2 и 8:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 22 & 0 & 0 & 20 & 110 \\ 0 & 88 & 0 & -136 & -176 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} c_1/2 \\ c_2/8 \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 0 & 0 & 10 & 55 \\ 0 & 11 & 0 & -17 & -22 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

В нашем случае количество оставшихся после преобразования строк k меньше количества неизвестных n:

$$\begin{cases} 11x_1 + 10x_4 = 55 \\ 11x_2 - 17x_4 = -22. \\ 11x_3 + 3x_4 = 11 \end{cases}$$

Поэтому система линейных уравнений будет неопределенной, и иметь бесконечное множество решений. Переменные системы $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$ можно объявить базисными, а неизвестную $\boldsymbol{x_4}$ – свободной. Свободные переменные вместе с соответствующими коэффициентами переносим в правую часть уравнений системы, а затем каждое уравнение делим на коэффициенты при базисных переменных.

Таким образом, решение системы будет выглядеть как система разрешенных уравнений относительно базисных переменных:

$$\begin{cases} 11x_1 = -10x_4 + 55 \\ 11x_2 = +17x_4 - 22 \\ 11x_3 = -3x_4 + 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{10}{11}x_4 + 5 \\ x_2 = \dfrac{17}{11}x_4 - 2 \\ x_3 = -\dfrac{3}{11}x_4 + 1 \end{cases}.$$

Поскольку $\boldsymbol{x}_4$ принимает бесконечное множество решений, то решением системы можно представить в виде множества: $\left\{-\frac{10}{11}x_4; \frac{17}{11}x_4; -\frac{3}{11}x_4; x_4\right\}$.

3.6. Однородные системы линейных алгебраических уравнений

3.6.1. Основные понятия систем однородных уравнений

Рассмотрим систему, содержащую только однородные линейные алгебраические уравнения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}. \qquad (3.21)$$

Такая система называется однородной системой линейных алгебраических уравнений. Однородная система всегда совместна, поскольку ранг ее общей матрицы будет равен рангу расширенной матрицы:

$$rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = rang\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что у каждой однородной системы линейных уравнений обязательно существует нулевое решение {0; 0; 0; …;0}.

Пример. Можно с уверенностью сказать, что для системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

одним из решений будет {0; 0; 0; 0}.

Однако, у однородных уравнений могут быть и другие решения. Возникает вопрос о том, при каких условиях однородная система имеет, кроме указанного тривиального решения, еще и другие, нетривиальные решения. Такие однородные системы называются *нетривиально совместными*.

3.6.2. Условия совместности однородных систем

Существование нетривиального решения однородной системы эквивалентно линейной зависимости столбцов общей матрицы системы, а это возможно только при вырожденности этой матрицы. Из этого заключения вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. Однородная система линейных алгебраических уравнений нетривиально совместна тогда и только тогда, когда ранг ее общей матрицы меньше числа ее столбцов.

Пример. Проверим существование нетривиальных решений в вышеуказанном примере. Найдем ранг общей матрицы:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Поскольку ранг матрицы равен трем и меньше числа столбцов, то данная система имеет нетривиальные решения.

Из этой теоремы вытекают следующие свойства.

Свойство 1. Если число уравнений однородной системы линейных алгебраических уравнений меньше числа ее неизвестных, то эта система имеет нетривиальные решения.

Это свойство очень удобно для использования. Например, все ниже перечисленные однородные системы являются нетривиально совместными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ {}_1 -5x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Свойство 2. Квадратная однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда общая матрица системы вырождена.

Данное свойство применимо только для однородных систем, в которых количество уравнений равно количеству неизвестных.

Рассмотрим две квадратные однородные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Первая система является нетривиально совместной, поскольку определитель общей матрицы равен нулю. Вторая система имеет только тривиальное решение, так как е определитель ее общей матрицы равен шести.

3.6.3. Решение однородных систем линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему из *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными и соответствующую ей расширенную матрицу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Для отыскания нетривиальных решений однородных систем линейных уравнений можно воспользоваться методом Гаусса.

В качестве примера рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ей соответствует расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Используя алгоритм «прямого хода» метода Гаусса, выполним следующие преобразования системы:

$$\begin{array}{r} \\ c_2 - 2c_1 \\ \\ c_4 - c_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot(-1) & -2-2\cdot 1 & 0-2\cdot 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1-1 & -2+1 & 0-1 & 2-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ 3c_3 - c_2 \\ 3c_4 + c_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 3\cdot 1-3 & 3\cdot 1+4 & 3\cdot(-1)+2 & 0 \\ 0 & 3\cdot(-1)-3 & 3\cdot(-1)-4 & 3\cdot 1-2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ 3c_3 - c_2 \\ c_4 + c_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7+7 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку количество оставшихся уравнений в системе меньше, чем количество неизвестных, будем считать переменные x_1, x_2, x_3 базисными, а неизвестную x_4 – свободной. Перенесем коэффициенты свободной переменной с противоположным знаком в правые части равенств и выполним преобразования системы «обратным ходом» метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} 7c_1 - c_3 \\ 7c_2 + 4c_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 7\cdot 1-0 & 7\cdot(-1)-0 & 7\cdot 1-7 & 7\cdot(-1)-1 \\ 0 & 7\cdot 3+0 & 7\cdot(-4)+4\cdot 7 & 7\cdot 2+4\cdot 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -7 & 0 & -8 \\ 0 & 21 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} c_1 + c_2 \\ c_2/3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -7+7 & 0 & 7\cdot(-1)-6 \\ 0 & 21/3 & 0 & 18/3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 = -2x_4 \\ 7x_2 = 6x_4 \\ 7x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{6}{7}x_4 \\ x_3 = \dfrac{1}{7}x_4 \end{cases}.$$

Следовательно, общее решение системы можно получить в виде:

$$\left\{-\frac{2}{7}x_4; \frac{6}{7}x_4; = \frac{1}{4}x_4; x_4\right\}.$$

3.7. Фундаментальная система решений

3.7.1. Понятие фундаментальной системы

Однородная система уравнений обладает следующими свойствами:

1. Если набор чисел $\{k_1, k_2, k_3, ..., k_n\}$ – решение системы, то и $\{pk_1, pk_2, pk_3, ..., pk_n\}$ также решение системы.

2. Если наборы чисел $\{k'_1, k'_2, k'_3, ..., k'_n\}$ и $\{k''_1, k''_2, k''_3, ..., k''_n\}$ являются решениями системы, то и $\{k'_1 + k''_1, k'_2 + k''_2, k'_3 + k''_3, ..., k'_n + k''_n\}$ также является решением данной системы.

Из этих свойств следует, что любая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Следовательно, можно найти такую совокупность линейно независимых решений однородной системы, линейная комбинация которых порождает все решения системы.

Совокупность линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений*, если каждое решение системы уравнений является линейной комбинацией выбранных решений.

Теорема 2.2. Если ранг r однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных n, то всякая ее фундаментальная система решений состоит из $n - r$ решений.

Если найдено общее решение однородной системы линейных уравнений и все базисных переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ линейно выражены через свободные переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ x_3 = \alpha_{3,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{3n}x_n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n}x_n \end{cases},$$

то для построения фундаментальной совокупности решений необходимо найти частные решения однородной системы.

Для нахождения первого решения примем значения свободных переменных

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \quad x_{r+3} = 0, \quad \ldots. \quad , \quad x_n = 0.$$

Тогда первое частное решение примет вид:

$$F_1 = \left\{ \alpha_{1,r+1}, \alpha_{2,r+1}, \alpha_{3,r+1}, \ldots, \alpha_{r,r+1}, 1, 0, 0, \ldots, 0 \right\}.$$

Для второго решения свободные переменные будут равны

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 1, \quad x_{r+3} = 0, \quad \ldots. \quad , \quad x_n = 0,$$

Следовательно, второе частное решение

$$F_2 = \left\{ \alpha_{1,r+2}, \alpha_{2,r+2}, \alpha_{3,r+2}, ..., \alpha_{r,r+2}, 0, 1, 0, ..., 0 \right\}.$$

…, …, …, …, …, …

для последнего решения возьмем значения

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \quad x_{r+3} = 0, \quad \ldots . \quad , \quad x_n = 1,$$

соответственно, последнее частное решение

$$F_{n-r} = \left\{ \alpha_{1,\boldsymbol{n}}, \alpha_{2,\boldsymbol{n}}, \alpha_{3,\boldsymbol{n}}, ..., \alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}}, 1, 0, 0, ..., 0 \right\}.$$

Полученные частные решения F_1, F_2, F_3, …, F_{n-r} и образуют фундаментальную систему решений.

3.7.2. Построение фундаментальной системы решений

Пример. Рассмотрим однородную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

Для получения фундаментального решения системы линейных уравнений найдем ее общее решение. Используя алгоритм «прямого хода» метода Гаусса, выполним следующие преобразования системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2c_2 - c_1 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$5c_3 - c_2 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow c_2 / 5 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Будем считать переменные x_1, x_2 базисными, а неизвестные x_3, x_4, x_5 – свободными. Перенесем коэффициенты свободной переменной с противоположным знаком в правые части равенств и выполним преобразования системы «обратным ходом» метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \\ c_1 - c_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \\ c_1/2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 - 2x_5 \end{cases},$$

следовательно, общее решение системы можно записать следующим образом:

$$\{x_3;\, x_4 - 2x_5,\, x_3,\, x_4,\, x_5\}.$$

Поскольку ранг однородной системы равен двум, а число неизвестных – пяти, то ее фундаментальная система решений состоит из 5 – 2 = 3 решений. Взяв последовательно для свободных переменных значения $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$, получим совокупность фундаментальных решений:

$$F_1 = \{1, 0, 1, 0, 0\};$$

$$F_2 = \{0, 1, 0, 1, 0\};$$

$$F_3 = \{1, -2, 0, 0, 1\}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение линейного алгебраического уравнения. Какие виды линейных алгебраических уравнений вы знаете?
2. Что такое система линейных алгебраических уравнений?
3. Чем отличаются определенные системы от неопределенных?
4. Как называются системы линейных алгебраических уравнений, которые не имеют ни одного решения?
5. Каким образом определяются матричные формы записи систем линейных алгебраических уравнений?
6. Чем отличаются общая и расширенная формы записи систем линейных алгебраических уравнений?
7. В каком случае система линейных алгебраических уравнений будет совместной, то есть иметь хотя бы одно решение?

8. Что можно сказать о ранге общей и расширенной матриц системы линейного алгебраического уравнения, если система является неопределенной?

9. Опишите матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. В каких случаях можно использовать данный метод?

10. Приведите пример решения системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

11. Опишите метод Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений. Что произойдет, если решаемая система будет несовместной или неопределенной?

12. Приведите пример решения системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

13. Опишите метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений. В каких случаях можно применять данный метод?

14. Приведите пример решения определенной системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

15. Какие особенности можно указать при нахождении решений неопределенных систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса?

16. Приведите пример решения неопределенной системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

17. В каком случае при решения неопределенной системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса не нужно выполнять преобразования «обратного хода»?

18. Какая система линейных алгебраических уравнений называется однородной?

19. Почему система однородных линейных алгебраических уравнений всегда совместна?

20. Какие системы однородных линейных алгебраических уравнений называются нетривиально совместными?

21. В каких случаях однородная система линейных алгебраических уравнений нетривиально совместна?

22. С помощью какого метода определяются решения однородных систем линейных алгебраических уравнений?

23. Какая совокупность линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений называется фундаментальной системой решений?

24. Из скольких решений состоит фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений?

25. Опишите алгоритм нахождения фундаментальной системы решений системы линейных однородных алгебраических уравнений?

Глава 4. Векторная алгебра

Векторная алгебра – это прикладной раздел линейной алгебры, изучающий линейные операции над векторами и их свойства. Векторная алгебра является мощным инструментом для исследований и расчетов в аналитической геометрии, математическом анализе, математической статистике, физике, астрономии, химии, экономике, технических науках.

Векторная алгебра оперирует с понятием вектора. Обычно вектор связывают с геометрическим понятием, но часто в практических приложениях векторы задаются только численно с помощью координат, и все вычисление производят, не прибегая к графической интерпретации вектора.

Скалярными величинами или *скалярами* называют величины, полностью определяемые с помощью действительных чисел.

Пример. Площадь фигуры, длина объекта, масса тела, температура окружающей среды, работа, сопротивление металла – все это скалярные величины.

Величины, у которые важно не только числовое значением, но и направление называют *векторными*.

Пример. Перемещение тела, его скорость, импульс, ускорение, сила, напряженность поля, магнитная индукция, градиент – векторные величины.

Отметим, что направления здесь могут быть определены в геометрическом смысле не только в двумерном, трехмерном, но и четырехмерном, пятимерном, …, *n*-мерном пространствах.

Пример. При исследовании функции пяти переменных можно построить пятимерный вектор-градиент.

Следует отметить, что если векторы по физическим или иным причинам привязаны к какому-то объекту или месту и их нельзя никуда переносить, то такие векторы называются *связанными*. Векторы, которые можно двигать вдоль прямых, на которых они расположены, называют *скользящими*. А если векторы можно переносить с помощью параллельного переноса в любое место пространства, то они называются *свободными*.

В данной главе мы будем рассматривать свободные векторы в трехмерном пространстве.

4.1. Основные понятия векторной алгебры

Вектором называется направленный отрезок AB, у которого определены начало – точка A и конец – точка B (рис. 6.1).

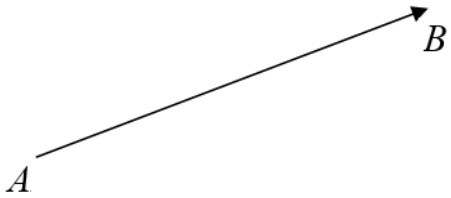


Рис. 4.1. Геометрическое изображение вектора.

Обозначения векторов такое же, как и у отрезов с использованием двух прописных или одной строчной буквы, но при этом для записи используется надчеркивание или верхняя стрелка, а иногда выделение жирным шрифтом и курсивом.

Пример. Обозначения векторов: $\vec{i}$, $\overline{PQ}$, $\vec{a}$, $\overrightarrow{DF}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{KM}$.

Модулем $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ называется скаляр, определяющий длину данного вектора.

Пример. Если начало L и конец M вектора $\vec{v}$ имеют координаты $(1;-2;4)$ и $(-2;-2;8)$, тогда для определения длины вектора по теореме Пифагора найдем расстояние между точками L и M:

$$|\vec{r}| = |LM| = \sqrt{(-2-1)^2+(-2+2)^2+(8-4)^2} = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Вектор $\vec{b}$, называется *противоположным* к вектору $\vec{a}$, если он имеет длину $|\vec{a}|$ и направление противоположное к вектору $\vec{a}$. В таком случае можно записать $\vec{b} = -\vec{a}$.

Пример. Противоположным к вектору $\overline{AB}$ является вектор $\overline{CD}$ (Рис. 6.2). Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ имеют одинаковую длину и противоположные направления.

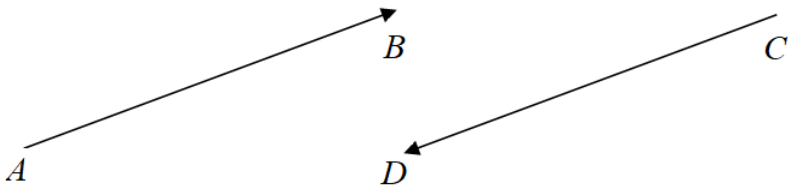


Рис. 4.2. Противоположные векторы.

Вектор, начало и конец которого совпадают, а длина равна нулю, называется *нулевым вектором.* Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором. Часто такой вектор обозначают $\vec{e}$. Если направление единичного вектора $\vec{e}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, то такой вектор называют ортом вектора $\vec{a}$ и записывают $\vec{a}^{o}$.

Если два или более векторов лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то такие вектора называются *коллинеарными*. Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$, то пишут $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Коллинеарные вектора могут иметь разные длины, быть направлены как в одну сторону, так и иметь противоположные направления.

Если векторы коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины, то их называют *равными*. Если вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$, то можно записать $\vec{a} = \vec{b}$.

Пример. На рисунке 3.3 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{e}$ являются коллинеарными, кроме того, коллинеарными являются векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{e}$ равны. Вектор $\vec{f}$ является нулевым вектором, его длина равна нулю, а направление не определено. Пусть длина вектора $\vec{e}$ равна единице, тогда вектор $\vec{e}$ является единичным вектором, кроме того, вектор $\vec{e}$ будет ортом вектора $\vec{b}$.

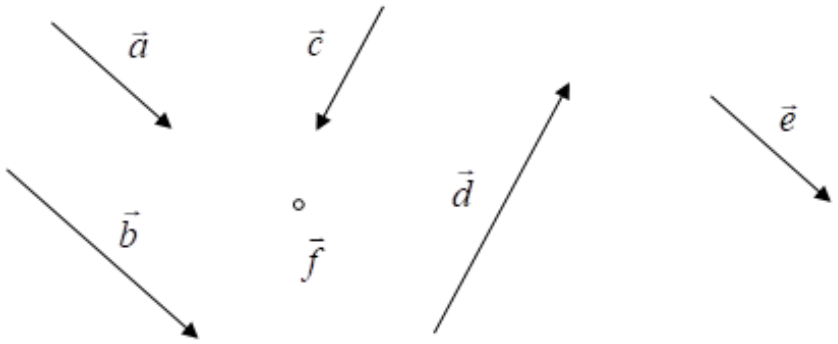


Рис. 4.3. Коллинеарные и равные векторы.

Три и более векторов в пространстве называются *компланарными,* если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие три вектора можно считать компланарными.

Пример. На рисунке 4.4 расположены три компланарных вектора: $\vec{r}$, $\vec{q}$ $\vec{s}$. Векторы $\vec{r}$ и $\vec{q}$ лежат в одной плоскости α , а вектор $\vec{s}$ в параллельной плоскости β .

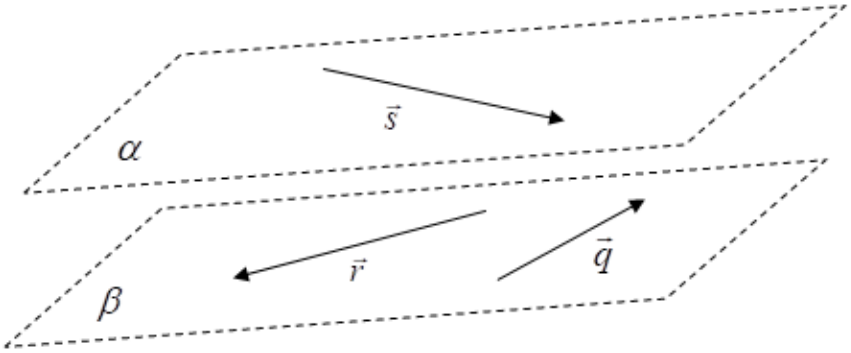


Рис. 4.4. Компланарные векторы.

4.2. Линейные операции над векторами

Рассмотрим линейные операции над векторами. К ним относятся сложение векторов, вычитание векторов, умножение вектора на число.

Сумой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что

начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (рис.4.5.а). Данное определение называется *правилом треугольника*.

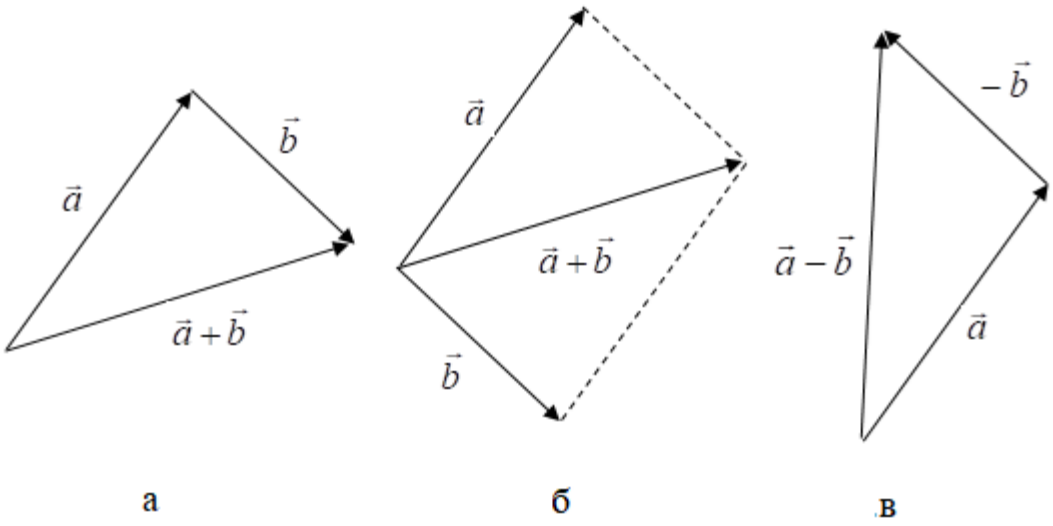


Рис. 4.5. Сумма и разность векторов.

Сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно также представить, как вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Начало вектора $\vec{a}+\vec{b}$ совпадает с началами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а конец – с противоположной вершиной параллелограмма (рис. 4.5.б).

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}-\vec{b}$, представляющий собой сумму вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{b}$ (рис. 6.5.в). Таким образом, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda|\cdot|a|$ и направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$ и противоположное направление, если $\lambda<0$.

Пример. На рисунке 3.6 изображены вектор $\vec{a}$, вектор $2\vec{a}$, полученный, как произведение вектора $\vec{a}$ на два, и вектор $-3\vec{a}$, представляющий собой произведение вектора $\vec{a}$ на число -3. Видно , что векторы $2\vec{a}$ и $-3\vec{a}$ коллинеарны вектору $\vec{a}$, вектор $2\vec{a}$ имеет направление вектора $\vec{a}$, а вектор $-3\vec{a}$ – направление противоположное вектору $\vec{a}$.

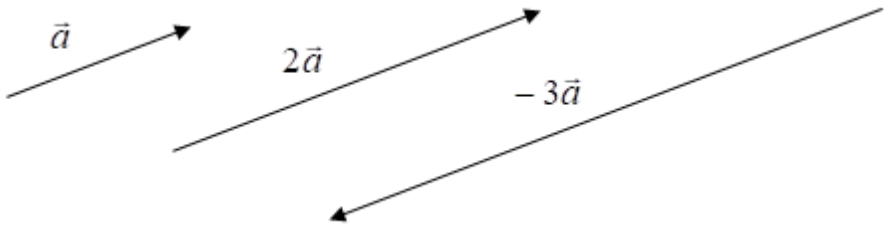


Рис. 4.6. Умножение вектора на число.

Если вектор $\vec{a}$ можно представить, как произведение вектора $\vec{b}$ на число λ, то есть $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Верно и обратное утверждение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причем, $|\vec{a}|\neq 0$, то вектор $\vec{b}$ можно представить, как произведение вектора $\vec{a}$ на некоторое число λ: $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

В силу вышеизложенного можно определить произвольный ненулевой вектор $\vec{a}$, как произведение модуля $|\vec{a}|$ на его орт: $\vec{a}=|a|\cdot\vec{a}^{0}$.

Определим свойства линейных операций над векторами.

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – коммутативность сложения;
2. $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$ – коммутативность умножения на число;
3. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – ассоциативность сложения;
3. $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1(\lambda_2\vec{a})$ – ассоциативность умножения на число;
4. $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$ – дистрибутивность суммы коэффициентов;
5. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ – дистрибутивность относительно суммы векторов.

4.3. Метод координат.

4.3.1. Разложение вектора по ортам координатных осей.

В декартовой системе координат любой свободный вектор можно представить в виде линейной комбинации орт координатных осей.

С помощью параллельного переноса поместим начало произвольного вектора $\vec{a}$ в начало прямоугольной декартовой системы координат (рис. 6.7). Пусть векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ являются ортами координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*, а

числа a_x, a_y, a_z – проекциями конца вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат. Тогда вектор $\vec{a}$ можно получить в виде суммы произведений орт координатных осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ на его проекции a_x, a_y, a_z:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\,. \qquad (4.1)$$

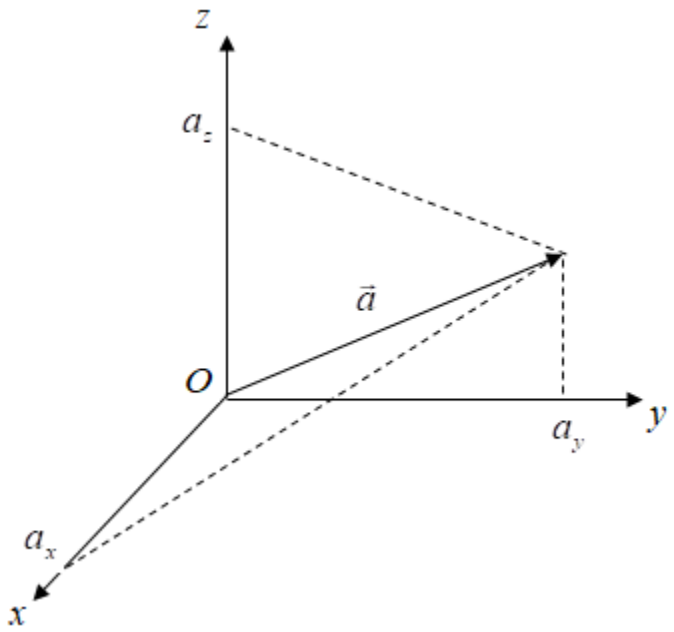


Рис. 4.7. Проекции вектора $\vec{a}$.

Числа a_x, a_y, a_z принято называть координатами вектора $\vec{a}$. В этом случае разложение вектора $\vec{a}$ можно записать в следующим виде:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\,.$$

Пример. Если проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz* равны соответственно 4, 1 и –7, то говорят, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты (4; 1; –7), а его разложение можно представить в виде:

$$\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}\,.$$

В случае, если известны координаты начала $(x_1; y_1; z_1)$ и координаты конца $(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\vec{a}$, то координаты вектора этого вектора можно получить, вычитывая из координат конца вектора соответствующие координаты его начала: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Пример. Найдем координаты вектора $\vec{p}$, если известны координаты его начала $(3;-8;5)$ и его конца $(2;0;11)$.

Для нахождения координат вектора $\vec{p}$ найдем разности его координат:

$$(2-3;0-(-8);11-5)=(-1;8;6).$$

4.3.2. Модуль вектора.

Мы уже давали определение модуля вектора, как числа, определяющего длину вектора. Снова перенесем начало вектора $\vec{a}$ в начало координат. Тогда длину вектора $\vec{a}$ можно получить по теореме Пифагора, взяв квадратный корень из суммы квадратов проекций вектора $a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2$.

Таким образом, модуль вектора получим по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\ . \qquad (4.2)$$

Пример. Найдем модуль вектора *k*, имеющего координаты (4, 1, –7).

Используя вышеприведенную формулу получим:

$$\left|\vec{k}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{16+1+49} = \sqrt{66} \approx 8{,}124038\ .$$

4.3.3. Направляющие косинусы

Для определения направления векторов можно использовать углы α, β, γ, которые вектор образует с осями координат (рис. 4.8). Данные углы полностью определяют направление вектора.

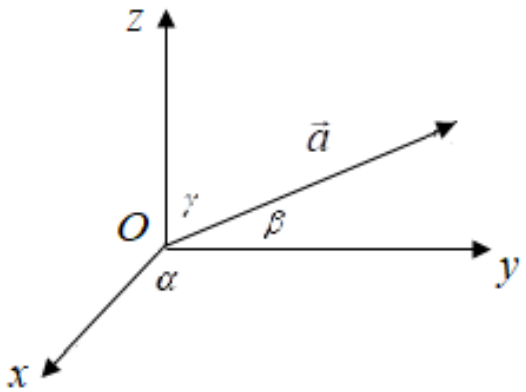


Рис. 4.8. Направляющие косинусы.

Косинусы этих углов называют *направляющими косинусами* вектора. Направляющие косинусы можно найти, как отношения соответствующих координат к модулю вектора:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}. \tag{4.3}$$

Найдем сумму квадратов направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^{\,2}}{|a|^2} + \frac{a_y^{\,2}}{|a|^2} + \frac{a_z^{\,2}}{|a|^2} = \frac{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}{|a|^2}.$$

Так как сумма квадратов координат равна квадрату модуля вектора, то значение дроби равно 1. Следовательно, сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4.4}$$

Пример. Найти направляющие векторы вектора $\vec{p}$, если заданы координаты его начала и конца: $P_1(5;\ 3;\ 0)$, $P_2(1;\ 7;\ -2)$.

Вычислим координаты вектора $\vec{p}$:

$$p_x = 1 - 5 = -4; \quad p_y = 7 - 3 = 4; \quad p_z = -2 - 0 = -2.$$

Теперь определим модуль вектора $\vec{p}$:

$$|\vec{p}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

Следовательно, направляющие косинусы вектора $\vec{p}$ будут равны:

$$\cos\alpha = \frac{-4}{6}; \quad \cos\beta = \frac{4}{6}; \quad \cos\gamma = \frac{-2}{6}.$$

Сократив дроби, окончательно получим:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}; \quad \cos\beta = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{3}.$$

4.3.4. Равенство и коллинеарность векторов

Два вектора считаются *равными*, если их координаты равны:

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}. \tag{4.5}$$

Пример. Векторы $\vec{m}(-8;3;17)$ и $\vec{n}(-8;3;17)$ равны, так равны их координаты.

Рассмотрим два коллинеарных вектора: вектор $\vec{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z и вектор $\vec{b}$, координаты которого равны b_x, b_y, b_z. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены в одну сторону, тогда их направляющие косинусы будут равны.

Из определения направляющих косинусов выразим координаты векторов:

$$a_x = |a|\cos\alpha; \quad a_y = |a|\cos\beta; \quad a_z = |a|\cos\gamma.$$

$$b_x = |b|\cos\alpha; \quad b_y = |b|\cos\beta; \quad b_z = |b|\cos\gamma.$$

Разделим теперь все координаты вектора $\vec{a}$ на соответствующие координаты вектора $\vec{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{|a|\cos\alpha}{|b|\cos\alpha} = \frac{|a|}{|b|}; \quad \frac{a_y}{b_y} = \frac{|a|\cos\beta}{|b|\cos\beta} = \frac{|a|}{|b|}; \quad \frac{a_z}{b_z} = \frac{|a|\cos\gamma}{|b|\cos\gamma} = \frac{|a|}{|b|}.$$

Как видно, отношение любых координат сонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно отношению их модулей.

Нетрудно понять, что в случае противоположно направленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направляющие косинусы будут отличаться только знаком и отношение любых координат противонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно отношению их модулей, взятому со знаком минус:

$$\frac{a_x}{b_x} = -\frac{|a|}{|b|}; \quad \frac{a_y}{b_y} = -\frac{|a|}{|b|}; \quad \frac{a_z}{b_z} = -\frac{|a|}{|b|}.$$

Таким образом, можно сказать, что координаты коллинеарных векторов пропорциональны. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты являются коллинеарными:|

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{4.6}$$

Пример. Векторы $\vec{q}(4; -8; 2)$ и $\vec{r}(-6; 12; -3)$ являются коллинеарными, поскольку их координаты пропорциональны:

$$\frac{4}{-6} = \frac{-8}{12} = \frac{2}{-3}.$$

4.4. Скалярное произведение

4.4.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \tag{4.7}$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Иногда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывают $(\vec{a}; \vec{b})$.

Ввиду того, что $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ и $\cos\varphi$ являются действительными числами, то для скалярного произведения выполняются следующие основные свойства:

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – коммутативность скалярного произведения;

2. $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ – ассоциативность умножения на скаляр;

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \cdot\vec{a} \cdot \vec{c})$ – дистрибутивность скалярного произведения.

Кроме того, можно заметить, что квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Пример. Найдем скалярные квадраты ортов осей координат.

Вследствие того, что длины ортов равны единице, получим:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 .$$

Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Пример. Найдем скалярные произведение различных ортов осей координат.

Так как углы между ортами равно нулю, получим:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 .$$

4.4.2. Выражение скалярного произведения через координаты

Возьмем два произвольных вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$. Представим эти векторы в виде суммы произведений их координат на соответствующие орты:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} .$$

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= a_x b_x \vec{i}\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\vec{k} + a_y b_x \vec{j}\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\vec{j} + a_y b_z \vec{j}\vec{k} + a_z b_x \vec{k}\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\vec{k} .$$

В силу того, что произведения $\vec{i} \cdot \vec{j}$, $\vec{i} \cdot \vec{k}$, $\vec{j} \cdot \vec{k}$, $\vec{j} \cdot \vec{i}$, $\vec{k} \cdot \vec{i}$ и $\vec{k} \cdot \vec{j}$ равны нулю, слагаемые , содержащие эти множители также будут равны нулю, и, следовательно, скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x \vec{i}\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\vec{k}$$

Учитывая, что скалярные произведения $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, окончательно получим:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (4.8)$$

Таки образом, можно утверждать: скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

Пример. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{p}(-2;1;5)$ и $\vec{q}(4;8;3)$.

Для нахождения произведения $\vec{p}\cdot\vec{q}$ рассчитаем сумму произведений соответствующих координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z = -2\cdot 4 + 1\cdot 8 + 5\cdot 3 = -8 + 8 + 15 = 15.$$

4.4.3. Приложения скалярного произведения

Рассмотрим наиболее употребляемые приложения скалярного произведения.

Определение угла между векторами

Возьмем два ненулевых вектора $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$. Выпишем формулу нахождения скалярного произведения этих векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}} = |\vec{a}|\cdot|\vec{\mathrm{b}}|\cos\varphi.$$

Выразим из уравнения $\cos\varphi$. Для этого разделим обе части уравнения на произведение модулей векторов $|\vec{a}|\cdot|\vec{\mathrm{b}}|$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{\mathrm{b}}|}.$$

Подставим вместо произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}}$ сумму произведений координат $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, а вместо модулей векторов – их представления через координаты и таким образом получим формулу нахождения косинуса угла между указанными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}\cdot\sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}}}. \qquad (4.9)$$

Пример. Определим косинус угла между векторами $\vec{g}(6;-3;11)$ и $\vec{h}(-3;0;1)$.

Сначала найдем скалярное произведение векторов $\vec{g}$ и $\vec{h}$:

$$\vec{g}\cdot\vec{h} = 6\cdot(-3) + (-3)\cdot 0 + 11\cdot 1 = -18 + 0 + 11 = -7.$$

Найдем модули векторов $\vec{g}$ и $\vec{h}$:

$$|\vec{g}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 11^2} = \sqrt{36 + 9 + 121} = \sqrt{166}.$$

$$\left|\vec{h}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 0 + 1} = \sqrt{10}.$$

Теперь для нахождения косинуса угла между векторами $\vec{g}$ и $\vec{h}$ осталось найти отношение $\vec{g} \cdot \vec{h}$ на произведение модулей $|\vec{g}| \cdot \left|\vec{\mathrm{h}}\right|$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{g} \cdot \vec{\mathrm{h}}}{|\vec{g}| \cdot \left|\vec{\mathrm{h}}\right|} = \frac{-7}{\sqrt{166} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{7}{2 \cdot \sqrt{415}}.$$

Определение перпендикулярности векторов

Из формулы векторного произведения органично следует условие перпендикулярности векторов.

Два ненулевых вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ будут взаимно перпендикулярными тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пример. Определим, являются ли векторы $\vec{e}(4; 1; 9)$ и $\vec{f}(-3; 3; 1)$ перпендикулярными?

Для определения перпендикулярности найдем скалярное произведение векторов $\vec{e}$ и $\vec{f}$:

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = -12 + 3 + 9 = 0.$$

Ввиду того, что скалярное произведение векторов $\vec{e}$ и $\vec{f}$ равно нулю, следовательно, векторы $\vec{e}$ и $\vec{f}$ являются взаимно перпендикулярными.

4.5. Векторное произведение

4.5.1. Определение и свойства векторного произведения

Три некомпланарных упорядоченных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют *левую тройку*, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого

вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся по часовой стрелки, и *правую* , если против часовой (рис. 3.9).

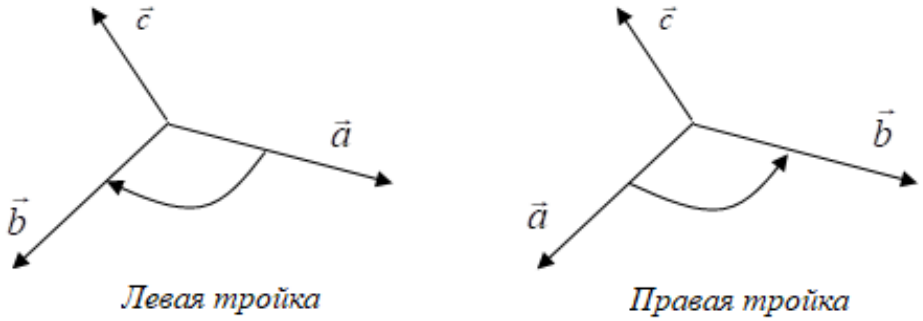


Рис. 4.9. Ориентация векторов.

Дадим теперь определение векторного произведения.

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1. Перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2. Имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где $\varphi = \angle(\vec{a}; \vec{b})$ (рис. 7.10);

3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

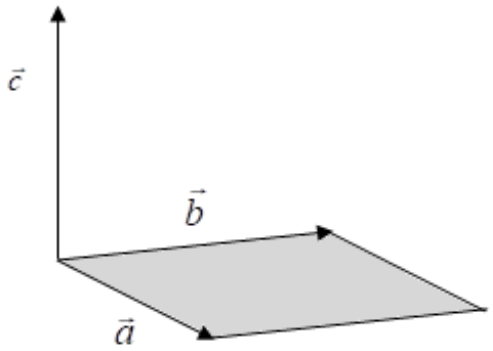


Рис. 4.10. Векторное произведение.

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}; \vec{b}]$.

Пример. Определим векторные произведение ортов осей координат.

Вследствие того, что углы между ортами равны 90°, длины ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ равны единице и они образуют правую тройку получим:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\,.$$

Однако, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\,.$

Рассмотрим основные свойства векторного произведения.

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ – антикоммутативность векторного произведения;
2. $\alpha\vec{a}\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$ – ассоциативность умножения на скаляр;
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\cdot\vec{a}\times\vec{c})$ – дистрибутивность векторного произведения.

Рассмотрим два коллинеарных ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По определению длина векторного произведения $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ равна произведению модулей векторов $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{\mathrm{b}}\right|$ на синус угла между ними. Так как вектора коллинеарны, то синус угла между ними будет равен нулю, а, следовательно, векторное произведение будет равно нулевому вектору. Очевидно, верно и обратное утверждение: если векторное произведение двух векторов равно нулю, то векторы коллинеарны.

Пример. Векторные квадраты ортов осей координат равны нулевому вектору:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\,.$$

4.5.2. Векторное произведение в координатной форме

Возьмем два произвольных вектора $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$. Представим эти векторы в виде суммы произведений их координат на соответствующие орты:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\,;\qquad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\,.$$

Найдем векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+$$

$$+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}\,.$$

Как мы уже определили, векторные квадраты ортов осей координат равны нулевому вектору:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Найдем оставшиеся векторные произведения ортов (рис. 4.11).

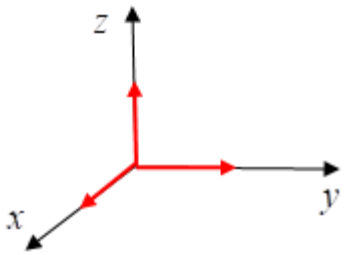


Рис. 4.11. Орты осей координат.

Результат вычисления векторных произведений поместим в таблицу:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Подставляя значения таблицы в выражение векторного произведения, получим:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_x \vec{0} + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_y \vec{0} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} + a_z b_z \vec{0}.$$

Уберем из суммы нулевые векторы:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i}.$$

Приведем подобные слагаемые относительно ортов:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Выражения в скобках можно представить в виде определителей второго порядка:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Как видно, последнее выражение является разложение определителя по теореме Лапласа:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (4.10)$$

Таким образом, векторное произведение можно представить в виде определителя третьего порядка, в первая строка которого содержит орты осей координат, а во второй и третьей строках находятся координаты перемножаемых векторов.

Пример. Найти координаты векторного произведения векторов $\vec{a}\,(3;\ -1;\ 2)$ и $\vec{b}\,(0;\ 5;\ 4)$.

Будем использовать полученную формулу, поместим в определитель координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 4\end{vmatrix}=$$

Разложим определитель по первой строке и вычислим определители второго порядка:

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 5\end{vmatrix}=-14\vec{i}+12\vec{j}+15\vec{k}.$$

Таким образом, мы получили вектор с координатами (-14; 12; 15).

4.5.3. Некоторые приложения векторного произведения

Рассмотрим наиболее употребляемые приложения векторного произведения.

Установление коллинеарности векторов

Возьмем два ненулевых вектора $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными, то координаты этих векторов пропорциональны $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ и пропорциональными будут строки

определителя $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, а значит этот определитель будет равен нулю и произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ будет равно нулевому вектору.

Это рассуждение можно провести и в обратную сторону: если векторное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю, то указанные векторы будут коллинеарными.

Пример. Проверим векторы $\vec{c}\,(6;12;-9)$ и $\vec{d}\,(4;8;-6)$ на коллинеарность.

Найдем произведение $\vec{c} \times \vec{d}$:

$$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 12 & -9 \\ 4 & 8 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}.$$

Так как векторное произведение $\vec{c} \times \vec{d}$ равно нулевому вектору, то векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ являются коллинеарными.

Нахождение площадей параллелограммов и треугольников

Вспомним, что в определении векторного произведения указано, что вектор, полученный в результате векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Тогда для нахождения площади параллелограмма достаточно найти модуль векторного произведения векторов, совпадающих со смежными сторонами:

$$S_{пар} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|. \qquad (4.11)$$

Если взять только половину параллелограмма, разделенного диагональю, то для определения площади полученного треугольника достаточно площадь параллелограмма разделить на два:

$$S_{\Delta} = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{2}. \qquad (4.12)$$

Пример. Найдем площадь треугольника с вершинами в точках $E(-2; 2; -4);\ F(-4; -8; -8);\ G(1; 4; 8)$.

Для решения задачи определим координаты двух векторов, исходящих из одной вершины, например, вершины *E*.

$$\overrightarrow{EF} = (-4-(-2);\ -8-2;\ -8-(-4)) = (-2; -10; -4);$$

$$\overrightarrow{EG} = (1-(-2);\ 4-2;\ 8-(-4)) = (3; 2; -12).$$

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EG}$:

$$\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -10 & -4 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= -112\vec{i} + 12\vec{j} + 26\vec{k}.$$

А теперь найдем половину длины полученного векторного произведения:

$$S_{\Delta EFG} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-112)^2 + 12^2 + 26^2} = \sqrt{13364} \approx 115{,}6028.$$

Следовательно, площадь треугольника *EFG* приближенно равна 115,6028.

4.6. Смешанное произведение векторов

4.6.1. Определение и свойства смешанного произведения

Возьмем три произвольных ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Определим тернарную операцию умножения этих векторов следующим образом: векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярно умножим на вектор $\vec{c}$. Так как результат векторного произведения, являющийся вектором, второй раз мы умножаем скалярно, то в итоге получим числовое значение. Таким образом составленное произведение трех векторов называют *смешанным* или реже *векторно-скалярным*.

Геометрически смешанное произведение можно интерпретировать, как объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, образующих правую тройку (рис. 6.12).

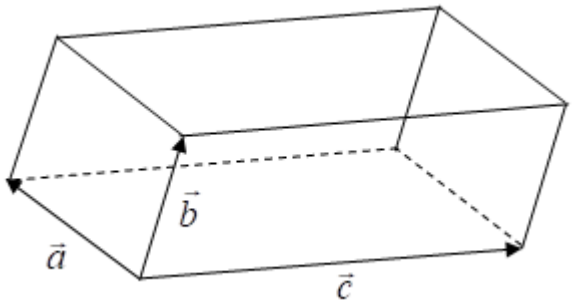


Рис. 4.12. Геометрическое представление смешанного произведения.

Ввиду антикоммутативности векторного произведения для векторов, образующих левую тройку, смешанное произведение будет иметь отрицательное значение.

Пример. Смешанное произведение ортов осей координат равны нулевому единице:

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{k} = 1.$$

Рассмотрим основные свойства смешанного произведения.

Свойства смешанного произведения

1. Для смешанного произведения не важен порядок векторного и скалярного произведений:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Важно, что сначала выполняется векторное произведение, а потом скалярное. Учитывая это свойство, можно вообще не указывать знаки векторного и скалярного произведений:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

2. При циклической перестановке значение смешанного произведения не изменится:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}.$$

3. При перемене мест двумя любыми векторами значение смешанного произведения меняет знак:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}\,.$$

4. Смешанное произведение трех ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

4.6.2. Смешанное произведение в координатах

Возьмем три произвольных ненулевых вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ и $\vec{c}(c_x; c_y; c_z)$. Представим эти векторы в виде суммы произведений их координат на соответствующие орты:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,; \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\,; \qquad \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\,.$$

Найдем смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, представив векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ в виде определителя третьего порядка:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

Разложим определитель по первой строке:

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

Теперь выполним скалярное произведение векторов в координатной форме:

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z\,.$$

Снова воспользуемся теоремой Лапласа и свернем полученное выражение в определитель третьего порядка. Окончательно получим:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (4.13)$$

Таким образом, смешанное произведение произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно определителю, составленному из координат указанных векторов.

Пример. Найдем смешанное произведение трех векторов $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(4;0;6)$ и $\vec{c}(0;10;7)$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot(-44)+0-6\cdot 10=116.$$

Пример. Найдем смешанное произведение трех векторов $\vec{c}(2;-1;8)$, $\vec{d}(3;-5;0)$ и $\vec{e}(8;-11;8)$.

$$\vec{c}\vec{d}\vec{e}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & -5 & 0 \\ 8 & -11 & 8 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -11 & 8 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -11 \end{vmatrix}=-80+24+56=0.$$

4.6.3. Некоторые приложения смешанного произведения

Определение взаимной ориентации векторов

Как мы уже отмечали, смешанное произведение векторов, образующих правую тройку, является положительным числом, а для векторов, образующих левую тройку, – отрицательное. Использование знака смешанного произведения позволяет определять взаимную ориентацию векторов в пространстве.

Пример. Определим взаимную ориентацию трех векторов $\vec{k}(5;-1;8)$, $\vec{l}(3;2;1)$ и $\vec{m}(-7;0;12)$, взятых в указанном порядке.

Для определения ориентации векторов, найдем их смешанное произведение:

$$\vec{k}\,\vec{l}\,\vec{m}=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & 12 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 12 \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}=20+43+112=275.$$

Так как смешанное произведение положительно, векторы $\vec{k}$, $\vec{l}$ и $\vec{m}$ образуют правую тройку.

Пример. Три вектора $\vec{r}(6;0;4)$, $\vec{s}(-5;-2;0)$ и $\vec{t}(0;0;4)$, взятые в указанном порядке, образуют левую тройку, так как их смешанное произведение имеет отрицательный знак.

$$\vec{r}\,\vec{s}\,\vec{t} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -48 + 0 + 0 = -48.$$

Установление компланарности векторов

Возьмем три ненулевых вектора $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ и $\vec{c}(c_x;c_y;c_z)$. Указанные векторы будут компланарны, тогда и только тогда, если их смешанное произведение будут равно нулю. На этом утверждении и основано установлении компланарности векторов.

Пример. Определим, являются ли компланарными векторы $\vec{f}(0;3;0)$, $\vec{g}(5;4;0)$ и $\vec{h}(0;0;6)$.

Для определения компланарности найдем смешанное произведение векторов:

$$\vec{f}\,\vec{g}\,\vec{h} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 90 + 0 = -90.$$

Так как произведение не равно нулю, то векторы $\vec{f}$, $\vec{g}$ и $\vec{h}$ являются компланарными.

Пример. Векторы $\vec{d}(2;1;1)$, $\vec{e}(3;2;2)$ и $\vec{f}(1;1;1)$ будут компланарными, поскольку их смешанное произведение равно нулю:

$$\vec{d}\,\vec{e}\vec{f} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 1 = 0.$$

Вычисление объемов многогранников

Важным приложением смешанного произведения является вычисление объема различных многогранников. Достаточно просто вычисляется объем параллелепипеда, три любые грани которого совпадают с некомпланарными векторами (рис. 4.13).

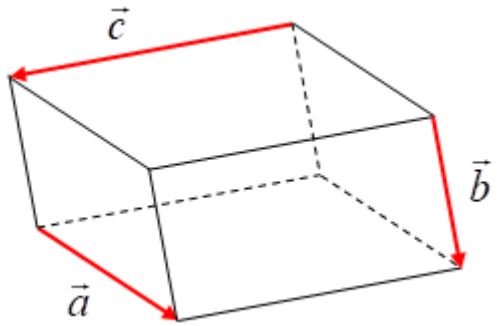


Рис. 4.13. Объем параллелепипеда.

Объем такого параллелепипеда будет численно равен абсолютному значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|. \qquad (4.14)$$

Пример. Определить объем параллелепипеда $AA_1BB_1CC_1DD_1$ (рис. 4.14), если известны координаты его вершин: $A(3;8;1)$, $B(5;13;1)$, $C(6;10;3)$, $C_1(6;12;3)$.

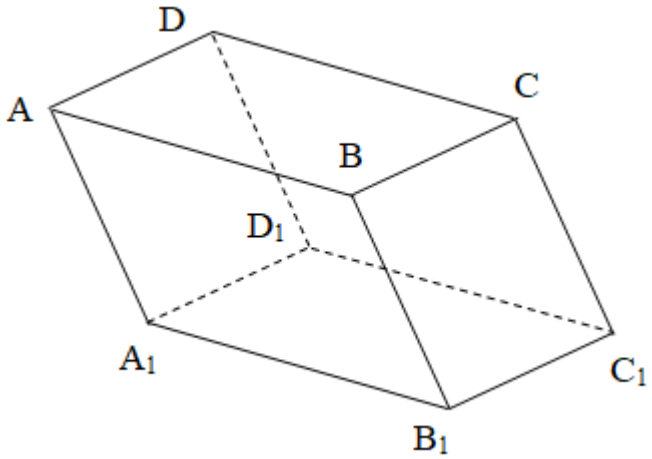


Рис. 4.14. Параллелепипед $AA_1BB_1CC_1DD_1$.

Для расчета объема параллелепипеда найдем смешанное произведение трех некомпланарных векторов $\vec{a}(2;5;0)$, $\vec{b}(1;-3;2)$ и $\vec{c}(0;2;0)$, совпадающих с ребрами параллелепипеда AB, BC и CC_1 соответственно.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

Следовательно, объем параллелепипеда $AA_1BB_1CC_1DD_1$ будет равен 8.

Объем треугольной пирамиды, построенной на трех некомпланарных векторах (рис. 3.15), можно легко получить, учитывая, что пирамида является шестой частью параллелограмма:

$$V_{\Delta} = \frac{\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}{6}. \qquad (4.15)$$

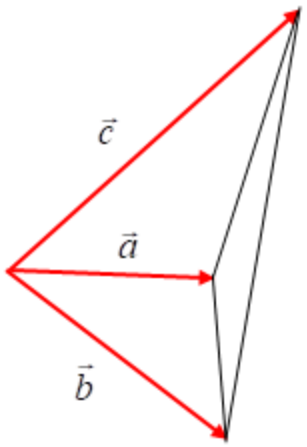


Рис. 4.15. Треугольная призма.

Пример. Вершинами пирамиды служат точки: $O(8;-4;0)$, $P(-4;-5;-7)$, $R(0;-1;7)$, $Q(1;5;7)$. Найдем объем этой пирамиды.

Для расчета объема построим некомпланарные векторы: $\overrightarrow{OP}(-12;-1;-7)$, $\overrightarrow{OR}(-8;3;7)$ и $\overrightarrow{OQ}(-7;9;7)$. Затем найдем смешанное произведение этих векторов:

$$V_{пир} = \begin{vmatrix} -12 & -1 & -7 \\ -8 & 3 & 7 \\ -7 & 9 & 7 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -8 & 7 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = 854.$$

Разделив 854 на 6, получим искомый объем:

$$V_{пир} = \frac{854}{6} \approx 142,33.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие вектора называются равными, противоположными, коллинеарными, компланарными? Приведите примеры.
2. Если два вектора являются противоположными, то как соотносятся их координаты?
3. Дайте понятие орты вектора. Какую роль играют орты в методе координат?
4. Каким образом осуществляется разложение вектора по ортам координатных осей?
5. Опишите линейные операции над векторами. Каким образом данные операции выполняются над векторами, координаты которых известны?
6. Какие вы знаете свойства линейных операций над векторами?
7. Как определить модуль вектора, координаты которого известны?
8. Опишите метод нахождения направляющих косинусов вектора. Для чего направляющие косинусы могут использоваться?
9. Как определить коллинеарность двух векторов с известными координатами?
10. Каким образом можно определить скалярное произведение векторов.
11. Какие свойства скалярного произведения векторов вы знаете?
12. Как можно выразить скалярное произведение векторов, зная координаты этих векторов?
13. Перечислите приложения скалярного произведения векторов. Каким образом находится угол между векторами?
14. Дайте определение векторного произведения векторов. Какие свойства

векторного произведения вы знаете?

15. Как можно выразить векторное произведение через координаты перемножаемых векторов?

16. Перечислите основные приложения векторного произведения векторов. Как можно найти площади параллелограмма и треугольника, построенного на векторах?

17. Дайте определение смешанного произведения векторов. Укажите свойства смешанного произведения.

18. Каким образом можно перемножить смешанно три вектора, зная координаты векторов?

19. Как можно определить взаимную ориентацию трех векторов? В каком случае они будут компланарны?

20. Каким образом можно найти объемы параллелепипедов и треугольных пирамид, зная координаты вершин этих многогранников?

Раздел 2. Основы математического анализа

Глава 5. Теория пределов и непрерывных функций

Математический анализ – это раздел математики, посвящённый исследованию функциональных зависимостей элементов двух или нескольких числовых множеств средствами дифференциального и интегрального исчислений.

Хотя предпосылки математического анализа появились значительно раньше, но основы дифференциального и интегрального исследования функций появились только в XVII веке в работах Джона Валлиса (1616–1703), Джеймса Грегори (1638–1675), Исаака Барроу (1630–1677), и окончательно математический анализ, как раздел математики, сформировался в работах Исаака Ньютона (1643–1727), Готфрида Лейбница (1646–1716), Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748) Бернулли, Гийома Лопиталя (1661–1704).

В XVII веке появились такие разделы математического анализа, как вариационное исчисление, дифференциальные уравнения, преобразования Фурье и производящие функции. Огромный вклад в развитие математического анализа внесли Леонард Эйлер (1707–1783), Жозеф Лагранжа (1736–1813), Жан-Батист Фурье (1768–1830), Симеон Пуассон (1781–1840), Огюстен Коши (1789–1857), Жозеф Лиувилль (1809–1882).

Текущий раздел включает темы, связанные с изучением функций и пределов одной переменной, дифференциальным исчислением функций одной переменной, функций нескольких переменных интегралов, числовых и функциональных рядов, методов решений дифференциальных уравнений.

5.1. Функция одной переменной

5.1.1. Определение функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Определение. Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие вполне определенный единственный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$ (рис. 5.1).

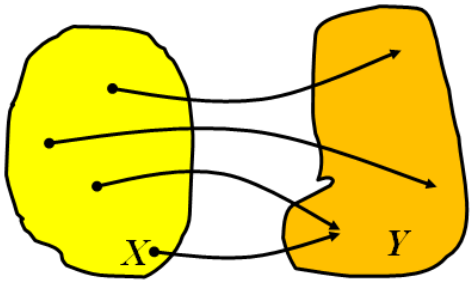


Рис. 5.1. Определение функции.

Функцию можно понимать, как закон соответствия между зависимой переменной y и независимой переменной x. При этом переменную y называют функцией, а переменную x – аргументом этой функции. Множество X для такого соответствия является *областью определения функции*, а множество Y называется *множеством значений*.



Рис. 5.2. Функция и ее аргумент.

Запись $y = f(x)$ означает, что y является функцией x. Значение функции $f(x)$ при $x = a$ обозначают через $f(a)$ (рис. 5.2).

5.1.2. Способы задания функций

Обычно функцию описывают тремя способами: *табличным*, *графическим* и *аналитическим*.

В табличной форме перечисляются некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции. Такой способ задания функции

обычно применяется, если известны только некоторые значения функции (таблица 5.1).

Таблица 5.1.

Табличное описание функции

X	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y	0,756	1,223	3,006	2,168	1,983	1,766	1,612	1,529	1472

Обычно в таблицу записывают данные, полученные в результате наблюдений или измерений. Значения аргумента, как правило, определяются через заданный интервал, чем меньше интервал, тем точнее задана функция. Однако с уменьшением интервала значений аргумента таблица становится громоздкой.

Из таблицы можно определить не только указанные значения функции, но и с помощью математических расчетов найти приближенные значения функции, для любого значения аргумента на заданной области.

Второй способ задания функции – графический. На оси абсцисс откладываются значения аргумента x, а на оси ординат – значения функции $f(x)$ (рис. 5.3). Функциональная зависимость отображается с помощью кривой, каждая точка которой имеет координаты $(x; f(x))$.

В графической форме нагляднее прослеживается поведение функции в области ее отображения на графике. По графику функции можно всегда составить таблицу с любым интервалом значений аргумента, однако при этом теряется точность значений функции. Кроме того, графики дают лишь условное представление о поведении функции при стремлении аргумента к бесконечности или значительного удаления самой функции от начала координат.

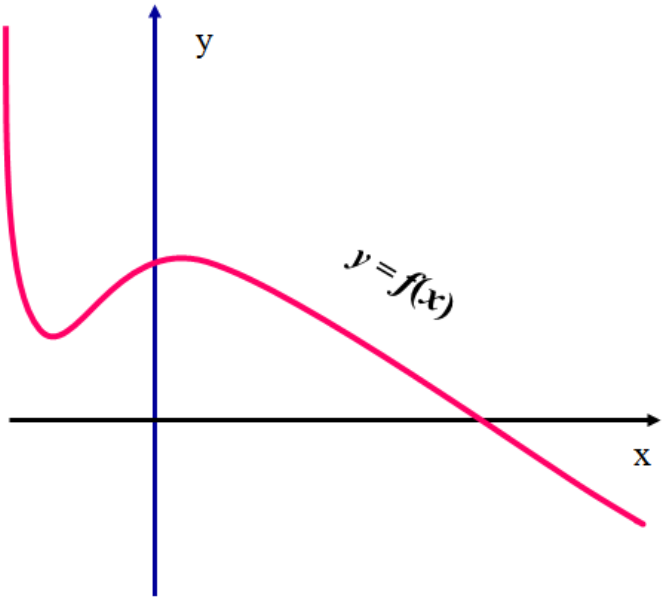


Рис. 5.3. График функции.

Наиболее общим способом задания функции является аналитический. В этом способе с помощью математических операций четко описывается правило f, по которому значениям аргумента x ставятся в соответствие значения функции y.

Пример. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную аналитически: $y = \dfrac{x-5}{x^2-2x-3}$. Для каждого значения аргумента из области определения из заданной формулы можно найти соответствующее ему значение функции. Найдем значение функции для аргумента $x = 2$, для этого подставим число 2 вместо переменной x в указанную формулу: $y(2) = \dfrac{2-5}{2^2-2\cdot 2-3} = \dfrac{-3}{-3} = 1$.

Любую функцию, заданную аналитически, можно всячески исследовать: найти значения функции для любых аргументов, определить область определения функции и множество значений, ее монотонность, области возрастания и убывания функции, экстремальные точки, выпуклость и перегибы графика функции.

5.1.3. Область определения функции

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x, при котором данная функция существует и обозначается $D(x)$.

Область определения функции $y = f(x)$ может представлять собой:

− *интервал* (открытый промежуток) – множество значений x, удовлетворяющих условию $a < x < b$, записывается $(a; b)$;

− *сегмент* (отрезок или замкнутый промежуток) – множество значений x, удовлетворяющих условию $a < x < b$, записывается $[a; b]$;

− *полуинтервал* – множество значений x, удовлетворяющих условиям $a \le x < b$ или $a < x \le b$, записываются $[a; b)$ или $(a; b]$;

− *бесконечный интервал* вида: $-\infty < x < +\infty$, $a < x < +\infty$, $-\infty < x < b$, $a \le x < \infty$; $-\infty < x \le b$, *записывается* $(-\infty; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$;

− совокупность нескольких интервалов или сегментов и т.п.

Пример. Областью определения функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 17$ является бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

Пример. Областью определения функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ является сегмент $[-2; 2]$, поскольку под квадратным корнем могут быть только положительные числа.

Пример. Областью определения функции $y = \dfrac{x-5}{\sqrt{3-x}}$ является бесконечный интервал $(-\infty; 3)$.

Пример. Областью определения функции $y = \dfrac{x-5}{x^2 - 2x - 3}$ является объединение интервалов $(-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

Множеством значений **E**(x) данной функции является совокупность всех ее возможных значений, принимаемых данной функцией на области определения. Для определения множества значений функции необходимо детально исследовать функцию.

5.2. Основные свойства функций

5.2.1. Четность, нечетность функции

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений аргументов x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции расположен симметрично относительно оси ординат Oy (рис. 5.4).

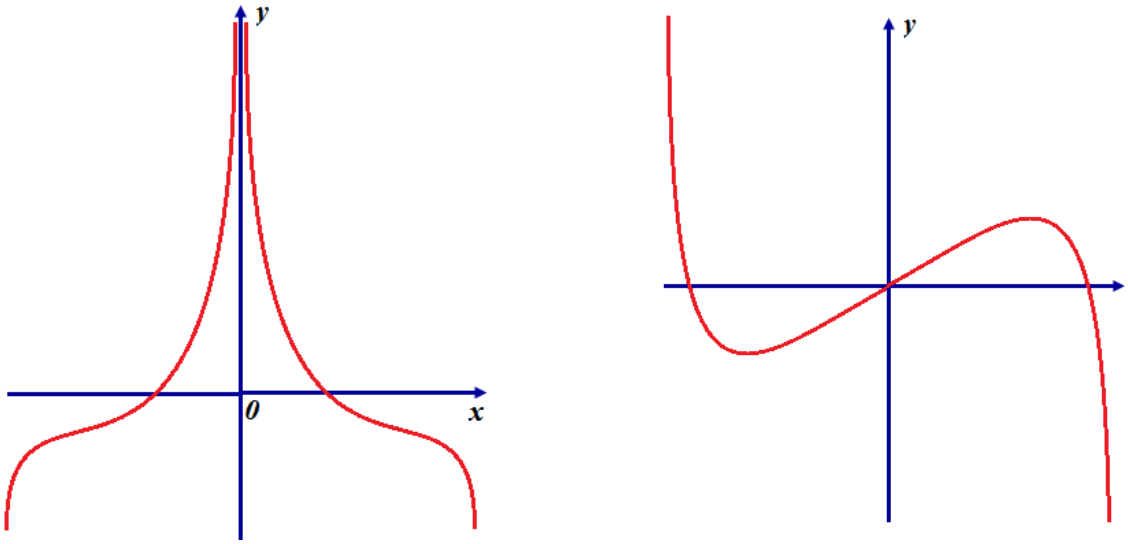


Рис. 5.4. Графики четной (слева) и нечетной (справа) функций.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если для любых значений аргументов x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. для любого значения x. График нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат. Если оба этих условия не выполняются, то функция $y = f(x)$ называется *функцией общего вида*. Соответственно, график функции общего вида не будет симметричным ни относительно оси ординат, ни обладать центральной симметрией относительно начала координат.

Следует отметить области определений у четных и нечетных функций будут симметричны относительно точки 0, а у функций общего вида это может не выполнятся.

Пример. Определить вид функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Найдем область определения данной функции. В нашем случае при аргументе равном -1 и 1 знаменатель дроби будет равен нулю, следовательно, $D(x) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$, область определения функции – симметрична. Подставим в правую часть равенства вместо x значение $–x$, раскроем скобки и вынесем минус из числителя дроби:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Получившееся выражение отличается от первоначального только знаком перед дробью, то есть $f(-x) = -f(x)$, значит функция является нечетной.

Пример. Определить вид функции $y = 3\sin(x^4 + 3) + \cos x$.

Область определения функции $D(x) = (-\infty; +\infty)$ является симметричной. Подставив вместо аргумента $–x$, и учитывая, что $\cos(x) = \cos(-x)$, получим:

$$f(-x) = 3\sin((-x)^4 + 3) + \cos(-x) = 3\sin(x^4 + 3) + \cos x,$$

что полностью совпадает с выражением функции $f(-x) = f(x)$, а значит функция является четной.

Пример. Определить вид функции $y = \frac{2\log_7(x-1)}{x-2}$. Область определения функции $D(x) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ не является симметричной относительно точки 0, следовательно функция общего вида.

5.2.2. Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число $T>0$, что для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. Число Т называют периодом функции. Периодическими бывают только функции, содержащие тригонометрические выражения.

Пример. Исследовать на периодичность функцию $y = 3\sin(2x + 3) - 8$.

Решим уравнение относительно переменной Т, в левой части которого будет $f(x + T)$, а справа $f(x)$:

$$3\sin(2(x+T)+3)-8=3\sin(2x+3)-8$$

Упростим уравнение и разделим обе части уравнения на 3:

$$\sin(2(x+T)+3)=\sin(2x+3)$$

Так как функция sin периодична с периодом $2\pi k$, то из полученного равенства следует, что

$$2(x+T)+3=2x+3+2\pi k\,.$$

Раскроем скобки:

$$2x+2T+3=2x+3+2\pi k\,,$$

Затем, приведем подобные слагаемые:

$$2T=2\pi k\,,$$

Отсюда получим значение $T=\pi k$. Таким образом, исследуемая функция $y=3\sin(2x+3)-8$ является периодической с периодом πk.

5.2.3. Монотонность функции

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке *X,* если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$, тогда функция возрастает на промежутке *X***,** если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает, если $f(x_2) < f(x_1)$. Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными* функциями.

Пример. Функция $y=x^2+2x-3$ (рис. 5.5) убывает при $x\in(-\infty;0]$ и возрастает при $x\in[0+\infty)$.

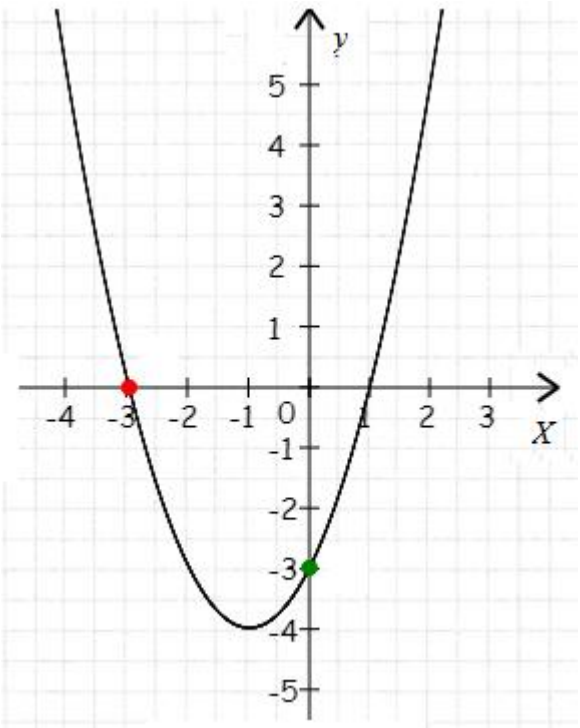


Рис. 5.5. График функции $y = x^2 + 2x - 3$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число M > 0, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. В противном случае функция называется *неограниченной*.

Пример. Функция $y = 2\sin(x - 3) + 2$ (рис. 5.6) является ограниченной, так как ее минимальное значение равно нулю, а максимальное равно 4.

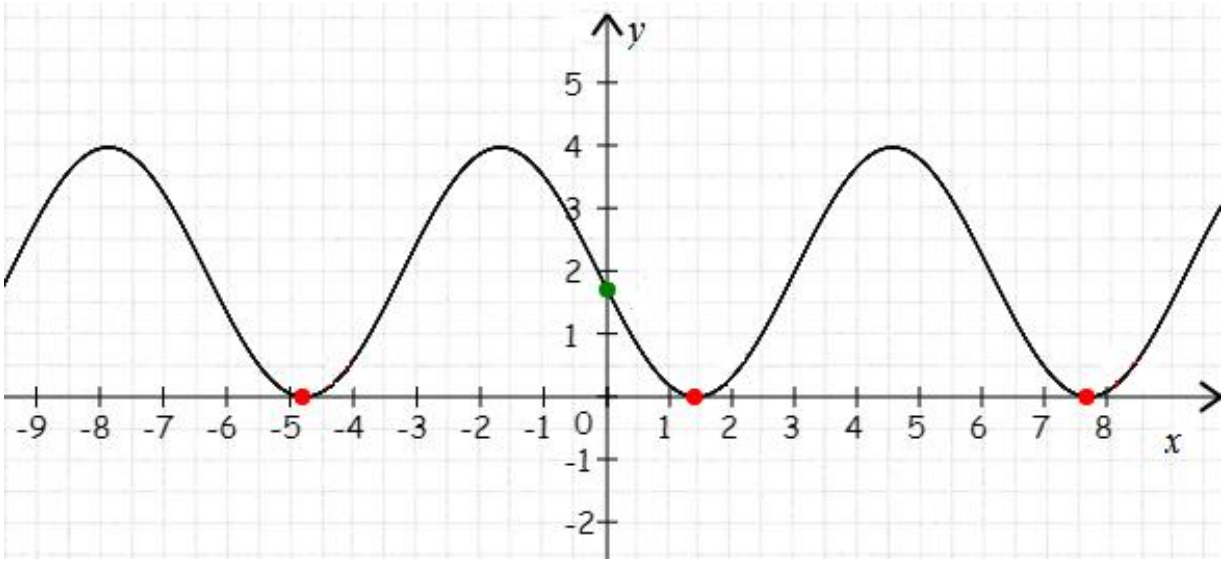


Рис. 5.6. График функции $y = 2\sin(x - 3) + 2$.

Пример. Функция $y=2^{x-1}-2$ (рис. 5.7) является неограниченной, так как при удалении аргумента x от начала координат вправо, значение функции $y=f(x)$ стремится к бесконечности.

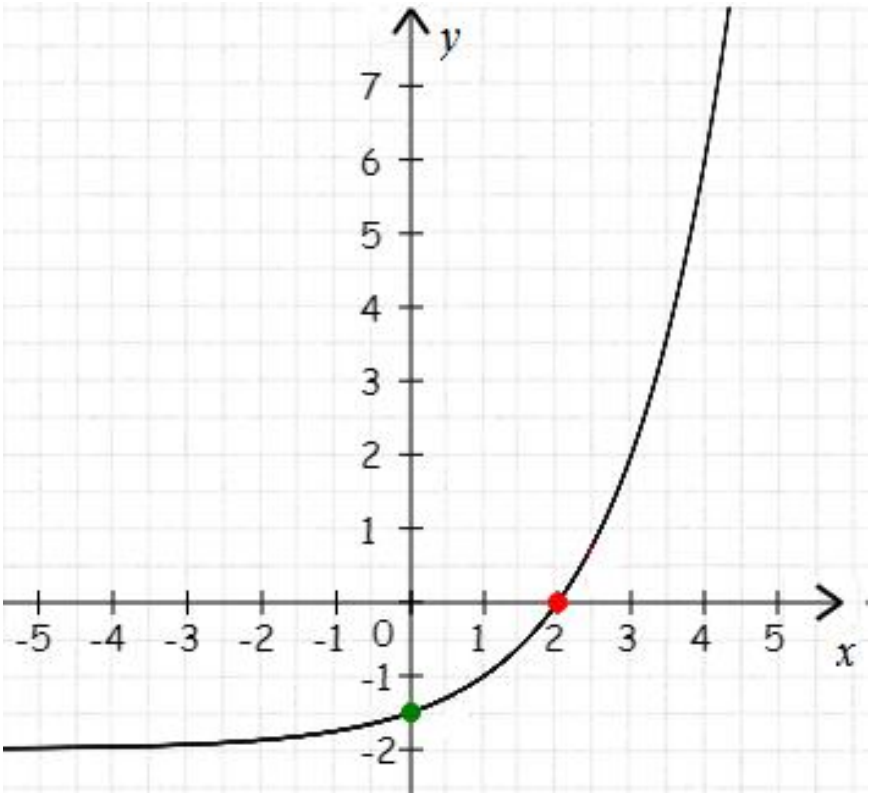


Рис. 5.7. График функции $y=2^{x-1}-2$.

5.3. Классификация функций

5.3.1. Явные и неявные функции

Функция $y=f(x)$ называется *явной*, если она задана равенством, в которой правая часть не содержит зависимой переменной. В противном случае функцию называют *неявной*. Часто неявная функция задается уравнением $F(x,y)=0$ *F(x,y)=0*, не разрешенным относительно зависимой переменной.

Пример. Функция $x^2- y+3x=0$ задана неявно. Однако после преобразований данную функцию можно получить в явном виде. Если оставить переменную y слева от знака равенства, а остальные слагаемые перенести вправо и умножить уравнение на -1, то получим выражение функции в явном виде: $x^2- y+3x=0$.

5.3.2. Обратные функции

Пусть $y = f(x)$ является явной функцией от независимой переменной *x*, определенной на множестве *X* с областью значений *Y*. Поставим в соответствие каждому значению y из множества Y единственное значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве *Y* с областью значений *X*, называется *обратной*.

Однако для обратных функций приняты традиционные обозначения: y для функции и x для аргумента, поэтому вместо $x = \varphi(y)$ пишут $y = \varphi(x)$.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример. Для функции $y = 3^x$ обратной будет функция $y = \log_3 x$.

Изобразим графики взаимно обратных функций $y = 3^x$ и $y = \log_3 x$ на одной координатной плоскости (рис. 5.8). Из рисунка видно, что графики взаимно обратных функций $y = 3^x$ и $y = \log_3 x$ симметричны относительно прямой $y = x$.

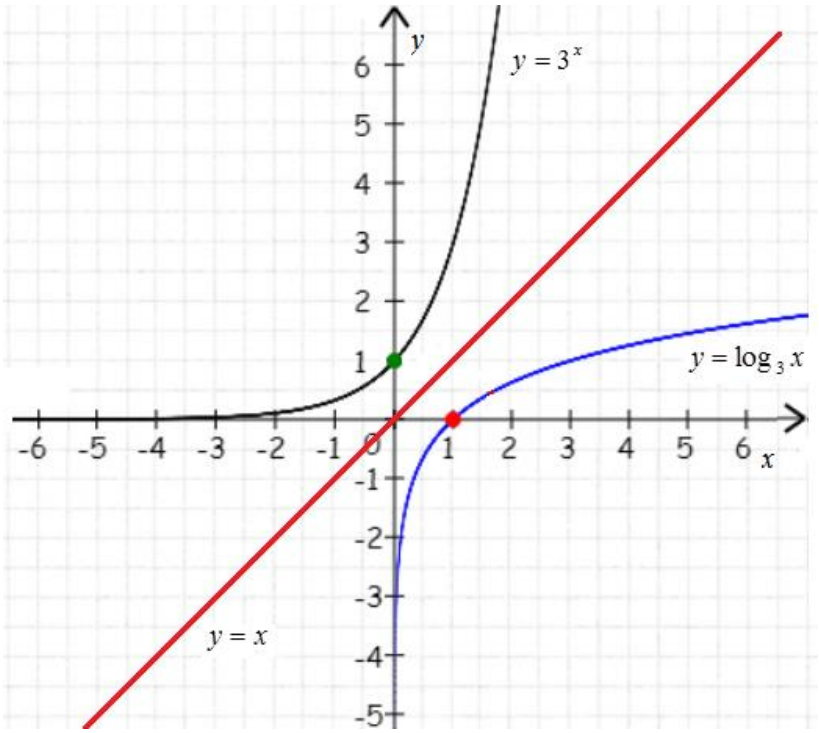


Рис. 5.8. Графики функций $y = 3^x$ и $y = \log_3 x$.

5.3.3. Сложные функции

Пусть $y = f(u)$ есть функция от переменной *u,* определенной на множестве *U* с областью значений *Y,* а переменная *u* в свою очередь является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной *x,* определенной на множестве *X* с областью значений *U***.** Тогда заданная на множестве *X* функция $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* (*композицией функций*).

Пример. Функция $y = \cos(2x - 5)$ является сложной функцией, где $y = \cos(u)$, а $u = 2x - 5$.

Из простых функций новые сложные функции могут быть получены двумя способами при помощи *алгебраических действий* и *операций образования сложной функции*.

5.3.4. Понятие элементарной функции

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются *элементарными*.

Пример. Функция $y = \left(\frac{\sin(x^3 - \cos 5x)}{\sqrt{\lg(4x - 2)}} \right)^{3x}$ является элементарной функцией.

Пример. Функция $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{24}{x^4} + \ldots + \frac{n!}{x^n} + \ldots$ элементарной функцией не является, так как она построена с помощью бесконечного числа алгебраических действий.

Все элементарные функции можно разделить на два класса: алгебраические и неалгебраические. На рисунке 5.9. представлена классификация элементарных функций.

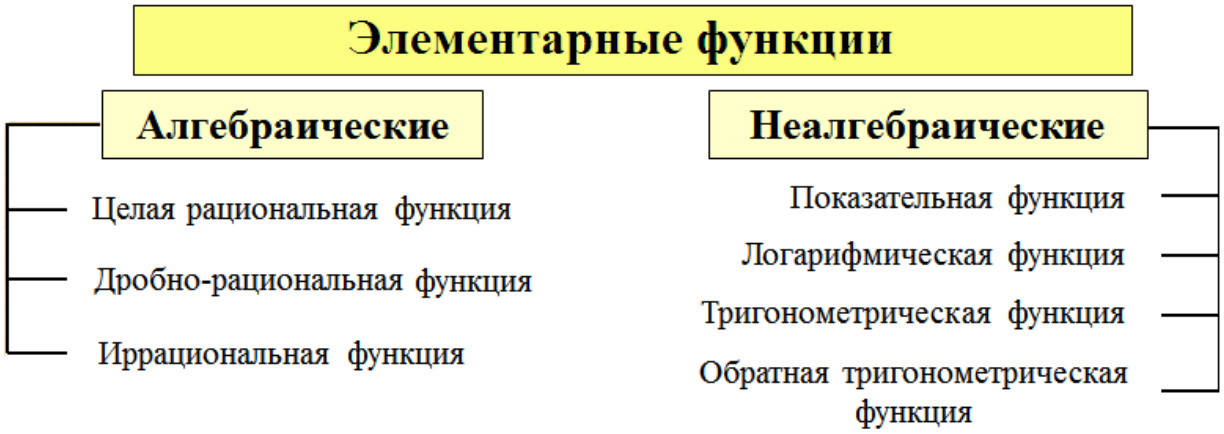


Рис. 5.9. Классификация элементарных функций.

Элементарная функция вида $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ называется *целой рациональной* функцией.

Пример. Функция $y = 2x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 12x - 17$ является целой рациональной функцией.

Элементарная функция вида $y = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ называется *дробно-рациональной* функцией.

Пример. Функция $y = \dfrac{5x^3 - 6x}{x^2 + 2x - 3}$ является дробно-рациональной функцией.

Если для образования функции использована операция извлечения корня какой-либо степени, то такая функция называется *иррациональной алгебраической* функцией.

Пример. Функции $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = (7x - 1)^{\frac{3}{5}}$ являются иррациональными алгебраическими функциями.

Функции, составленные из алгебраических функций, с помощью алгебраических операций или путем образования сложных функций также будут алгебраическими.

Пример. Функция $y = \dfrac{x\sqrt[7]{1-x^2}}{\left(\dfrac{x^4-2}{2x+3}\right)^{\frac{2}{5}}}$ является алгебраической функцией.

К неалгебраическим функциям относятся показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также сложные функции их содержащие.

Пример. Показательная функция $y = 2^{3x-5}$, логарифмическая функция $y = \log_5(5x^2 - 3x + 6)^3$, тригонометрическая функция $y = 6\sin^2(3x-4)$ и обратная тригонометрическая функция $y = arctg(x^2 - 1)$ являются неалгебраическими функциями.

Элементарные функции, содержащие хотя бы одну из неалгебраических функций, также являются неалгебраическими.

Пример. Дробная функция $y = \dfrac{3^{2x+2} + x^4}{\sin^2 5x}$ является неалгебраической функцией.

5.4. Понятие предела функции

5.4.1. Предел числовой последовательности

Если по некоторому закону каждому натуральному числу *n* поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{a_n\}$: $a_1; a_2; \ldots; a_n, \ldots$.

Определение. Числа $a_1; a_2; \ldots; a_n$ называют *членами* последовательности, а число a_n – *общим* или *n-м членом* данной последовательности.

Пример. Члены арифметической прогрессии: –6, –4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, … образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = -6 + 2(n-1)$.

Пример. Члены геометрической прогрессии: -256, 64, -16, 4, -1, 0,125, … образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = -256 \cdot (-0{,}25)^{n-1}$.

Определение. Число *A* называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε > 0

найдется такой номер N (зависящий от ε, $N=N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ верно неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается: $\lim a_n = A$.

Пример. Члены геометрической прогрессии: 8, 4, 2, 1, 0,5, 0,25, 0,125, … образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = 8 \cdot 0{,}5^{(n-1)}$.

Предел этой числовой последовательности равен нулю.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Пример. Предел числовой последовательности 8, 4, 2, 1, 0,5, 0,25, 0,125, …, члены которой образуют геометрическую прогрессию, равен нулю, следовательно, числовая последовательность будет сходящейся.

Пример. Числовая последовательность –6, –4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, …, члены которой образуют арифметическую прогрессию, не имеет предела, следовательно, числовая последовательность будет расходящейся.

Пример. Числа 1, 2, 6, 24, 120, 720, …, образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = n!$ не имеющую предела, следовательно, числовая последовательность будет расходящейся.

5.4.2. Предел функции в бесконечности

С понятием предела числовой последовательности $a_n=f(n)$ тесно связано понятие предела функции $y=f(x)$ в бесконечности. Если в первом случае переменная n, возрастая, принимает лишь целые значения, то во втором случае переменная x, изменяясь, принимает любые значения.

Определение. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ найдется такое положительное число $S>0$ (зависящее от ε; $S=S(\varepsilon)$), что для всех x, таких, что $|x|>S$, верно неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Рассмотрим геометрический смысл предела функции в бесконечности (рис. 5.10).

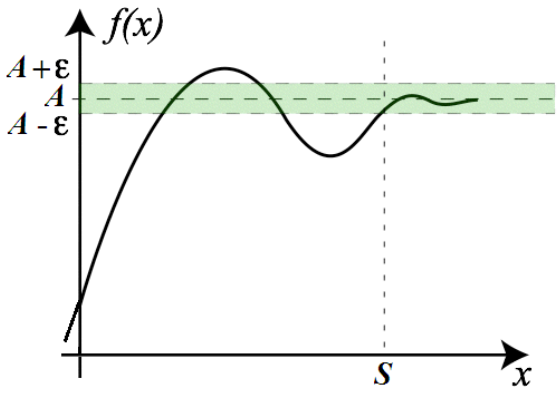


Рис. 5.10. Геометрический смысл предела функции в бесконечности.

Определение. Число A есть предел функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $S>0$, что для всех x, таких, что $|x|>S$, соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в полосе $A-\varepsilon<y<A+\varepsilon$, какой бы узкой эта полоса ни была.

Пример. Найдем предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+11}{x+5}$.

Для нахождения предела разделим числитель дроби на знаменатель и выделим целую часть. В итоге получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+11}{x+5}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x+5}\right).$$

Графиком этой функции является гипербола $y=\dfrac{1}{x}$, смещенная на 5 единиц влево и 2 единицы вверх (рис. 5.11).

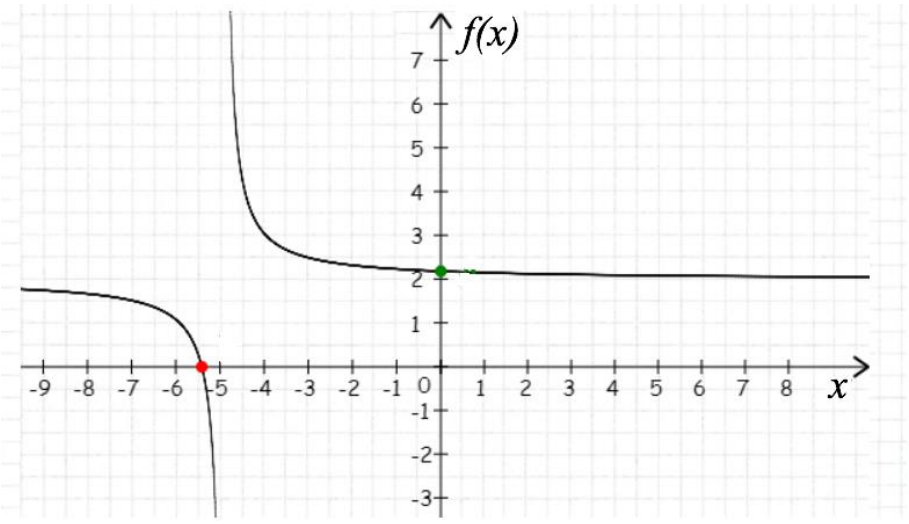


Рис. 5.11. График функции $f(x)=2+\dfrac{1}{x+5}$.

Следовательно, при $x\to\infty$ значение функции будет заключаться в полосе (2-ε; 2+ε) и стремиться к двум. Таким образом,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+11}{x+5}=2.$$

5.4.3. Предел функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ найдется такое положительное число $\delta>0$ (зависящее от ε; $\delta=\delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Этот предел функции обозначается: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Рассмотрим геометрический смысл предела функции в точке (рис. 5.12).

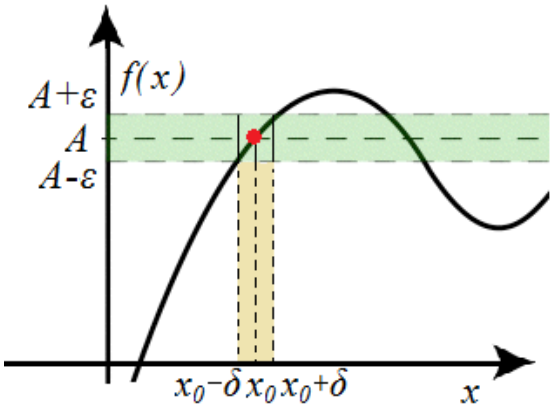


Рис. 5.12. Геометрический смысл предела функции в точке.

Число A есть предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в полосе $-\varepsilon<y<A+\varepsilon$, какой бы узкой эта полоса ни была.

Замечание 1. Определение предела не требует существование функции в самой точке x_0, ибо рассматривает значения $x\neq x_0$ в некоторой окрестности точки x_0.

Другими словами, рассматривая предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, мы предполагаем, что x стремится к x_0, но не достигает значения x_0. Поэтому наличие или отсутствие предела при $x\to x_0$ определяется поведением функции в окрестности точки x_0, но не связано со значением функции (или его отсутствием) в самой точке x_0.

Пример. Найдем предел функции $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)^3}{2x-2}+4$.

Функция в точке x=1 не существует, так как при подстановке в $f(x)$ единицы знаменатель дроби обращается в ноль. В окрестности точки x=1 и слева и справа от точки x=1 функция существует, а числитель и знаменатель дроби можно сократить на выражение $x-1$. Приведя подобные слагаемые, получим:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)^3}{2x-2}+4=\lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)^2}{2}+4=\lim_{x\to 1} \frac{-(x^2-2x+1)+8}{2}=\lim_{x\to 1} \frac{-x^2+2x+7}{2}.$$

Таким образом, для всех значений $x\neq 1$ функцию $f(x)=\dfrac{-(x-1)^3}{2x-2}+4$ можно заменить параболой $f(x)=\dfrac{-x^2+2+7}{2}$ (рис. 5.13).

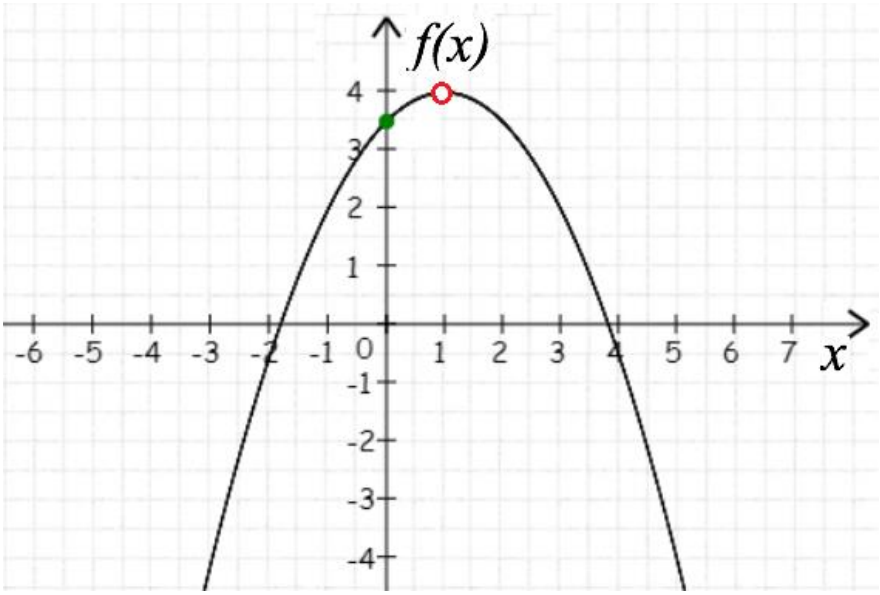


Рис. 5.13. График функции $f(x)=\dfrac{-(x-1)^3}{2x-2}+4$.

Подставив в квадратный трехчлен вместо x единицу получим число 4. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)^3}{2x-2}+4=4$

Замечание 2. Если при стремлении x к x_0 переменная x принимает лишь значения, меньшие x_0, или наоборот, лишь значения, большие x_0, и при этом функция $f(x)$ стремится к некоторому числу A, то говорят об односторонних пределах функции $f(x)$ соответственно слева и справа:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)$$ – левосторонний предел;

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$$ – правосторонний предел.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$.

Областью определения данной функции является объединение промежутков $(-\infty;-3]\cup(1;+\infty)$. В окрестности точки $x=1$ функция существует только справа от нее, следовательно, в точке $x=1$ мы можем рассматривать только правосторонний предел: $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$.

5.5. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

5.5.1. Бесконечно малые величины

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x\to x_0$ (или при $x\to\infty$), если ее предел равен нулю.

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ является бесконечно малой величиной при $x\to 2$, так как $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}x-2=0$.

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{4}{x^3}$ является бесконечно малой величиной при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3}=0$.

Зная определение предела функции при $x \to x_0$ и при $x \to \infty$, можно дать развернутое определение бесконечно малой величины.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε; $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Рассмотрим связь бесконечно малых величин с пределами функций.

Теорема 9.1. Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) предел, равный A, то ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), т.е. $f(x) = A + \alpha(x)$.

Верна и обратная теорема.

Теорема 9.2. Если функцию $f(x)$ можно представить, как сумму числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то число A есть предел этой функции при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Свойства бесконечно малых величин

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Пример. Функции $y_1 = \frac{1}{x^2}$ и $y_2 = \frac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми величинами при $x \to \infty$.

Сумма этих величин $y_1 + y_2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{x+1}{x^3}$ также является бесконечно малой величиной при $x \to \infty$.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.

Пример. Функцию $y = \frac{1}{x^3}\sin x$ при $x \to \infty$ можно представить как произведение бесконечно малой величины $\frac{1}{x^2}$ на ограниченную функцию $\sin x$, следовательно, она является бесконечно малой величиной.

3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

Пример. Функция $y = \frac{x+5}{x^3(2x+11)}$ также является бесконечно малой величиной при $x \to \infty$, так как она представляет собой частное от деления бесконечно малой величины $\frac{1}{x^3}$ на функцию $\frac{2x+11}{x+5}$, предел которой $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+11}{x+5}$ равен двум.

5.5.2. Бесконечно большие величины

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно большого положительного числа $M>0$ найдется такое положительное число $\delta>0$ (зависящее от M; $\delta=\delta(M)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x)|>M$.

Запись того, что функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, следующая:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$

Рассмотрим связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

1. Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функция $f(x)=\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Пример. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой величиной при $x \to \infty$. Тогда функция $y = x^2$ при $x \to \infty$ будет бесконечно большой величиной.

Верно и обратное утверждение.

2. Если функция *f(x)* бесконечно большая при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Пример. Функция $y = 2^x$ является бесконечно большой величиной при $x \to \infty$. Тогда функция $y = \dfrac{1}{2^x}$ при $x \to \infty$ – величина бесконечно малая.

Свойства бесконечно больших величин

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

Функция $y = \dfrac{1}{2x^2 - 18}$ является бесконечно большой величиной при $x \to 3$. Тогда функция $y = \dfrac{5\sin x}{2x^2 - 18}$ при $x \to 3$ также является бесконечно большой функцией, как произведение бесконечно большой величины $y = \dfrac{1}{2x^2 - 18}$ при $x \to 3$ на функцию $y = 5\sin x$, предел которой при $x \to 3$ отличен от нуля.

Пример. Функция $y = 3x^2 + 6x + 8$ является бесконечно большой величиной при $x \to \infty$. Произведение $y \cdot \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = \left(3x^2 + 6x + 8\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$ при $x \to \infty$ также будет бесконечно большой величиной, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$.

2. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

Пример. Функция $y = 3x^2 + 6x + 8$ является бесконечно большой величиной при $x \to \infty$, тогда $y = 3x^2 + 6x + 8 + \cos 2x$ при $x \to \infty$ является бесконечно большой величиной, так как $\cos 2x$ является ограниченной функцией.

3. Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, не равный бесконечности, есть величина бесконечно большая.

Пример. Функция $y = 3x^2 + 6x + 8$ является бесконечно большой величиной при $x \to \infty$, тогда $y = \dfrac{3x^2 + 6x + 8}{\dfrac{x^2 + 3}{2x^2}}$ также бесконечно большая величина при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 3}{2x^2} \right) = \dfrac{1}{2}$.

5.5.3. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин

Пусть при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми величинами, тогда:

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем функция $\beta(x)$..

*Пример. Ф*ункция $y = \dfrac{1}{3x^2 + 6x + 1}$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем функция $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$, так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{3x^2 + 6x + 1}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{3x^2 + 6x + 1} = 0.$$

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми величинами одного порядка.

*Пример. Ф*ункции $y = \sin 5x$ и $y = \sin x$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{5x}}\lim_{x\to 0}\frac{5\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{x}}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=5.$$

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми величинами. Эквивалентность бесконечно малых величин $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Пример. Функции $y=\sin x$ и $y=x$ являются при $x\to 0$ эквивалентными бесконечно малыми, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

4. Для оценки порядков двух бесконечно малых величин можно придерживаться следующего правила.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной n-го порядка относительно $\beta(x)$.

Пример. Функция $y=1-\cos x$ является при $x\to 0$ бесконечно малой второго порядка относительно бесконечно малой величины $y=x$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Аналогичные правила сравнения можно использовать и для бесконечно больших величин.

Пример. Функция $y=x-2$ является бесконечно большой более низкого порядка, чем $y=2x^4-x+7$ при $x\to\infty$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x^4-x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x}{2x^3-1+7/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3-1}=0.$$

Пример. Функции $y = x^2 + 3$ и $y = 5x^2 - 4x + 5$ при $x \to \infty$ являются бесконечно большими величинами одного порядка, так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{5x^2-4x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+3/x^2}{5-4/x+5/x^2} = \frac{1}{5}.$$

Функция $y = x^3 - 4$ является бесконечно большой третьего порядка по отношению к бесконечно большой $y = 2x$ при $x \to \infty$, так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4}{(2x+1)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4}{8x^3+12x^2+6x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-4/x^3}{8+12/x+6/x^2+1/x^3} = \frac{1}{8}.$$

5.6. Основные теоремы о пределах

5.6.1. Свойства пределов

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, для которых существует предел при $x \to x_0$ (или при $x \to \infty$): $\lim\limits_{x\to x_0\,(\infty)} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0\,(\infty)} \varphi(x) = B$, тогда:

1. Функция не может иметь более одного предела.

2. Предел алгебраической суммы (разности) конечного числа функций равен такой же сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0\,(\infty)} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0\,(\infty)} f(x) \pm \lim_{x\to x_0\,(\infty)} \varphi(x) = A \pm B.$$

Пример. Если $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$, а $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, то предел суммы функций $\frac{\sin x}{3x} + \frac{1-\cos x}{x^2}$ при $x \to 0$ будет равен

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x} + \frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, в частности:

$$\lim_{x\to x_0\,(\infty)} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0\,(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0\,(\infty)} \varphi(x) = A \cdot B.$$

А в случае константы:

$$\lim_{x\to x_0\,(\infty)} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x\to x_0\,(\infty)} f(x) = c \cdot A.$$

Пример. Предел произведения $\frac{\sin x}{3x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$ при $x\to 0$ равен:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0\,(\infty)}\frac{f(x)}{\cdot\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0\,(\infty)}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0\,(\infty)}\varphi(x)}=\frac{A}{B}\ \ (B\neq 0).$$

Пример. Предел частного $\frac{\sin x}{3x}:\frac{1-\cos x}{x^2}$ при $x\to 0$ равен:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x}:\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}:\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$$

5. Предел показательно-степенной функции равен пределу основания, возведенного в степень предела степени:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]=\lim_{x\to a}f(x)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=A^B.$$

Пример. Предел показательно-степенной функции $\left(\frac{\sin x}{3x}\right)^{\frac{1-\cos x}{x^2}}$ при $x\to 0$ равен:

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{3x}\right)^{\frac{1-\cos x}{x^2}}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

6. Если $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, то предел сложной функции $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

Пример. Пусть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)}{\dfrac{3x}{x^2-1}}=\frac{1}{3}.$$

5.6.2. Признаки существования пределов

С помощью признаков существования предела можно выяснить вопроса о существовании предела использовать определения предела, сформулированные выше, не всегда удобно.

Теорема 9.3. Если числовая последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Пример. Числа 257, 65, 17, 5, 2, 1,125, … образуют числовую последовательность с общим членом $a_n = 256\cdot 0{,}25^{n-1}+1$. Очевидно, данная последовательность монотонно убывает и ограничена числом 1. Следовательно, она имеет предел равный единице.

Теорема 9.4. Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при $x\to\infty$) функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел A при $x\to x_0$ (или при $x\to\infty$), то функция $f(x)$ имеет тот же предел A.

Пример. Функция $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ заключена между функциями $y=\dfrac{1}{x}$ и $y=0$, имеющими при $x\to\infty$ одинаковый предел, равный нулю, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0.$$

5.6.3. Замечательные пределы

На практике при вычислении пределов применяются следующие пределы, которые принято называть *замечательными*:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*первый замечательный предел*);

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, (*второй замечательный предел*)

где $e = 2{,}71828182\ldots$.

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{5x}$.

Для нахождения предела функции числитель и знаменатель дроби умножим на 3 и вынесем множитель $\dfrac{6}{5}$ за знак предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 2\sin 3x}{5\cdot 3x} = \frac{6}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}.$$

Теперь наш предел полностью соответствует первому замечательному пределу, следовательно, все выражение будет равно 1,2:

$$\frac{6}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{6}{5}\cdot 1 = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{2x}$.

Для нахождения предела функции числитель и знаменатель дроби умножим на 5 и вынесем множитель $\dfrac{5}{2}$ за знак предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5tg5x}{5\cdot 2x} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{5x}.$$

Учитывая, что $tg5x = \dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}$ и $\cos 0 = 1$ получим:

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{5x} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x\cos 5x} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x\cdot 1} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}.$$

Следовательно, значение предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{2x}$ будет равно $\dfrac{5}{2}$.

Пример. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{6x}$.

Преобразуем функцию, предел которой необходимо найти:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x\cdot 4}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x}\right)^{4}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}4}.$$

Выражение в скобках является вторым замечательным пределом и равно *e*, а предел $\lim\limits_{x\to\infty}4$ равен четырем. Учитывая это, получим значение предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{6x}=e^{4}.$$

5.7. Непрерывность функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в точке x_0, имеет конечный предел функции при $x\to x_0$ и этот предел равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Функция является непрерывной на интервале или сегменте, если она непрерывна в каждой точке исследуемой области.

Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если эта функция в данной точке не является непрерывной.

Если существуют три конечных предела: $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$, и хотя бы одно из значений пределов не равно другим, то точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*.

В случае, если левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой: $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$, но не равны $f(x)$, то x_0 называется *устранимой точкой разрыва.*

Пример. Для функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ значение аргумента $x=0$ является устранимой точкой разрыва, так как значение функции в точке $x_0=0$ не определено, а $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

В случае, если левосторонний и правосторонний пределы не равны между собой, то точка разрыва называется *неустранимой*.

Во всех остальных случаях, когда хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не определен или равен бесконечности, точки разрыва считаются точками разрыва второго рода.

Пример. Для функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ значение аргумента $x = 2$ является точкой разрыва второго рода, так как левосторонний предел функции в точке $x = 2$ равен $+\infty$, а правосторонний $-\infty$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие функции одной переменной. Какое соответствие можно назвать функцией?
2. Перечислите способы задания функций. Какой способ задания функции вы считаете наиболее эффективным?
3. Как определяется область определения функции? Что является множество значений функции одной переменной?
4. Какие основные свойства функций одной переменой вы знаете?
5. Какие особенности имеют графики четных и нечетных функций? Начертите графики четных и нечетных функций.
6. Как вы понимаете понятия «монотонность» и «ограниченность». Приведите примеры монотонных и ограниченных функций.
7. Каким образом моно определить периодичность функции и вычислить ее период?
8. Чем отличаются явные функции от неявных? Приведите примеры записей таких функций.
9. Дайте понятия сложной и обратной функции. Приведите примеры сложных и обратных функций.
10. Какие функции называются элементарными? Приведите классификацию элементарных функций.

11. Дайте определение пределу числовой последовательности. Какие числовые последовательности являются сходящимися, а какие расходящимися?

12. Что представляет собой предел функции в бесконечности. Каков геометрический смысл предела функции в бесконечности?

13. Дайте определение предела функции в точке. Каков геометрический смысл предела функции в точке? Чем отличаются левосторонние и правосторонние пределы?

14. Перечислите основные свойства бесконечно малых величин. С помощью примеров проиллюстрируйте перечисленные свойства.

15. Перечислите основные свойства бесконечно больших величин. С помощью примеров проиллюстрируйте перечисленные свойства.

16. Какая связь существует между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

17. Какие признаки сравнения бесконечно малых и бесконечно больших величин вы знаете?

18. Перечислите изученные признаки существования предела.

19. На примерах продемонстрируйте 1-й и 2-й замечательные пределы.

20. Какие функции называются непрерывными? Приведите классификацию точек разрыва функции.

Глава 6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Дифференцирование функций является одной из важнейших задач математики. В различных областях научных исследований, инженерных и производственных расчетах, производная функции используется всюду для изучения неравномерного протекания процессов. Это может быть механическое движение, ток в электрической цепи, химические реакции, радиоактивный распад вещества, факторы социальных, экономических явлений в человеческом обществе.

В данной главе мы предложим определение производной, ее геометрический смысл, познакомимся с понятием дифференцирования функции, рассмотрим основные формулы дифференцирования, правила дифференцирования, методы нахождения производной сложной функции, обратной функции, алгоритмы нахождения производных высших порядков. Для нахождения пределов функций, представляющих неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, познакомимся с правилом Лопиталя.

Также мы рассмотрим методы нахождения нулей функции с помощью графической и аналитической локализации корней, введем понятие асимптот функции, изучим принципы определения вертикальных и наклонных асимптот, предложим алгоритмы исследования функций с помощью первой и второй производной, изучим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции, существования экстремальных значений, выпуклости вогнутости функции, точек перегиба, определим общую схему исследования функций и предложим примеры исследования конкретных функций.

6.1. Основные понятия дифференциального исчисления

6.1.1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X. Возьмем произвольную точку $x \in X$ из области определения функции и дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция $y = f(x)$ получит приращение:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{6.1}$$

Определение. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6.2}$$

Обычно производная функции $y = f(x)$ обозначается следующим образом: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Пример. Используя определение производной (10.2) найдем производную функции $f(x) = 3x^2$.

Определим сначала приращение функции (10.1) в произвольной точке x:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 - 3x^2 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3x^2 =$$
$$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

По формуле (5.2) найдем производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) = 6x.$$

Мы видим, что по определению (6.2) найти производную даже очень простой функции $f(x) = 3x^2$ оказалось достаточно трудоемко.

6.1.2. Геометрический смысл производной

Пусть на плоскости *Oxy* дана непрерывная кривая *y=f(x)* и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0;y_0)$. Дадим аргументу x_0 приращение Δx (рис. 6.1) и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0;f(x_0))$ к точке $M_1(x_0+\Delta x;f(x_0+\Delta x))$. Проведем секущую M_0M_1.

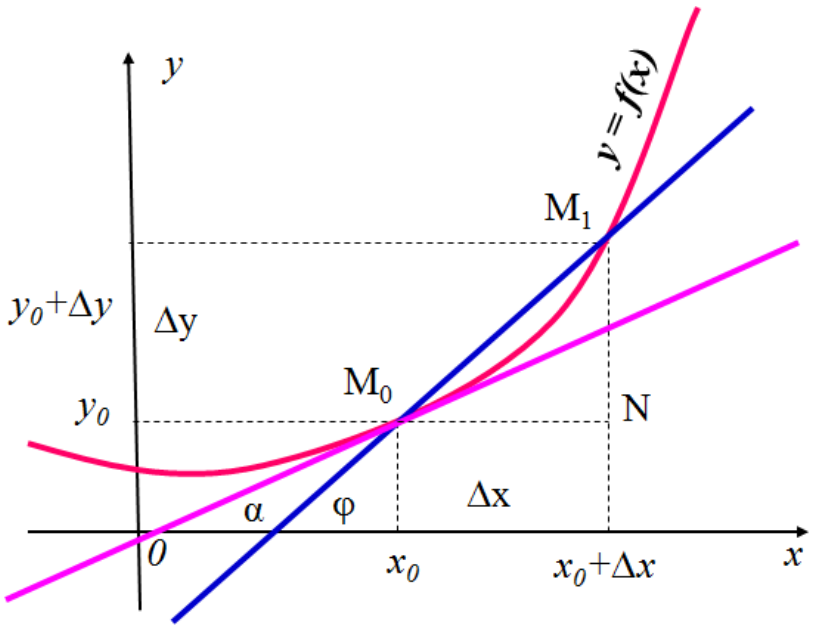


Рис. 6.1. Геометрический смысл производной.

Под касательной к кривой $y=f(x)$ в точке M_0 будем понимать предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 имеет вид:

$$y - f(x_0) = k\,(x - x_0)\,.$$

Угловой коэффициент или тангенс угла φ наклона секущей $k_{M_1M_0}$ может быть найден из ΔM_0M_1N: $k_{M_1M_0} = tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, тогда переходя к предельному положению прямой M_0M_1 при $\Delta x \to 0$, получим тангенс угла касательной к функции $y=f(x)$ в точке x_0:

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)\,. \qquad (6.3)$$

Таким образом, производная равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в точке определения производной.

6.2. Дифференцирование функций

Дифференцировать по определению функции, даже очень простые – довольно трудоемкое занятие. Гораздо эффективнее использовать готовые формулы для нахождения производных элементарных функций и правила дифференцирования.

6.2.1. Основные формулы дифференцирования

Приведем готовые формулы для дифференцирования основных элементарных функций:

$$\left(x^m\right)' = mx^{m-1} \qquad \left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \qquad \left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

С помощью основных формул дифференцирования можно найти только производные основных функций.

Пример. Найдем производную функции $y = x^4$.

Для нахождения производной воспользуемся формулой $\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$.

$$y' = \left(x^4\right)' = 4x^{4-1} = 4x^3.$$

Пример. Найдем производную функции $y = \log_7 x$.

Сейчас воспользуемся формулой $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$.

$$y' = \left(\log_7 x\right)' = \frac{1}{x \ln 7}.$$

6.2.2. Правила дифференцирования

Для нахождения производных можно также использовать основные правила дифференцирования:

1. Производная постоянной равна нулю:

$$C' = 0.$$

Пример. Найдем производную функции $y = -20$.

Используя свойство $C' = 0$, получим

$$y' = (-20)' = 0 .$$

2. Производная аргумента равна 1:

$$x' = 1 .$$

3. Производная алгебраической суммы (разности) конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме (разности) производных этих функций:

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v' .$$

Пример. Найдем производную функции $y = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 6$.

Применяя свойство производной алгебраической суммы (разности) конечного числа дифференцируемых функций, получим:

$$y' = (x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 6)' = (x^4)' + (3x^3)' - (5x^2)' + (2x)' - (6)' =$$
$$= 4x^3 + 9x^2 - 10x + 2 .$$

Пример. Найдем производную функции $y = 3x^2 + \sin x$.

$$y' = \left(3x^2 + \sin x\right)' = \left(3x^2\right)' + \left(\sin x\right)' = 3 \cdot 2x + \cos x = 6x + \cos x .$$

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$\left(uv\right)' = u'v + uv' .$$

Пример. Найдем производную функции $y = \cos x \cdot \log_3 x$.

Применяя свойство производной произведения двух дифференцируемых функций, получим:

$$y' = (\cos x \cdot \log_3 x)' = (\cos x)' \cdot \log_3 x + \cos x \cdot (\log_3 x)' =$$

$$= -\sin x \cdot \log_3 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 3} .$$

Пример. Найдем производную функции $y = \left(3x^2 + 5\right)e^x$.

$$y' = \left(\left(3x^2 + 5\right)e^x\right)' = \left(3x^2 + 5\right)' \cdot e^x + \left(3x^2 + 5\right) \cdot \left(e^x\right)' = 6xe^x + \left(3x^2 + 5\right)e^x =$$

$$= \left(3x^2 + 6x + 5\right)e^x .$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $\left(cu\right)' = cu'$.

Пример. Найдем производную функции $y = 3x^5$.

Используя следствие 1, получим:

$$y' = \left(3x^5\right)' = 3\left(x^5\right)' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4 .$$

Следствие 2. Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные.

Пример. Найдем производную функции $y = x^2 \cdot \sin x \cdot 3^x$.

Согласно следствию 2 производная произведения трех функций *u*, *v* и *w* равна:

$$\left(uvw\right)' = u'vw + uv'w + uvw' .$$

Учитывая это, найдем y':

$$y' = \left(x^2 \cdot \sin x \cdot 3^x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x \cdot 3^x + x^2 \cdot \left(\sin x\right)' \cdot 3^x + x^2 \cdot \sin x \cdot \left(3^x\right)' =$$

$$2x \cdot \sin x \cdot 3^x + x^2 \cdot \cos x \cdot 3^x + x^2 \cdot \sin x \cdot 3^x \ln 3 .$$

5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} .$$

Пример. Найти производную функции $y = \left(\frac{3x^2 - 5}{x}\right)'$.

$$y' = \left(\frac{3x^2 - 5}{x}\right)' = \frac{(3x^2 - 5)' \cdot x - (3x^2 - 5) \cdot x'}{x^2} = \frac{6x \cdot x - (3x^2 - 5) \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 3x^2 + 5}{x^2} = \frac{3x^2 + 5}{x^2} .$$

Пример. Найти производную функции $y=\dfrac{\arcsin x}{3x-2}$.

$$y'=\left(\frac{\arcsin x}{3x-2}\right)'=\frac{(\arcsin x)'\cdot(3x-2)-\arcsin x\cdot(3x-2)'}{(3x-2)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(3x-2)-\arcsin x\cdot 3}{(3x-2)^2}=\frac{3x-2-3\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{(3x-2)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

6.3. Методы нахождения производных

6.3.1. Производная сложной функции

Пусть переменная *y* есть функция от переменной *u* (*y=f(u)*), а переменная *u* в свою очередь есть функция от независимой переменной *x*, т.е. задана *сложная функция y=f[φ(x)]*.

Теорема 6.1. Если *y=f(u)* и *u=φ(x)* – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной *x*, т.е.

$$y'=f'(u)\cdot u'(x).$$

Пример. Найдем производную сложной функции $y=(\sqrt{x}+5)^3$.

$$y'=\left((\sqrt{x}+5)^3\right)'=3(\sqrt{x}+5)^2\cdot(\sqrt{x}+5)'=3(\sqrt{x}+5)^2\cdot(\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2})=\frac{3(\sqrt{x}+5)^2}{2\sqrt{x}}.$$

Пример. Найдем производную функции $y=\ln\left(x^2+3x-1\right)$.

$$y'=\left(\ln\left(x^2+3x-1\right)\right)'=\frac{1}{x^2+3x-1}\left(x^2+3x-1\right)'=\frac{2x+3}{x^2+3x-1}.$$

6.3.2 Производная обратной функции

Теорема 6.2. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Пример. Для функции $y = \sin x$ обратной является функция $y = \arcsin x$. Используя формулу производной синуса $(\sin x)' = \cos x$ и выше приведенную теорему, найдем производную для арксинуса:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

Поскольку мы имеем дело с обратной функцией $y = \arcsin x$, то после подстановки этого выражения вместо переменной *y* производная примет вид:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6.3.3. Производные высших порядков

Если производную функции $y' = f'(x)$ еще один раз продифференцировать, то полученная функция будет называться второй производной функции и обозначается y'' или $f''(x)$ Большинство функций можно дифференцировать неоднократно. Если продифференцировать вторую производную функции, то получим третью производную, продолжая дифференцирование найдем четвертую производную, пятую, …, *n*-ую:

$$f''(x) = (f'(x))',\ f'''(x) = (f''(x))',\ f^{(4)}(x) = (f'''(x))',\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = (f)^{(n-1)}(x))'.$$

Начиная со второго порядка производные называются производными высших порядков.

Пример. Найти вторую производную $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = \left(8x^3 - 3x^2 + 4x - 5\right)' = 24x^2 - 6x + 4.$$

Пример. Найти седьмую производную функции $y = \sin 2x$.

Последовательно дифференцируя функцию $y = \sin 2x$ семь раз, получим результат:

$$\left(\sin 2x\right)^{(7)} = 2\left(\cos 2x\right)^{(6)} = -4\left(\sin 2x\right)^{(5)} = -8\left(\cos 2x\right)^{(4)} = 16(\sin 2x)''' =$$

$$= 32(\cos 2x)'' = -64(\sin 2x)' = -128\sin 2x.$$

6.4. Правило Лопиталя

Часто на практике требуется найти предел функций, аналитическое выражение которых представимо в виде дроби, содержащей в числителе и знаменателе одновременно бесконечно большие или бесконечно малые величины.

В этих случаях предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ часто называют неопределенностью вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, и неопределенностью вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Для упрощения нахождения предела отношения двух функций можно воспользоваться правилом Лопиталя (1661 – 1704).

Правила Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших дифференцируемых функций равен пределу отношения их производных.

Таким образом, если имеется неопределенность вида: $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$,

тогда: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример. Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Решая данную задачу, с помощью Правила Лопиталя мы получим доказательство 1-го замечательного предела. При стремлении аргумента к нулю числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно малые величины. Применяя Правило Лопиталя, продифференцируем одновременно числитель и знаменатель дроби, а после преобразования получим ответ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример. Найдем предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{x^3+4x^2}$.

Условия задачи также позволяют применить Правило Лопиталя, поскольку здесь имеется неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Для нахождения пределов можно использовать Правило Лопиталя неоднократно, если после каждого дифференцирования будем получать неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. В нашем случае Правило Лопиталя необходимо применить три раза.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-1}{x^3+4x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+1}{3x^2+8x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{6x+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{6}=2.$$

Пример. Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

В этом примере также необходимо использовать Правило Лопиталя три раза, поскольку после каждого дифференцирования числителя и знаменателя дроби получается неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]==\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

При стремлении аргумента к нулю, числитель и знаменатель дроби также будут стремиться к нулю. Следовательно, получается неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используя правило Лопиталя один раз получим значение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to 0}e^x=1.$$

Пример. Найдем предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

При стремлении аргумента к бесконечности, числитель и знаменатель дроби также будут представлять бесконечно большие величины. Применив правило Лопиталя получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Пример. Найдем предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$.

В этом примере мы также имеем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Однако, после применения правила Лопиталя первый, второй, третий, … разы мы будем получать в числителе и знаменателе дроби бесконечно большие величины. Таким образом, правило Лопиталя придется применять ровно *n* раз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

6.5. Локализация корней функции

Локализация корней уравнения $f(x)=0$ производится графическим или аналитическим способами.

6.5.1 Графическая локализация корней

Если несложно построить эскиз графика функции, на котором можно с уверенностью определить сегменты на каждом из которых функция $f(x)$ принимает только одно нулевое значение, то следует воспользоваться графическим способом. В этом случае размер сегментов существенного значения не имеет. Если по графику мы видим, что на отрезке [-100; 100] функция пересекает ось абсцисс только один раз, и неважно в каком месте, следовательно, на выбранном отрезке локализован 1 корень. Однако, если мы выберем меньший сегмент, например, [-1; 2], то впоследствии при уточнении

корня, будет потрачено меньше времени и вычислительных ресурсов на получение результата с заданной точностью.

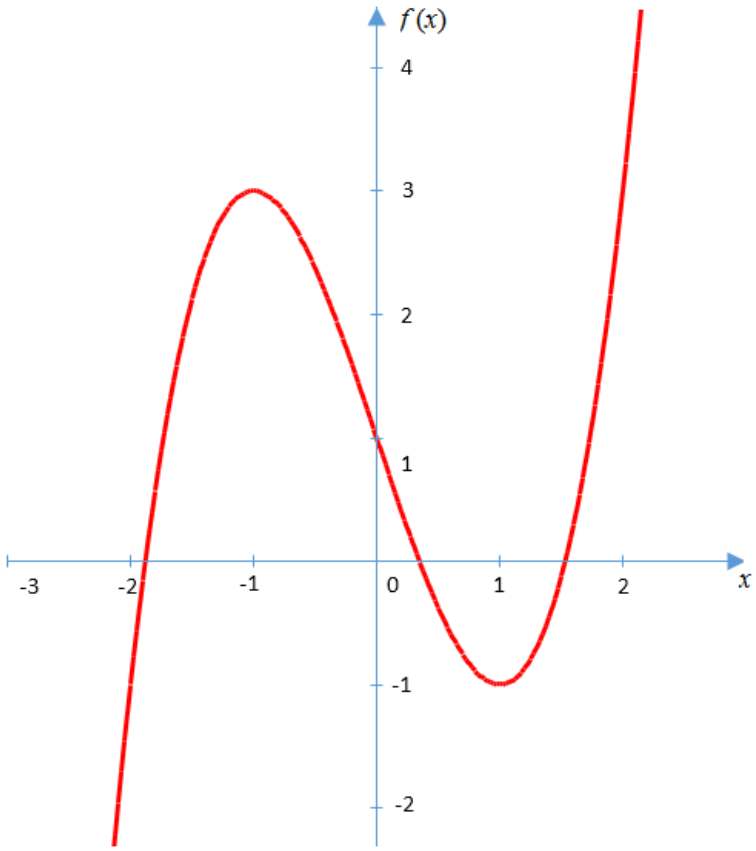


Рис. 6.2 График функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Пример. Локализуем корни уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$. Построим эскиз графика функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Зная, что функция представляет собой кубическую параболу и может иметь от одного до 3-х различных корней, достаточно найти ее значения в некоторых точках, а затем дорисовать кривую, определяющую график функции (рис. 6.2).

Из графика видно, что первый корень находится на промежутке [–2; –1], второй – на отрезке [0; 1], а третий – на отрезке [1; 2]. Такая точность отделения корней вполне удовлетворяет первому этапу локализации корней.

Но графического способа есть ряд недостатков. Во-первых, не всегда без предварительного анализа можно построить график функции. Во-вторых, если корни существенно удалены друг от друга, то график будет довольно

громоздким. И, наконец, если корни достаточно близки друг к другу сложно выделить сегменты локализации.

6.5.2. Аналитическая локализация корней

Наиболее универсален аналитический способ. Исследуя функции с помощью первой производной найдем все локальные максимумы и минимумы функции $f(x)$, а затем рассчитаем значения функции в точках полученных экстремумов.

Если знаки функции $f(a)$ и $f(b)$ в соседних экстремальных точках различны, а функция непрерывна тогда она будет непрерывно возрастать или убывать на данном отрезке [*a, b*], и, следовательно, иметь на этом отрезке ровно один корень.

Пример. Локализовать корни уравнения $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$.

Найдем производную функции $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$. Получим:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 3.$$

Определим корни полученной производной $f'(x)$. Для этого решим уравнение:

$$4x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 3 = 0.$$

Вынесем множитель $x^2 - 1$ из выражений $4x^3 - 3x^2$ и $4x^2 + 3$:

$$4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0.$$

Сгруппируем полученное выражение:

$$(x^2 - 1)(4x - 3) = 0$$

В результате получим три различных корня производной $f'(x)$: $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{3}{4}$; $x_3 = 1$. Эти значения являются экстремальными точками для функции $f(x)$.

Составим таблицу знаков функции *f*(*x*):

X	$-\infty$	–1	0,75	1	$+\infty$
Sign f(x)	+	–	–	–	+

Исследуемая функция $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$ непрерывна на всей области действительных чисел, а из таблицы видно, что знаки функции *f*(*x*) в соседних экстремальных точках различны только в двух случаях. Следовательно, уравнение имеет равно два действительных корня, находящихся на промежутках: (–∞; –1] и [1; +∞).

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни. Это можно сделать, подобрав значения таким образом, чтобы знаки функции *f*(*x*) на границах интервалов были различны:

X	– 2	–1	1	2
Sign f(x)	+	–	–	+

Следовательно первый корень $x_1 \in [-2;-1]$, а второй корень $x_2 \in [1; 2]$.

6.6. Асимптоты функции

Для исследования функций часто бывает нужно знать, как ведет себя функция в окрестностях точек разрыва второго рода или при бесконечном удалении аргумента от начала координат. Решение этой проблемы можно получить, исследуя асимптоты функции.

Определение. Прямая называется *асимптотой* функции *y=f(x)*, если расстояние от точки графика функции к этой прямой стремится к нулю, при неограниченном удалении указанной точки от начала координат.

Пример. Для гиперболы асимптотами являются оси абсцисс и ординат.

Пример. Для дробно-рациональной функции $y = \dfrac{x^3 + 6x + 16}{2x^2 + 2}$ асимптотой является наклонная прямая $y = 0{,}5x + 3$ (рис 6.3).

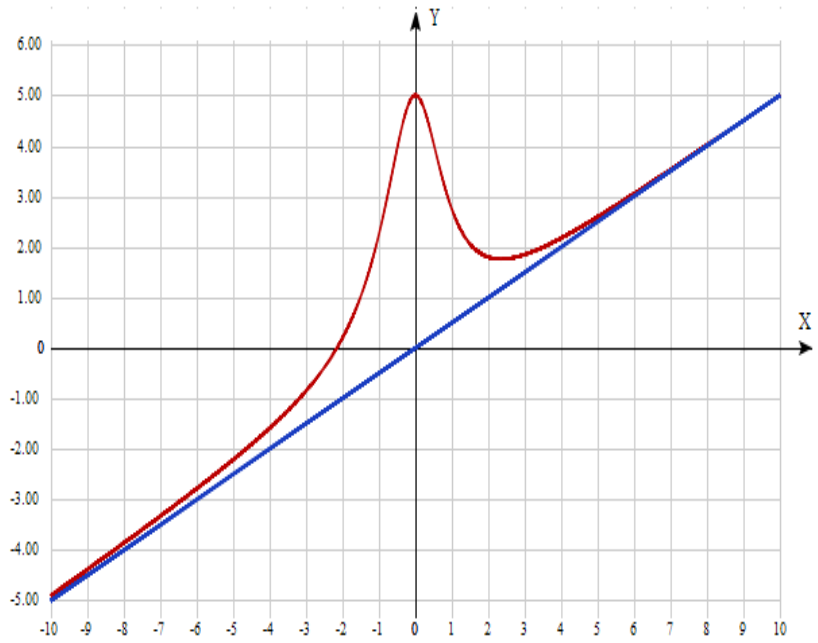


Рис. 6.3. График функции $y = \dfrac{x^3 + 6x + 16}{2x^2 + 2}$.

График функции может бесконечно приближаться к своей асимптоте справа, слева, сверху, снизу, никогда ее не пересекая при бесконечном удалении от начала координат. В некоторых случаях график функции может бесконечное множество раз пересекать свою асимптоту (рис. 6.4).

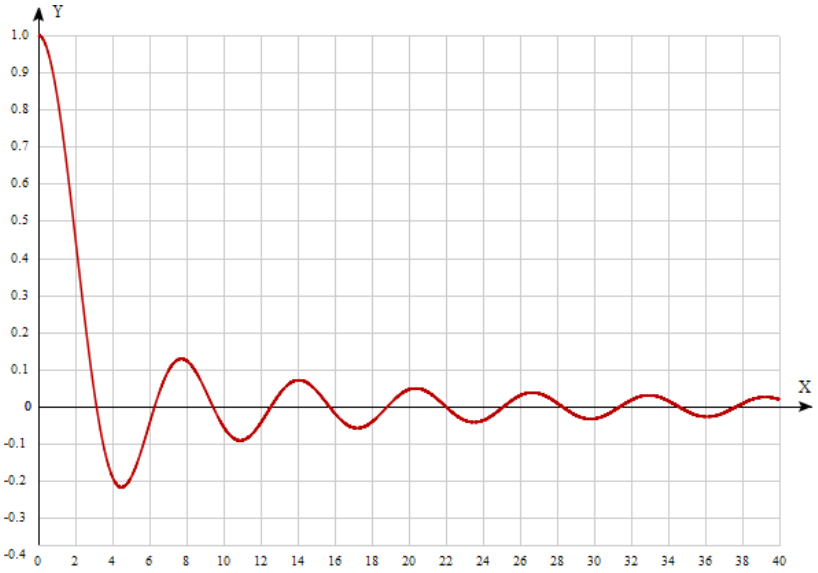


Рис. 6.4. График функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

6.6.1. Вертикальные асимптоты

Асимптоты подразделяются на вертикальные и наклонные.

Прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* функции $y=f(x)$, если существует и равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$.

Вертикальные асимптоты часто встречаются у *дробно-рациональных функций* в точках, где знаменатель равен нулю, а числитель не равен нулю (в точках разрыва второго рода). Вертикальных асимптот может быть любое количество.

Прямая не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке ***a***. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать только в *точках разрыва функции второго рода*.

Пример. Найдем вертикальную асимптоту функции $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

Функция имеет разрыв второго рода в точке $x=-1$. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{(-1-0)+1}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{(-1+0)+1}=-\infty.$$

Следовательно, прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

6.6.2. Наклонные асимптоты

Прямая $y=kx+b$ является *наклонной асимптотой* функции $y=f(x)$, если выполняется хотя бы одно из равенств:

$$\lim_{x\to -\infty}(f(x)-kx)=b \text{ или } \lim_{x\to +\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Если $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-kx)=b$, то прямая $y=kx+b$ является асимптотой при стремлении аргумента к $-\infty$, а если $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-kx)=b$, то асимптотой при стремлении аргумента к $+\infty$.

Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то не существует и наклонной асимптоты функции на $-\infty$ или на $+\infty$.

Коэффициенты наклонных асимптоты находятся отдельно на –∞ и на +∞.

Для асимптоты функции при стремлении аргумента к – ∞

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_1 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - k_1 x];$$

Для асимптоты при стремлении аргумента к + ∞.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_2 x].$$

Пример. Найдем наклонную асимптоту функции $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Определим коэффициенты наклонной асимптоты при $x \to -\infty$. Для нахождения пределов воспользуемся правилом Лопиталя:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-1)} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_1 x] = \left[\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(x-1)^2} - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2(x-1)} = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота функции при $x \to -\infty$ существует и ее уравнение: $y = 0x + 0$ или $y = 0$.

Аналогично рассчитаем коэффициенты наклонной асимптоты функции при $x \to +\infty$.

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - k_1 x] = \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-1)^2} - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2(x-1)} = 0.$$

Следовательно, наклонная асимптота функции при $x \to +\infty$ также существует и ее уравнение совпадает с уравнение предыдущей асимптоты.

6.7. Исследование функции с помощью производных

Понятия монотонности, возрастания, убывания и ограниченности функции мы рассмотрели в пункте 1.2. Основные свойства функций. Однако точно определить точное поведение функции на интервалах нам поможет только исследование функции по первой и второй производным.

6.7.1. Монотонность функции

Рассмотрим необходимые и достаточные условия монотонности функции одной переменной.

Теорема 6.3. (*необходимые условия*). Если дифференцируемая на интервале *(a; b)* функция *f(x)* монотонно возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любых *xϵ(a;b).*

Пример. Функция $y = x^2 - 6x - 5$ монотонно возрастает на интервале $(-\infty; 3)$, следовательно, на интервале $(-\infty; 3)$ ее производная $y' = 2x - 6$ будет принимать только положительные значения.

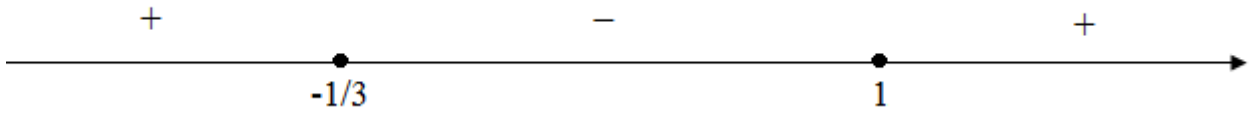
Теорема 6.4. (*достаточные условия*). Если функция *f(x)* дифференцируема на интервале *(a; b)* и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любых аргументов из этого интервала, то функция *f(x)* монотонно возрастает (убывает) на интервале *(a;b).*

Пример. Для дифференцируемой функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$ определим интервалы возрастания и убывания.

Найдем производную функции: $y' = (x^3 - x^2 - x + 4)' = 3x^2 - 2x - 1$.

Приравняем полученное выражение производной к нулю и решим уравнение: $3x^2 - 2x - 1 = 0.$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = -1/3$ и $x_2 = 1$. Пометим значения корней на числовой прямой и отметим знаки производной функции.



На интервалах $(-\infty; -1/3)$ и $(1; +\infty)$ производная функции $y' = 3x^2 - 2x - 1$ принимает положительные значения, следовательно, на этих интервалах функция $y = x^3 - x^2 - x + 4$ возрастает. На интервале $(-1/3; 1)$ производная принимает отрицательные значения, значит, на этом интервале функция убывает.

6.7.2. Экстремумы функции

Точка x_1 называется точкой *максимума функции f(x),* если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство: $f(x) \le f(x_1)$.

Точка x_2 называется точкой *минимума функции f(x),* если в некоторой окрестности точки x_2 выполняется неравенство: $f(x) \ge f(x_2)$.

Значения функции в точках x_1 и x_2 называют соответственно *максимумом* и *минимумом* функции. Максимум и минимум функции называются *экстремумами функции*.

Теорема 6.5. *(Необходимое условие экстремума).* Если функция *f(x)* в точке x_0 имеет экстремум, то $f'(x_0)=0$ или не существует.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, т.е. производная равна нулю или не существует, называются *критическими* (или *стационарными*).

Теорема 6.6. *(Первое достаточное условие экстремума).* Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка $\boldsymbol{x_0}$ есть точка максимума функции $y=f(x)$, а если с минуса на плюс, то точка минимума.

Пример. Функция $y = x^3 - x^2 - x + 4$ имеет критические точки $x_1 = -1/3$ и $x_2 = 1$, поскольку значение производной функции $y' = 3x^2 - 2x - 1$ в этих точках ровно нулю.

Точка $x_1 = -1/3$ является точкой максимума, так как при переходе через точку x_1 производная функции меняет свой знак с плюса на минус. Значение функции $f(x_1) \approx 3{,}5926$ является максимумом функции.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как при переходе через точку x_2 производная функции меняет свой знак с минуса на плюс. Значение функции $f(x_2) = 3$ является минимумом функции.

Теорема 6.7. *(Второе достаточное условие экстремума).* Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой

точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то x_0 есть точка минимума функции $f'(x)$; если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 – точка максимума.

Пример. Продифференцируем функцию $y = x^3 - x^2 - x + 4$ второй раз:

$$y'' = (y')' = (3x^2 - 2x - 1)' = 6x - 2 .$$

В точке $x_1 = -1/3$ первая производная равна нулю, а вторая производная $f''(-1/3) = 6 \cdot (-1/3) - 2 = -4$ меньше нуля, следовательно, $x_1 = -1/3$ является точкой максимума.

В точке $x_2 = 1$ первая производная равна нулю, а вторая производная $f''(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4$ больше нуля, следовательно, $x_2 = 1$ является точкой минимума.

6.7.3. Выпуклость и вогнутость функции

График дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *вогнутым* (*выпуклым вниз*) на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале (рис. 6.5).

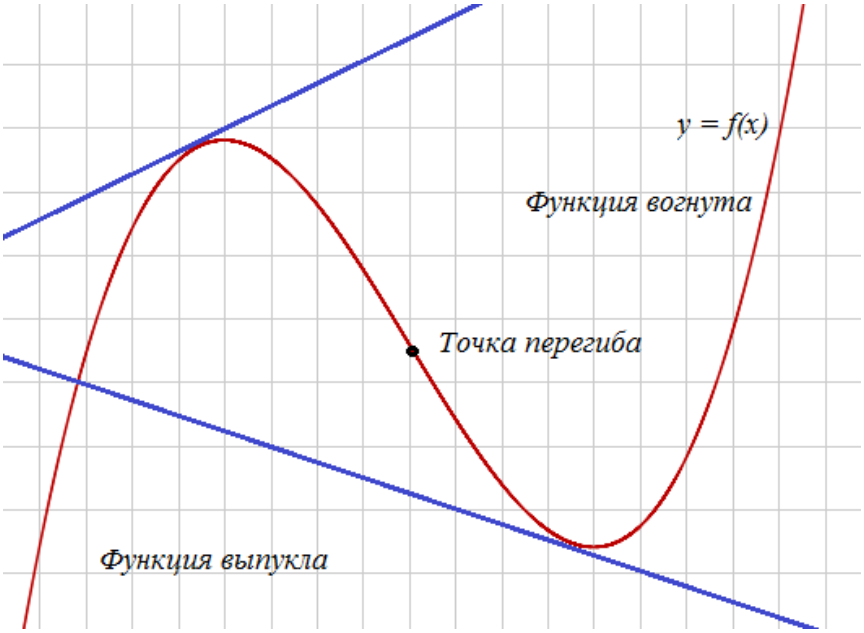


Рис. 6.5. Выпуклость и вогнутость функции.

График дважды дифференцируемой функции *y=f(x)* называется *выпуклым* (*выпуклым вверх*) на интервале (*a;b*), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции *y=f(x),* отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба.*

Интервалы выпуклости, вогнутости функции находят с помощью следующих теорем.

Теорема 6.8. Если функция *y=f(x)* во всех точках интервала (*a; b*) имеет отрицательную вторую производную, т.е. *f ''(x)<0,* то график функции в этом интервале выпуклый. Если же *f ''(x)>0,* для любых *x* ϵ (*a; b*) – график вогнутый.

Пример. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$.

Приравняем вторую производную исследуемой функции к нулю и решим уравнение: $6x - 2 = 0$. Очевидно, единственным решением уравнения будет значение $x_0 = 1/3$. На числовой прямой рассмотрим значения второй производной слева и справа от решения (рис. 6.6).

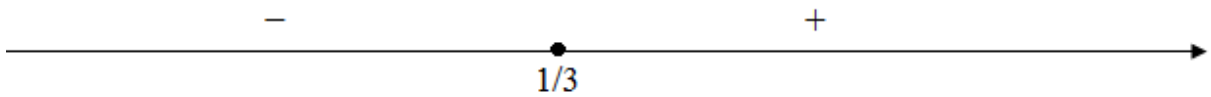


Рис. 6.6. Значения второй производной на числовой оси.

Слева от $x_0 = 1/3$ вторая производная функции принимает отрицательные значения, следовательно, на интервале $(-\infty; 1/3)$ график функции выпуклый.

Справа от $x_0 = 1/3$ вторая производная функции принимает положительные значения, следовательно, на интервале $(1/3; +\infty)$ график функции вогнутый.

6.7.4. Точки перегиба

Теорема 6.9. *(необходимое условие перегиба).* Вторая производная *f ''(x)* дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю.

Теорема 6.10. *(достаточное условие перегиба).* Если вторая производная *f''(x)* дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.

Пример. Определим точку перегиба функции $y = x^3 - x^2 - x + 4$.

Мы уже выяснили, что в точке $x_0 = 1/3$ вторая производная равна нулю. Кроме того, при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак с минуса на плюс, тогда согласно приведенному выше достаточному условию точка $x_0 = 1/3$ является точкой перегиба.

6.8. Исследование функций по общей схеме

При помощи дифференциального исчисления, во многих случаях можно получить представление о поведении графика функции, не заполняя подробных таблиц значений функции, которые в большинстве своем неудовлетворительно отражают важнейшие качественные свойства функции, такие, как точки разрыва, экстремальные точки, поведение функции в значительно удалении от начала координат.

Ниже приведена общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функции на четность, нечетность, периодичность.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции.
4. Построить асимптоты функции.
5. Определить экстремальные точки. Интервалы возрастания (убывания) функции.
6. Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции.
7. Контрольные точки. Схематичное изображение функции.

Рассмотрим примеры исследования функций по общей схеме.

Пример. Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ по общей схеме.

1. Найдем область определения функции:

$$D(f) = (-\infty; +\infty).$$

2. Четность, нечетность функции, периодичность:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 2(-x) = -x^3 - 3x^2 - 2x\,.$$

Таким образом, функция общего вида.

3. Определим интервалы знакопостоянства функции, для этого функцию приравняем к нулю:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0\,.$$

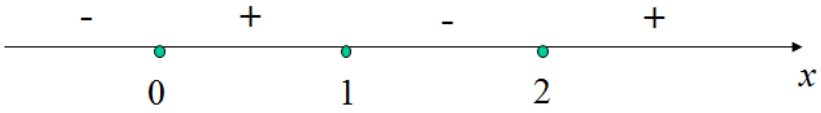
Преобразуем выражение функции:

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Решая уравнение, получим три корня:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

Разместим полученные значения на числовой прямой и отметим интервалы знакопостоянства функции:



Из нашего исследования мы видим, что функция знакоположительна на интервалах (0; 1) и (2; +∞); функция принимает отрицательные значения на интервалах (-∞; 0) и (1; 2).

4. Найдем асимптоты графика функции.

Функция определена на всем множестве действительных чисел, следовательно, вертикальных асимптот нет.

Найдем коэффициенты наклонной асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 - 3x + 2) = +\infty.$$

Таким, образом, наклонных асимптот также нет.

5. Исследуем функцию по перовой производной.

Первая производная функции имеет вид:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2\,.$$

Найдем критические точки. Для этого приравняем к нулю найденную производную функции:

$$3x^2 - 6x + 2 = 0\,.$$

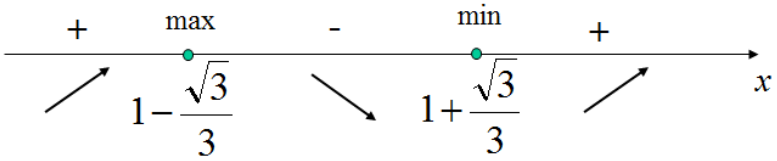
Решим квадратное уравнение:

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12;\ \text{тогда}$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}42;$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}58.$$

Поместим корни уравнения на числовую прямую и найдем интервалы возрастания и убывания исследуемой функции.



При переходе через точку x_1 функция меняет знак с плюса на минус, следовательно, x_1 является точкой максимума.

При переходе через точку x_2 функция меняет знак с минуса на плюс, следовательно, x_2 является точкой минимума.

Вычислим приближенные значения функции в точках максимума и минимума:

$$f(x_1) \approx f(0{,}42) = 0{,}42^3 - 3 \cdot 0{,}42^2 + 2 \cdot 0{,}42 = 0{,}38;$$

$$f(x_2) \approx f(1{,}58) = 1{,}58^3 - 3 \cdot 1{,}58^2 + 2 \cdot 1{,}58 = -0{,}38\,.$$

6. Исследуем функцию по второй производной:

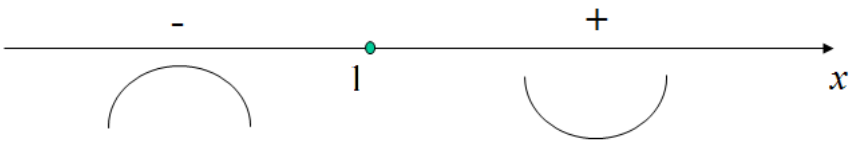
Найдем вторую производную функции:

$$f''(x) = (3x^2 - 6x + 2)' = 6x - 6\,.$$

Найдем критические точки. Для этого приравняем к нулю полученной выражение: $6x - 6 = 0$.

Как видно, решением уравнения является значение $x = 1$.

Нанесем значение $x = 1$ на числовую прямую:



На интервале (-∞; 6) функция является выпуклой вверх (выпуклой). На интервале (6; +∞) функция является выпуклой вниз (вогнутой).

Точка x = 6 является точкой перегиба.

Нанесем на координатную плоскость найденные точки и, используя наше исследование, построим график функции (рис. 6.7).

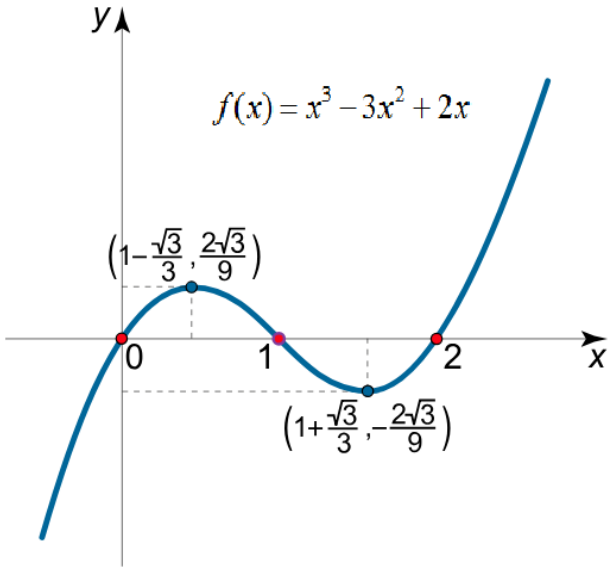


Рис. 6.7. График функции $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

Рассмотрим еще один пример.

Пример. Исследуем функцию $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$.

1. Найдем область определения функции. Так как в знаменатель дроби не может быть равен нулю, то:

$$D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

2. Проверим функцию на четность, нечетность и периодичность:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^3}=\frac{x^2-1}{-x^3}=-\frac{x^2-1}{x^3}=-f(x).$$

Так как $f(-x)=-f(x)$, то функция является нечетной.

3. Найдем интервалы знакопостоянства функции. Приравняем к нулю функцию и решим уравнение:

$$x^2 - 1 = 0.$$

В результате решения получим два решения:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Разместим на числовой прямой полученные корни, а также точку разрыва функции (рис. 6.8):

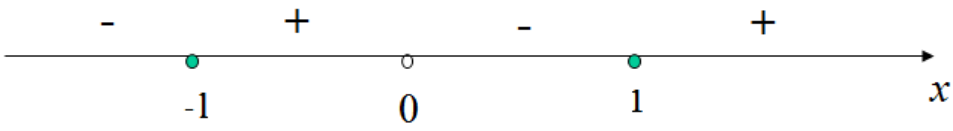


Рис. 6.8. Корни и точка разрыва исследуемой функции.

Функция знакоположительна на интервалах (-1; 0) и (1; +∞); функция принимает отрицательные значения на интервалах (-∞; -1) и (0; 1).

4. Определим асимптоты графика функции:

Функция определена на R, кроме точки $x = 0$. Найдем односторонние пределы в этой точке.

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{x^2 - 1}{x^3} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{x^2 - 1}{x^3} = -\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

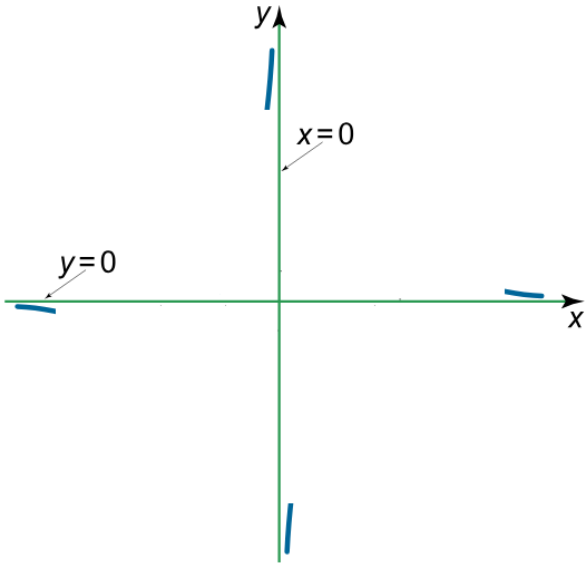
Выясним существование наклонных и горизонтальных асимптот:

$$k_{1,2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{x^2 - 1}{x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^4} = 0;$$

$$b_{1,2} = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^3} - 0 \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = 0.$$

Таким образом, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Нанесем полученные асимптоты на координатную плоскость (рис. 6.9).



6.9. Асимптоты исследуемой функции.

5. Исследуем функцию по перовой производной. Найдем производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^2-1}{x^3}\right)' = \left(\frac{x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{3-x^2}{x^4}.$$

Определим критические точки, для этого приравняем к нулю полученное выражение:

$$\frac{3-x^2}{x^4} = 0.$$

Решением данного уравнения будет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{3} \approx -1{,}73; \quad x_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}73.$$

Поместим критические точки на числовую прямую (рис. 6.10).

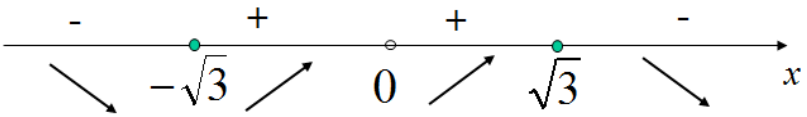


Рис. 6.10. Критические точки исследуемой функции.

Вычислим значения функции в точках максимума и минимума:

$$y\left(-\sqrt{3}\right) \approx -0{,}38; \quad y\left(\sqrt{3}\right) \approx 0{,}38.$$

Отметим полученные тоски на координатной плоскости (рис. 6.11):

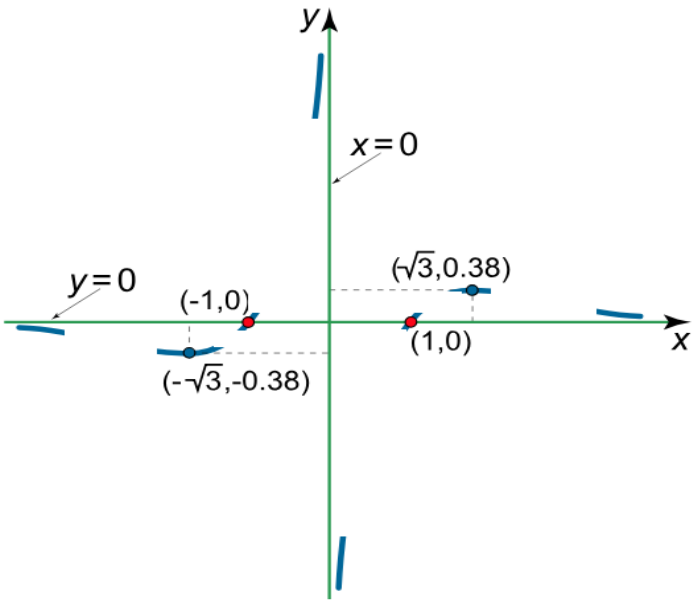


Рис. 6.11. Точки максимума и минимума функции.

Произведем исследование по второй производной. Найдем вторую производную функции.

$$y'' = \left(\frac{3-x^2}{x^4}\right)' = \left(\frac{3}{x^4} - \frac{x^2}{x^4}\right)' = \frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^5} = \frac{2(x^2-6)}{x^5}.$$

Определим критические точки:

$$\frac{2(x^2-6)}{x^5} = 0.$$

Корнями данного уравнения будет значения:

$$x_1 = -\sqrt{6} \approx -2{,}45; \quad x_1 = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

Отметим точки на числовой прямой и определим выпуклость и вогнутость исследуемой функции (рис. 6.12):

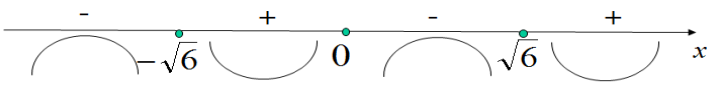


Рис. 6.12. Выпуклость и вогнутость функции.

Исследуя выпуклость функции, можно отметить, что значения $x_1 = -\sqrt{6}, \quad x_2 = -\sqrt{6}$ являются точками перегиба.

8. Построим график исследуемой функции (рис. 6.13):

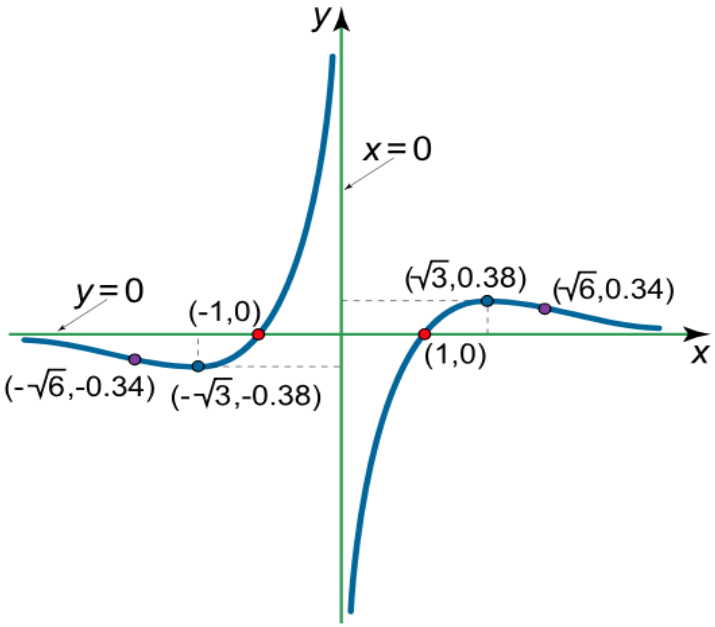


Рис 6.13. График функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$.

Пример. Проведем исследование по общей схеме функции $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построим ее график.

1) Найдем область определения функции.

Так как знаменатель дроби не может быть равен нулю, то областью определения функции является вся числовая прямая, кроме точек $x=-1$ и $x=1$. Таким образом, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Проверим нашу функцию на четность, нечетность, и периодичность.

Подставим в функцию вместо аргумента выражение $-x$:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\frac{-x^3}{x^2-1}=-f(x).$$

Так как $f(-x)=-f(x)$, то функция является нечетной. В силу нечетности функция является симметричной относительно начала координат и четной быть не может. Кроме того, функция не содержит никаких тригонометрических выражений, следовательно, периодичности тоже не будет.

4) Найдем интервалы знакопостоянства функции.

Определим нули функции, решив уравнение $f(x)=0$.

Уравнение $\frac{x^3}{x^2-1}$ имеет единственное решение $x=0$.

На числовой прямой отметим три точки: точки разрыва функции и точку, в которой $x=0$ функция принимает нулевое значение. Вычислив значение функции в произвольных точках, отметим символами «+» и «–» знаки функции на выделенных интервалах (рис. 6.14).

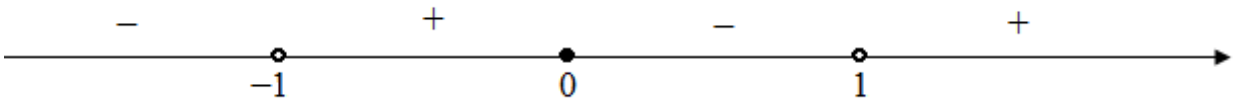


Рис. 6.14. точки разрыва исследуемой функции.

Таким образом, на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$ функция принимает отрицательные значения, а на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$ функция знакоположительна.

5) Рассчитаем асимптоты функции.

Для определения параметров вертикальных асимптот найдем правосторонние и левосторонние пределы в каждой точке разрыва функции.

Прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой исследуемой функции поскольку $\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty.$

Аналогично, прямая $x=-1$ также является асимптотой исследуемой функции, так как $\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty.$

Найдем наклонные асимптоты нашей функции.

Рассмотрим поведение функции при стремлении аргумента к $-\infty$. Для этого определим коэффициенты асимптоты $y=k_1x+b_1$:

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Таким образом, мы получили асимптоту: $y=1\cdot x+0$ или $y=x$.

Аналогично определим коэффициенты асимптоты $y=k_2x+b_2$ при $x\to+\infty$:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - 1\cdot x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Мы снова получили асимптоту $y = x$. В силу симметричности функции относительно начала координат обе асимптоты совпадают. Нанесем асимптоты на систему координат (рис. 6.15):

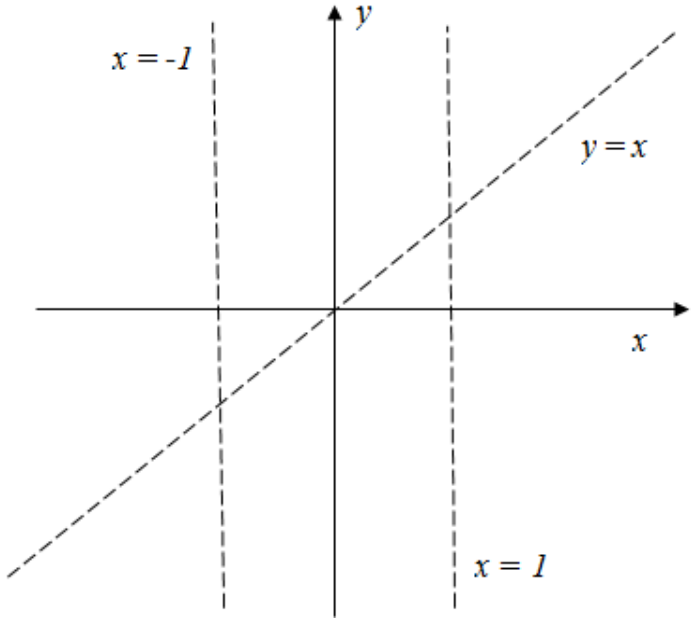


Рис. 6.15. Асимптоты исследуемой функции.

6) Определим интервалы возрастания и убывания функции, экстремальные значения. Сначала продифференцируем нашу функцию:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right)' = \frac{(x^3)'(x^2-1) - x^3(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^3(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Приравняем полученную производную к нулю: $\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$.

Решая уравнение, получим три корня: $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$. Нанесем эти значения и точки разрыва функции на числовую ось и укажем знаки производной на полученных промежутках (рис. 6.16).

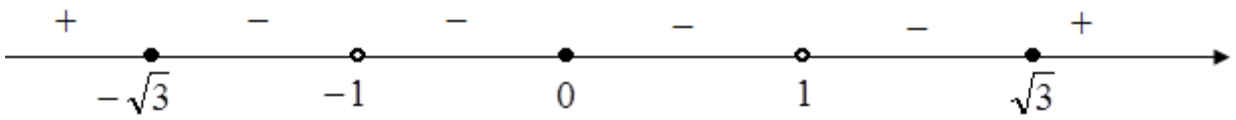


Рис. 6.16. Знаки производной исследуемой функции.

На интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};+\infty)$ первая производная функция принимает положительные значения, следовательно на этих интервалах функция возрастает. На интервалах $(-\sqrt{3};-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ и $(1;\sqrt{3})$ первая производная функция принимает отрицательные значения, значит здесь функция убывает.

Рассмотрим поведение функции в критических точках. В точке $x_1=-\sqrt{3}$ функция достигает своего локального максимума $f(-\sqrt{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\approx -2{,}5981$. В точке $x_2=0$ экстремума нет, поскольку слева и справа от нее производная принимает отрицательные значения. В точке $x_3=\sqrt{3}$ функция имеет локальный минимум: $f(\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}5981$.

7) Найдем интервалы выпуклости, вогнутости функции и точки перегиба. Продифференцируем нашу функцию второй раз:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(x^4-3x^2\right)'\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)\left[\left(x^2-1\right)^2\right]'}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{\left(x^2-1\right)\left[\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)-4x\left(x^4-3x^2\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{4x^5-6x^3-4x^3+6x-4x^5+12x^3}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Решим уравнение $\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0$ и получим единственный корень $x=0$.

Нанесем значение корня уравнения и точки разрыва функции на числовую ось и укажем знаки второй производной на полученных промежутках.

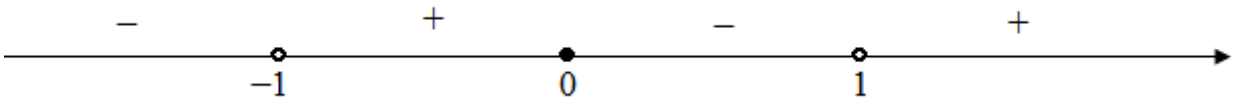


Рис. 6.17. Знаки второй производной функции.

На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$ вторая производная функции принимает отрицательные значения, следовательно, является выпуклой, а интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$ вторая производная знакоположительна, а значит, вогнута.

В точке $x=0$ вогнутость функции меняется на выпуклость, таким образом, точка $x=0$ является точкой перегиба.

На несем на график с асимптотами точки минимума и максимума и, учитывая интервалы знакопостоянства функции, ее возрастание и убывание, промежутки вогнутости и выпуклости построим эскиз графика (рис. 6.18).

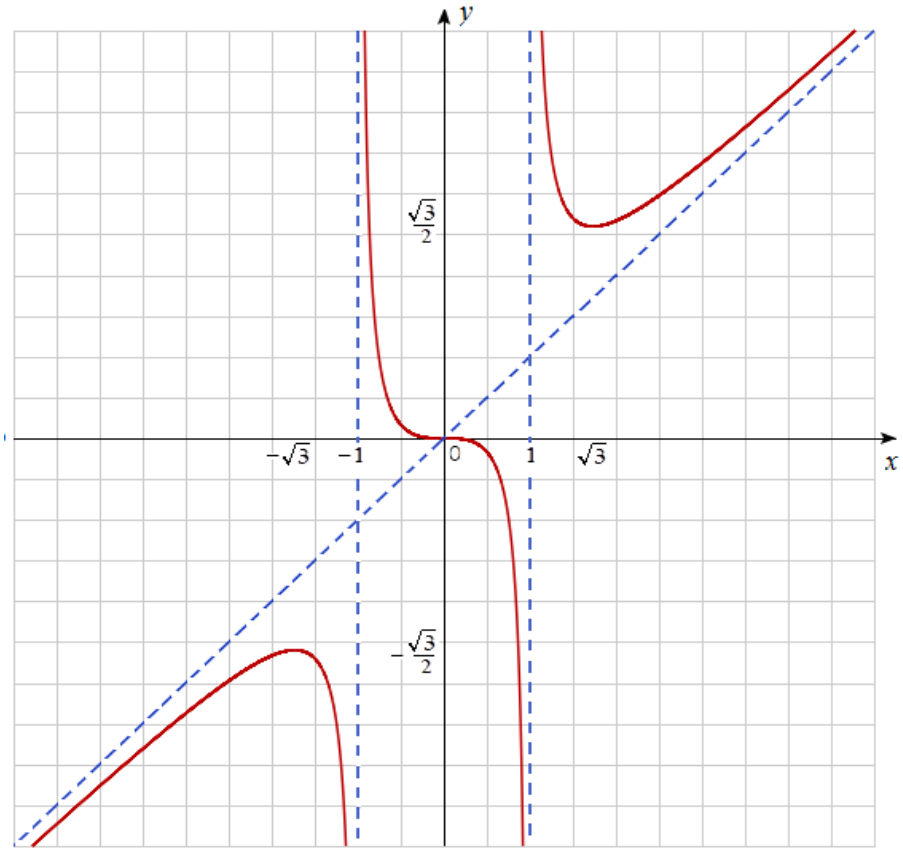


Рис. 6.18. График функции $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие производной функции одной переменной. Каким образом можно найти производной функции по определению?

2. В чем состоит геометрический смысл производной функции одной переменной?

3. В чем заключается зависимость между непрерывностью функции одной переменной и дифференцируемостью.

4. Какие функции называются гладкими и кусочно-гладкими?

5. Какие основные правила дифференцирования вы знаете? Приведите примеры использования правил дифференцирования.

6. Каким образом находятся производные сложных и обратных функций?

7. Как можно вычислить производные второго, третьего и четвертого порядков?

8. В каких случаях для нахождения предела функции можно использовать Правило Лопиталя? Приведите примеры использования правила Лопиталя.

9. Сколько раз можно использовать правило Лопиталя?

10. Каким образом осуществляется локализация корней уравнений графически? Приведите пример.

11. Опишите алгоритм локализация корней уравнений аналитическим способом. Приведите пример. Какой из методов локализации вы считаете более эффективным?

12. Дайте определение асимптот графика функции? Какие вы знаете типы асимптот?

13. Опишите метод нахождения вертикальных асимптот. Сколько вертикальных асимптот может быть у графика функции?

14. Продемонстрируйте на примере метод нахождения наклонных асимптот. Сколько наклонных асимптот может быть у графика функции?

15. Какие необходимые и достаточные условия монотонности функции вы знаете? Приведите примеры нахождения интервалов монотонности функции.

16. Опишите принципы нахождения экстремумов функции одной переменной.

17. На примере продемонстрируйте методы нахождения выпуклости и вогнутости функции одной переменной.

18. Перечислите необходимые и достаточные условия перегиба функции одной переменной. Приведите пример нахождения точек перегиба функции одной переменной.

19. Опишите алгоритм исследования функции одной переменной.

20. Приведите пример исследования функции одной переменной.

Глава 7. Функции нескольких переменных

При рассмотрении многих вопросов фундаментальных и прикладных наук приходится иметь дело с такими зависимостями между переменными величинами, в которых числовые значения одной из них полностью определяются значениями нескольких других.

Для рассмотрения такого рода зависимостей вводится понятие функции нескольких переменных и развивается аппарат для исследования таких функций. Аналогично функции одной переменной вводится понятие функции двух переменных.

Настоящая глава посвящена описанию математического аппарата исследования функций нескольких переменных. В ней мы дадим определение функции нескольких переменных, области определения, множеству значений, принимаемых функцией нескольких переменных. Важное значение в теории функций нескольких переменных имеет понятие предела. Также мы рассмотрим классификацию и основные свойства непрерывных функций двух переменных.

Важное место в главе занимают вопросы, посвященные дифференциальному исчислению функции нескольких переменных. Мы определим методы нахождения частных производных, особенности дифференцирования сложных функций, алгоритмы вычисления дифференциала, частных и смешанных производных высших порядков, нахождения производной по направлению и градиента.

Завершается глава исследованием функций нескольких переменных на экстремальные значения, нахождением максимальных и минимальных значений на замкнутой области определения.

7.1. Понятие функции нескольких переменных

Функции одной независимой переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Многим явлениям, в том числе физическим, экономическим и социальным присуща многофакторная зависимость.

Исследование таких зависимостей потребовало совершенствования математического аппарата, в частности введения понятия функции нескольких переменных.

7.1.1. Основные определения

Определение. Пусть имеется *n* переменных величин, и каждому набору их значений $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторого множества *X* соответствует одно вполне определенное значение переменной величины *z*. Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются независимыми переменными (аргументами); *z* – зависимой переменной (функцией), а символ *f* означает закон соответствия.

Множество *X* называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Множество значений, принимаемых *z* в области определения, называется областью изменения этой функции, обозначается *E(f)*.

Исследование функций нескольких переменных является достаточно сложная и трудоемкая задача. Далее в этой главе для простоты будем рассматривать функции двух переменных $z = f(x, y)$. Все определения, свойства и принципы решения задач с поправками можно будет перенести и на случай функций трех и более переменных.

Пример. Найдем область определения функции: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Так как подкоренное выражение должно быть больше или равно нулю, то область определения задается условием: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$. Таким образом, $D(f)$ представляет собой единичный круг с центром в начале координат (рис 7.1).

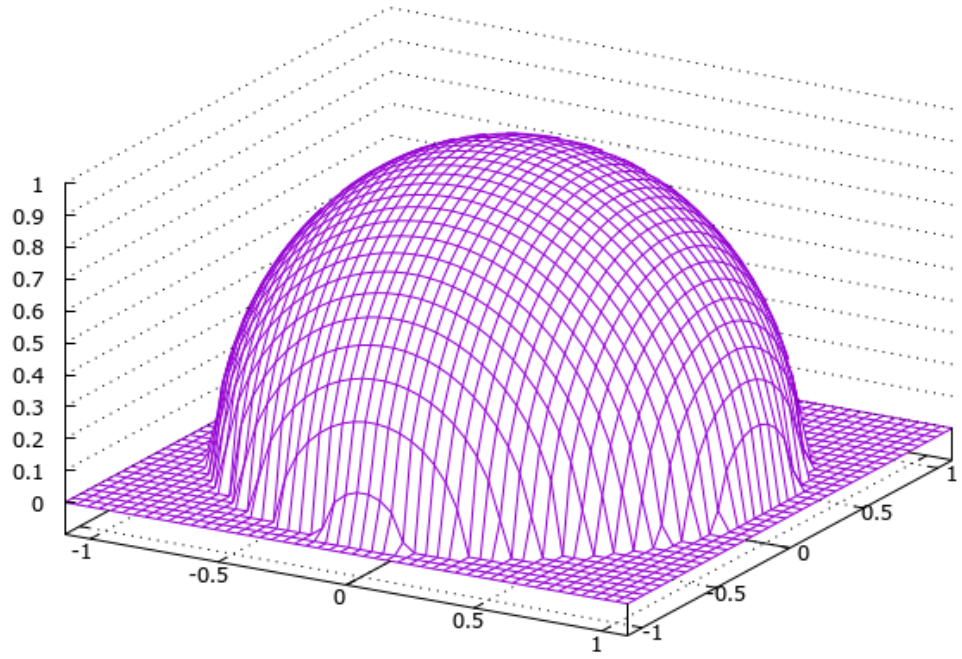


Рис. 7.1. Функция $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Большая часть, определенных для функции одной переменной, может быть перенесена на случай двух переменных.

7.1.2. Предел функции нескольких переменных

Определение. Число A называется пределом функции $z=f(x,y)$ при $x\to x_0$ и $y\to y_0$ (или в точке (x_0,y_0)), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ найдется такое положительное число $\delta>0$ (зависящее от ε; $\delta=\delta(\varepsilon)$), что для всех точек (x,y), отстоящих от точки (x_0,y_0) на расстояние ρ, меньшее, чем δ (т.е. при $0<\rho<\delta$), выполняется неравенство: $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Обозначается предел: $A=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$.

Пример. Найдем предел функции: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Для нахождения предела сделаем замену: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, а затем вычислим получившийся предел одой переменной, используя Правило Лопиталя:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1-z^2)}{z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{(\ln(1-z^2))'}{z'} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{1-z^2}(-2z)}{1} = 1.$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0), если $z = f(x, y)$ определена в точке (x_0, y_0), имеет конечный предел $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$ и этот предел равен значению функции в точке (x_0, y_0):

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области. Точки, в которых не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции, называются точками разрыва этой функции.

Пример. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в каждой точке пространства R^2.

Пример. Функция $z = \dfrac{2x+1}{y-3}$ претерпевает разрыв во всех точках, лежащих на прямой $y - 3 = 0$, поскольку в этой области функция не определена.

График функции, непрерывной в некоторой области, представляет собой сплошную, без разрывов и расслоений, поверхность (рис. 7.2).

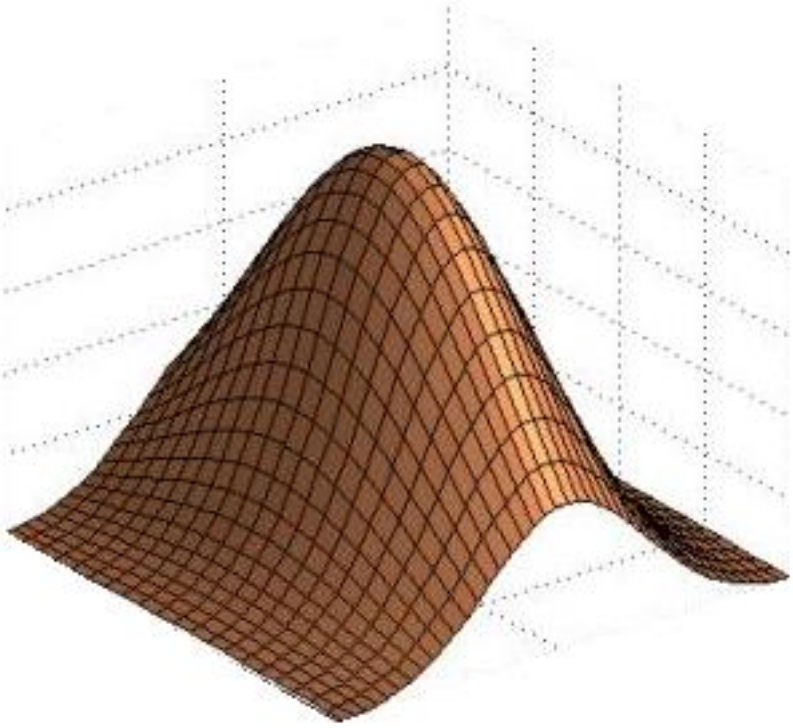


Рис. 7.2. График функции, непрерывной в прямоугольной области.

7.1.3. Основные свойства непрерывных функций двух переменных

Рассмотрим основные свойства непрерывных функций двух переменных. Для этого введем предварительно ряд понятий для множеств $\{M\}$ точек плоскости.

Множество $\{M\}$ точек плоскости называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек данного множества.

Пример. Круг – связное множество, а множество, состоящее из двух кругов, не имеющих общих точек, не является связным.

Точка M называется *внутренней точкой* множества $\{M\}$, если существует δ-окрестность этой точки, состоящая из точек данного множества.

Множество $\{M\}$, состоящее лишь из внутренних точек, называется *открытым множеством*.

Связное открытое множество $\{M\}$ точек называется *открытой областью*, или просто областью.

Пример. Простейшие области: внутренность треугольника, квадрата, круга, эллипса и т.п.

Точка M называется *граничной точкой* области, если в любой ее δ-окрестности есть точки как принадлежащие, так и не принадлежащие этой области. Множество всех граничных точек области называется *границей* этой области.

Пример. Для области, которая состоит из точек, лежащих внутри круга, границей является окружность.

Множество $\{M\}$ точек, образованное областью и ее границей, называется *замкнутой областью*.

Множество $\{M\}$ называется *ограниченным*, если существует круг, внутри которого оно содержится.

Пример. Отрезок и треугольник – ограниченные множества. Прямая не является ограниченным множеством.

Замкнутая ограниченная область, в которой определена функция двух переменных, является аналогом отрезка для функции одной переменной.

Перечислим основные свойства функций двух переменных.

Свойство 1. Если функция $z = f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она ограничена в этой области, т. е. существует число k такое, что для всех точек области выполняется неравенство $|f(M)| \le k$.

Свойство 2. Если функция $z = f(M)$ непрерывна в области, то она принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями, т. е. если $A < C < B$, где A и B – какие-то значения функции $z = f(M)$ в данной области, то в этой области существует точка M_0, в которой $f(M_0) = C$.

Отсюда, в частности, следует, что если M_1 и M_2 – точки данной области и $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то в области существует точка M_0, в которой $f(M_0) = 0$.

7.2. Дифференцирование функции нескольких переменных

7.2.1. Частные производные первого порядка

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Так как аргументы функции *x* и *y* независимы, то можно только одну из них изменить, а у другой оставить ее значение неизменным. Дадим аргументу *x* приращение *Δx, не меняя* значение переменной *y*. Тогда функция *z* получит приращение, которое назовем *частным приращением z* по *x*:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Таким же образом можно получить и частное приращение *z* по *y*:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если дать приращение обоим аргументам функции *z* одновременно, то получим полное приращение *Δz* функции *z*:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел функции: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}$, то он называется частной производной функции *z=f(x;y)* в точке *(x;y)* по переменной *x*.

Аналогично, предел: $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}$, называется частной производной функции *z=f(x;y)* в точке *(x;y)* по переменной *y*.

Определение. Частной производной функции нескольких переменных по одной из переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Частные производные могут обозначаться следующим образом:

$$z'_x,\quad z'_y,\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad f'_x(x,y),\quad f'_y(x,y).$$

Частные производные функций по какому-либо аргументу находят по формулам и правилам, использовавшимися нами для дифференцирования функции одной переменной, причем все остальные переменные считаются постоянными величинами.

Пример. Найдем частные производные функции $z=x^2-2xy^2+y^3$.

Для нахождения частной переменной по аргументу *x*, представим, что переменная *y* является константой:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2-2xy^2+y^3)'_x=2x-2y^2.$$

Таким же образом, считая *x* постоянной величиной, найдем частную производную по *y*:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2-2xy^2+y^3)'_y=-4xy+3y^2.$$

Пример. Найдем частные производные функции $z=x^2\sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y.$$

Пример. Найдем частные производные функции $z = xye^{x+2y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+2y} y(1+x); \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+2y} x(1+2y).$$

Пример. Найдем частные производные функции $z = arctg\frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

7.2.2. Производные сложных функций

Пусть $z = f(M)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f[x(t), y(t)]$ является сложной функцией независимой переменной t, а переменные x и y – промежуточные переменные. Имеет место следующая теорема.

Теорема 10.1. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке $M = f[x(t), y(t)]$, то сложная функция $z = f[x(t), y(t)]$ также дифференцируема в точке t. При этом производная этой сложной функции вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Замечание. Обратите внимание на то, когда в обозначениях производных пишется «∂» и когда «d».

Пример. Пусть $z = f(M), \quad x = t^3 + 2, \quad y = 3t^4 - 1$.

По формуле производной сложной функции получим:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} 3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y} 12t^3.$$

Пример .Пусть $z = x\sin\frac{x}{y}, \quad x = 1 + 3t, \quad y = \sqrt{1+t^2}$.

По формуле производной сложной функции получим:

7.2.3. Дифференциал функции.

Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то $z = f[x, \varphi(x)]$ – сложная функция. На основании формулы, записанной выше, в которой роль t играет теперь x, получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

а так как $\frac{dx}{dx} = 1$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Напомним, что если функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке M, то ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y - \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Дифференциалом dz дифференцируемой в точке M функции $z = f(M)$ называется линейная относительно приращений Δx и Δy часть полного приращения этой функции в точке M, т. е.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Дифференциалами независимых переменных x и y назовем приращения этих переменных: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда дифференциал функции можно записать в виде

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

7.2.4. Частные производные высших порядков

Если продифференцировать по переменным *x* и *y* частные производные z'_x и z'_y, то получим частные производные второго порядка.

Определяются они следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{x^2}(x;y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{yx}=f''_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{xy}=f''_{xy}(x;y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x;y).$$

Если продифференцировать частные производные второго порядка, то получим восемь частных производных третьего порядка. Дифференцируя дальше – 16 частных производных четвертого порядка, затем 32 производные пятого, 64 производные шестого порядка, … .

Частная производная второго или более высокого порядков, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*.

Пример. Найдем все частные производные второго порядка функции

$$z=x^4+4x^2y^3+7xy+1.$$

Найдем сначала первые частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x=(x^4+4x^2y^3+7xy+1)'_x=4x^3+8xy^3+7y;$$

$$z'_y=(x^4+4x^2y^3+7xy+1)'_y=12x^2y^2+7x.$$

Затем обе полученные частные производные z'_x и z'_y продифференцируем еще раз по каждому аргументу. Получим четыре частных производных второго порядка:

$$z''_{xx}=(4x^3+8xy^3+7y)'_x=12x^2+8y^3; \qquad z'_{yx}=(12x^2y^2+7x)'_x=24xy^2+7;$$

$$z''_{xy}=(4x^3+8xy^3+7y)'_y=24xy^2+7; \qquad z'_{yy}=(12x^2y^2+7x)'_y=24x^2y.$$

Заметим, что вторые частные производные z''_{xy} и z''_{yx} равны. Действительно, для непрерывных смешанных частных производных одного порядка, отличающихся только порядком дифференцирования, всегда можно сказать, что они равны между собой.

Пример. Найдем все частные производные второго порядка функции

$$z=\sin x\cos y.$$

Найдем сначала производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cos y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x \sin y.$$

А теперь еще раз продифференцируем нашу функцию:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

7.3. Производные по направлению. Градиент

7.3.1. Производная по направлению

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x,y)$, вектор $l^0=(\cos\alpha,\cos\beta)$ – единичный вектор, задающий направление прямой L, проходящей через точку $M(x,y)$ (рис. 7.3).

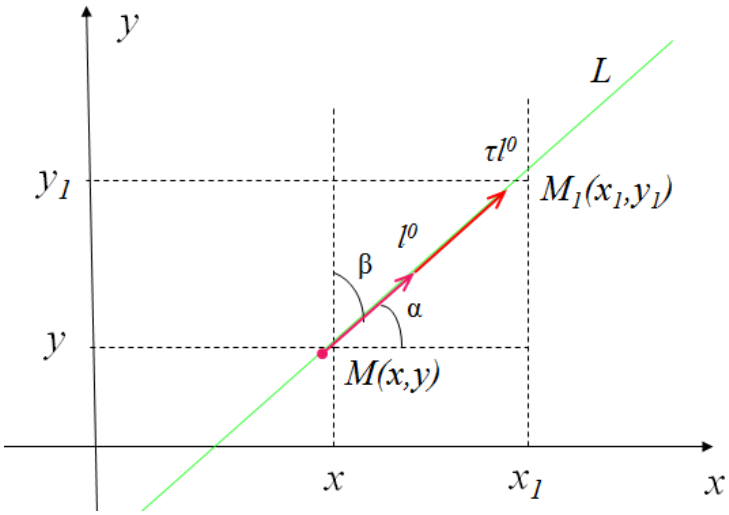


Рис. 7.3. Производная по направлению.

Выберем на прямой L точку $M_1(x_1,y_1)=M(x,y)+\tau\cdot l^0$ и рассмотрим приращение $\Delta z=z(M_1)-z(M)=f(x+\tau\cos\alpha,\ y+\tau\cos\beta) - f(x,y)$ в точке $M(x,y)$.

Определение. Предел отношения $\lim\limits_{\tau\to 0} \dfrac{f(x+\tau\cos\alpha, y+\tau\cos\beta)-f(x,y)}{\tau}$,

если он существует, называется производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x,y)$ по направлению $l^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

Обозначается производная функции по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$.

Если функция *z=f(x,y)* имеет в точке непрерывные частные производные, то в этой точке существует и производная по любому направлению, исходящему из точки *M(x,y).*

Производную функции по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ можно вычислить следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta .$$

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2+xy+y^2+2x+2y$ в точке $M(1;1)$ по направлению вектора $l = (3;4)$.

Сначала определим единичный вектор l^0, совпадающий с направлением вектора l: $l^0 = \frac{l}{|l|} = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}};\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) = \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$, следовательно, направляющие векторы будут равны

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ и } \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x+y+2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x+2y+2 .$$

Подставим в частные производные координаты точки $M(1;1)$ и получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cdot 1+1+2 = 5 \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = 1+2\cdot 1+2 = 5 .$$

Тогда значение производной функции $z = x^2+xy+y^2+2x+2y$ в точке $M(1;1)$ по направлению вектора $l = (3;4)$ будет равно: $\frac{\partial z}{\partial l} = 5\cdot\frac{3}{5}+5\cdot\frac{4}{5} = 7$.

7.3.2. Градиент

Определение. Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор с началом в точке M_0, координаты которого равны соответствующим частным производным z'_x и z'_y, вычисленным в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Обозначается градиент: $grad\ z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Геометрически градиент представляет собой вектор, указывающий направление, в котором из точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ возрастает наибольшим образом.

Пример. Найти градиент функции $u = x^2 + 3xy^2 - y$ в точке $M(2, -1)$.

Для решения задачи найдем частные производные представленной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 1.$$

Подставим в частные производные координаты точки $M(2, -1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)^2 = 4 - 3 = 1; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 = -12 - 1 = -13.$$

Таким образом, градиент функции $u = x^2 + 3xy^2 - y$ в точке $M(2, -1)$ представляет собой вектор $(1, -13)$. Именно в этом направлении наша функция будет возрастать наибольшим образом.

7.4. Экстремумы функции двух переменных

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

*Определение***.** Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, что для каждой точки $M(x, y)$, отличной от точки $M_0(x_0, y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) > f(x_0, y_0)$) (рис. 7.4).

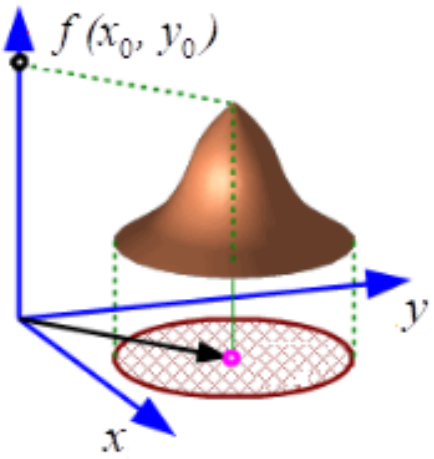


Рис. 7.4. Максимум функции двух переменных.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции называют ее экстремумами.

7.4.1. Необходимые условия экстремума

Теорема 10.2. *(необходимые условия экстремума).* Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, т.е. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, называется *стационарной точкой* функции *z*.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называют *критическими точками*.

Пример. Найдем точки возможного экстремума функции $z = -2x^2 + y^2 + 32x$ и значения функции в этих точках.

Для решения задачи продифференцируем функцию $z = -2x^2 + y^2 + 32x$ по аргументам *x* и *y*:

$$z'_x = (-2x^2 + y^2 + 32x)'_x = -4x + 32;$$

$$z'_y = (-2x^2 + y^2 + 32x)'_y = 2y.$$

Приравняем каждую из частных производных к нулю и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} -4x + 32 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}.$$

Решая ее, получим координаты стационарной точки

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Найдем значение функции в этой точке:

$$z(8; 0) = -2 \cdot 8^2 + 0^2 + 32 \cdot 8 = 128.$$

Пример. Найти точки возможного экстремума (стационарные точки) и значение функции в этих точках, если

$$z = 4x^2 - 5y^2 + 48x - 70y - 5.$$

Найдем частные производные z'_x и z'_y,:

$$z'_x = (4x^2 - 5y^2 + 48x - 70y - 5)'_x = 8x + 48;$$

$$z'_y = (4x^2 - 5y^2 + 48x - 70y - 5)'_y = -10y - 70.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 8x + 48 = 0 \\ -10y - 70 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -6 \\ y = -7 \end{cases}.$$

Найдем значение функции в этой точке:

$$z(-6;-7) = 4(-6)^2 - 5(-7)^2 + 48 \cdot (-6) - 70 \cdot (-7) - 5 = 96.$$

Пример. Найти точки возможного экстремума (стационарные точки) и значение функции в этих точках, если

$$z = 2x^2 + 7xy + 6y^2 - 2x - y.$$

Найдем частные производные функции:

$$z'_x = (2x^2 + 7xy + 6y^2 - 2x - y)'_x = 4x + 7y - 2;$$

$$z'_y = (2x^2 + 7xy + 6y^2 - 2x - y)'_y = 7x + 12y - 1.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x + 7y - 2 = 0 \\ 7x + 12y - 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -17 \\ y = 10 \end{cases}.$$

Найдем значение функции в этой точке:

$$z(-17;10) = 2(-17)^2 + 7 \cdot (-17) \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 - 2 \cdot (-17) - 10 = 12 .$$

Пример. Для функции $z = x^3 + 18x^2 - 2y^2 + 105x - 4y$ определим стационарные точки и значение функции в этих точках.

Найдем частные производные z'_x и z'_y,:

$$z'_x = (x^3 + 18x^2 - 2y^2 + 105x - 4y)'_x = 3x^2 + 36x + 105;$$

$$z'_y = (x^3 + 18x^2 - 2y^2 + 105x - 4y)'_y = -4y - 4 .$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + 36x + 105 = 0 \\ -4y - 4 = 0 \end{cases}.$$

Первое квадратное уравнение системы имеет 2 решения:

$$x_1 = -7 \text{ и } x_2 = -5.$$

Второе уравнение – одно: $y = 0$.

Очевидно, функция $z = x^3 + 18x^2 - 2y^2 + 105x - 4y$ будет иметь две стационарные точки с координатами: $(-7; 0)$ и $(-5; 0)$.

Для определения значений функции подставим в функцию значения аргументов стационарных точек:

$$z_1(-7;-1) = (-7)^3 + 18 \cdot (-7)^2 - 2(-1)^2 + 105 \cdot (-7) - 4 \cdot (-1) = -194 ;$$

$$z_1(-5;-1) = (-5)^3 + 18 \cdot (-5)^2 - 2(-1)^2 + 105 \cdot (-5) - 4 \cdot (-1) = -198 .$$

7.4.2. Достаточные условия экстремума

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Теорема 11.3. *(достаточное условие экстремума).* Пусть в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{xy}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда в зависимости от значения определителя Δ возможны три случая.

1-й случай $\Delta > 0$.

Если $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0;$ то функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет максимум, если $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то минимум.

2-й случай $\Delta < 0$.

Функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума не имеет.

3-й случай $\Delta = 0$.

В этом случае нельзя с определенностью сказать о наличии экстремума исследуемой функции.

Пример. Исследуем функцию $z = x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 3$ на экстремумы.

Найдем частные производные функции:

$$z'_x = (x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 3)'_x = 2x + 4;$$

$$z'_y = (x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 3)'_y = -8y - 8.$$

Для определения критических точек решим систему:

$$\begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ -8y - 8 = 0 \end{cases}.$$

В результате решения получим единственную точку возможного экстремума: $(-2,-1)$.

Продифференцируем функцию еще один раз. Получим:

$$z''_{xx} = (2x+4)'_x = 2; \qquad z''_{xy} = z''_{yx} = (2x+4)'_y = 0;$$

$$z''_{yy} = (-8y-8)'_y = -8.$$

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16.$$

Поскольку $\Delta < 0$, то функция $z = x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 3$ экстремумов не имеет.

Пример. Исследуем функцию $z = -x^2 - 5xy - 6y^2 - 4x - 5y - 9$ на экстремумы.

Найдем частные производные функции:

$$z'_x = (-x^2 - 5xy - 6y^2 - 4x - 5y - 9)'_x = -2x - 5y - 4;$$

$$z'_y = (-x^2 - 5xy - 6y^2 - 4x - 5y - 9)'_y = -5x - 12y - 5.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2x - 5y - 4 = 0 \\ -5x - 12y - 5 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 23 \\ y = -10 \end{cases}.$$

Найдем частные производные функции второго порядка:

$$z''_{xx} = (-2x-5y-4)'_x = -2; \qquad z''_{xy} = z''_{yx}(-2x-5y-4)'_y = -5;$$

$$z''_{yy} = (-5x-12y-5)'_y = -12.$$

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -12 \end{vmatrix} = 24 - 25 = -1.$$

Так как $\Delta < 0$, то в точке *M_0(23; -10)* нет экстремума.

Пример. Найдем экстремумы функции $z = x^3 + 6x^2 - 2y^2 + 9x - 4y + 2$.

Определим критические точки функции $z = \mathrm{x}^3 + 6\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{y}^2 + 9\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 2$. Для этого найдем частные производные нашей функции:

$$z'_x = (\mathrm{x}^3 + 6\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{y}^2 + 9\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 2)'_x = 3x^2 + 12x + 9;$$

$$z'_y = (\mathrm{x}^3 + 6\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{y}^2 + 9\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 2)'_y = -4y - 4.$$

Решая систему уравнений: $\begin{cases} 3x^2 + 12x + 9 = 0 \\ -4y - 4 = 0 \end{cases}$, получим две критические точки: $(-3; -1)$ и $(-1; -1)$.

Найдем частные производные функции второго порядка и рассчитаем их значения в найденных критических точках: $z''_{1xx} = (3x^2 + 12x + 9)'_x = 6x + 12$; $z''_{1xy} = z''_{yx} = (3x^2 + 12x + 9)'_y = 0$; $z''_{1yy} = (-4y - 4)'_y = -4$.

Рассчитаем определители Δ_1 и Δ_2 для соответствующих критических точек.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_1, y_1) & f''_{xy}(x_1, y_1) \\ f''_{xy}(x_1, y_1) & f''_{yy}(x_1, y_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_2, y_2) & f''_{xy}(x_2, y_2) \\ f''_{xy}(x_2, y_2) & f''_{yy}(x_2, y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -24 < 0.$$

Так как $\Delta_1 > 0$, а $f''_{xx}(x_1, y_1) < 0$, то в точке $(-3; -1)$ наблюдается локальный максимум. Однако в силу того, что $\Delta_2 < 0$, точка $(-1; -1)$ не является экстремумом.

7.5. Исследование функции в замкнутой области

7.5.1. Общая схема исследования функций в замкнутой области

Пусть функция *z=f(x;y)* определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области *D*. Тогда она достигает в некоторых точках *D* своего наибольшего *M* и наименьшего *m* значений (т.н. глобальный экстремум). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области *D*, или в точках, лежащих на границе области (рис. 7.5).

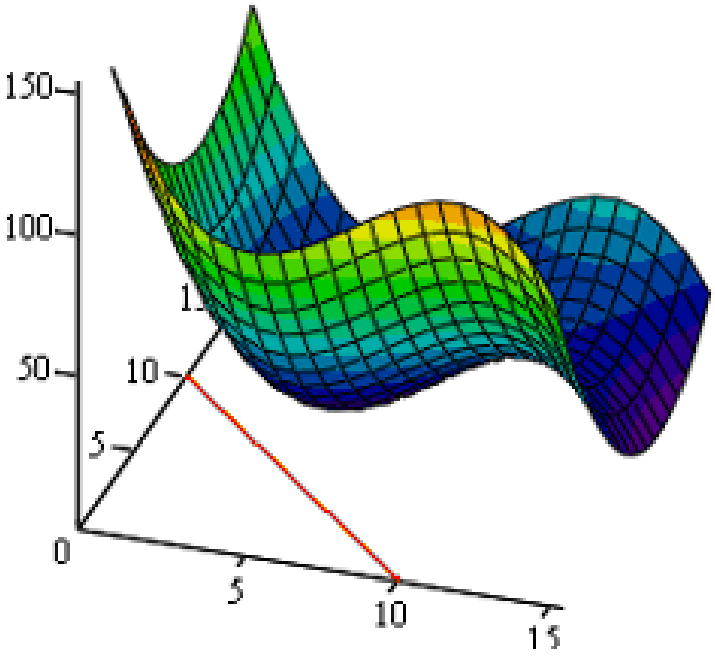


Рис. 7.5. Функция двух переменных.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области D функции $z=f(x;y)$ состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие D, и вычислить значения функции в них.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x;y)$ на границах области.

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

7.5.2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$$

в ограниченной замкнутой области D: $y = 0$; $x = 3$; $x - y + 1 = 0$.

Изобразим область определения функции D (рис. 7.6). На рисунке будут изображены все точки, которые мы будем находить в процессе исследования функции:

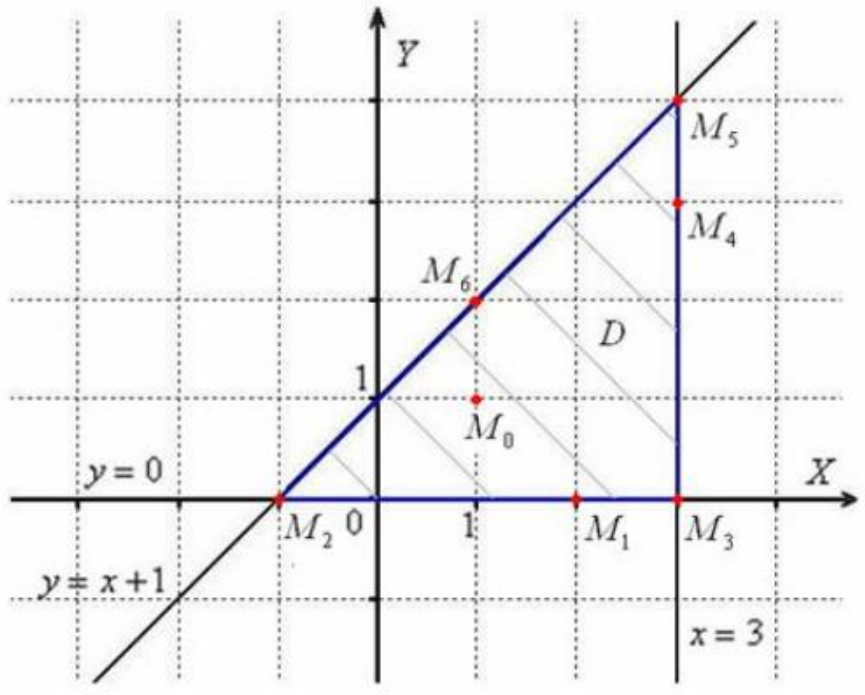


Рис. 7.6. Область определения функции.

1. Найдем все критические точки функции, принадлежащие *D,* и вычислим значения функции в них.

Найдем частные производные функции *z*:

$$z'_x = \left(x^2 + 2xy - y^2 - 4x\right)'_x = 2x + 2y - 0 - 4 = 2x + 2y - 4;$$

$$z'_y = \left(x^2 + 2xy - y^2 - 4x\right)'_y = 0 + 2x - 2y - 0 = 2x - 2y.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Найденная стационарная точка $M_0(1;\ 1)$ принадлежит области *D*. Определим значение функции в этой точке:

$$z(M_0) = z(1;1) = 1 + 2 - 1 - 4 = -2.$$

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границах области. Поскольку граница состоит из сторон треугольника, то исследование удобно проводить в 3 этапа.

1 этап

Рассмотрим нижнюю сторону треугольника. Подставим уравнение границы $y = 0$ в функцию $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$. Получим:

$$z = x^2 - 4x.$$

Найдем производную полученной функции и приравняем ее к нулю:

$$z' = \left(x^2 - 4x\right)' = 2x - 4 = 0.$$

Найденная стационарная точка $M_1(2;\ 0)$ принадлежит нижней стороне границы области D. Найдем значение функции в точке M_1:

$$z(M_1) = z(2;\ 0) = 4 + 0 - 0 - 8 = -4.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка в точках $M_2(-1;\ 0)$ и $M_3(3;\ 0)$:

$$z(M_2) = z(-1;\ 0) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 0^2 - 4 \cdot (-1) = 1 - 0 + 0 + 4 = 5.$$

$$z(M_3) = z(3;\ 0) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0 - 0^2 - 4 \cdot 3 = 9 + 0 - 0 - 12 = -3.$$

2 этап

Рассмотрим правую сторону треугольника. Подставим уравнение границы $x = 3$ в функцию $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$. Получим:

$$z = -y^2 + 6y - 3.$$

Найдем производную полученной функции и приравняем ее к нулю:

$$z' = \left(-y^2 + 6y - 3\right)' = -2y + 6 = 0.$$

Найденная стационарная точка $M_4(3;\ 3)$ принадлежит нижней правой стороне границы области D.

$$z(M_4) = z(3;\ 3) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 + 18 - 12 = 6.$$

Вычислим значения функции на верхнем конце отрезка в точке $M_5(3;\ 4)$:

$$z(M_5) = z(3;\ 4) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 4^2 - 4 \cdot 4 = 9 + 24 - 16 - 12 = 5.$$

3 этап

Рассмотрим правую сторону треугольника. Подставим уравнение границы $y = x + 1$ в функцию $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$. Получим:

$$z = x^2 + 2x(x+1) - (x+1)^2 - 4x = 2x^2 - 4x - 1.$$

Найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$z' = \left(2x^2 - 4x - 1\right)' = 4x - 4.$$

Найденная стационарная точка $M_6(1;\ 2)$ принадлежит левой стороне границы области *D*. Найдем значение функции z в этой точке:

$$z(M_6) = z(1;2) = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 - 2^2 - 4\cdot 1 = 1 + 4 - 4 - 4 = -3.$$

Составим список значений полученных точек:

$$z(M_0) = z(1;\ 1) = -2;$$
$$z(M_1) = z(2,\ 0) = -4;$$
$$z(M_2) = z(-1,\ 0) = 5;$$
$$z(M_3) = z(3,\ 0) = -3;$$
$$z(M_4) = z(3,\ 3) = 6;$$
$$z(M_5) = z(3,\ 4) = 5;$$
$$z(M_6) = z(1,\ 2) = -3.$$

Анализируя список, мы видим, что наибольшее значение, равное шести, функция z достигает в точке $M_4(3,\ 3)$, а наименьшее, равное минус четыре, в точке $M_1(2,\ 0)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте понятие функции нескольких переменных. Что является областью определения функции двух переменных?

2. В чем заключается геометрический смысл непрерывности функции двух переменных?

3. Продемонстрируйте на примере принцип нахождения частных производных функций двух и трех переменных.

4. Каким образом можно найти частные и смешанные производные высших порядков функций нескольких переменных? Приведите примеры.

5. Каким образом осуществляется нахождение производной сложной функции двух переменных.

6. Раскройте понятие дифференциала. Опишите метод нахождения дифференциала.

7. Что такое производная по направлению? Каким образом определяется производная по направлению?

8. Раскройте понятие градиента. Опишите метод нахождения градиента для функции двух переменных в заданной точке.

9. Какой геометрический смысл несет понятие градиента. Покажите на примере принцип использования градиента.

10. Как определяется понятие «экстремум» для функции двух переменных? Приведите примеры экстремальных точек функции двух переменных.

11. Опишите алгоритм нахождения стационарных и критических точек функции двух переменных.

12. Каковы необходимые условия экстремума функции двух переменных?

13. На примере покажите принципы нахождения стационарных точек.

14. Опишите достаточные условия экстремума функции двух переменных.

15. Как осуществляется исследование функции двух переменных на экстремумы?

16. Перечислите этапы нахождения наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в замкнутой области.

17. На примере продемонстрируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных в замкнутой области. Могут ли искомые значения находиться на границах области?

Глава 8. Неопределенные интегралы

Задачи интегрирования функций одной или нескольких переменных являются широко востребованными при решении многих прикладных научных и технических задач в различных областях математики, физики, астрономии, химии, биологии, медицине, технике, производстве и строительстве.

Начиная с классических задач по определению перемещений, массы тел, центра тяжести, длин дуг, площадей поверхностей, объема фигур, количества работы, вычислению электрического заряда, количества теплоты, давления в жидкостях и газах до сложнейших расчетов в производстве современных автомобилей, самолетов, морских судов, космических кораблей, проектирования компьютерных систем, сложных технических приборов, строительства атомных электростанций и небоскребов – нигде невозможно обойтись без интегрального исчисления.

Глава «Неопределенные интегралы» содержит учебный материал, описывающий математический аппарат интегрального исчисления. В рамках данной главы мы изучим основные понятия дифференциального исчисления, рассмотрим методы нахождения неопределенных интегралов, определим принципы использования интегралов для решения прикладных задач.

Изучая вопросы интегрирования мы дадим понятие первообразной функции и неопределенного интеграла, покажем графическую интерпретацию первообразной, опишем основные свойства неопределенного интеграла, представим наиболее употребимые табличные интегралы. Здесь мы также рассмотрим простейшие методы нахождения неопределенных интегралов: с помощью непосредственного интегрирования, внесения под знак дифференциала, изучим метод замены переменных и метод интегрирования по частям. Большой интерес представляют собой алгоритмы интегрирования дробно-рациональных функций с действительными или комплексными коркорнями знаменателей и некоторых типов иррациональных функций.

8.1. Понятие неопределенного интеграла

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу – нахождение самой функции по ее производной или дифференциалу.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для функции $f(x)$ на промежутке *X*, если в каждой точке *x* этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Пример. Первообразной для функции $f(x) = x^2$ является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Однако первообразными для $f(x) = x^2$ будут и любые функции вида $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, поскольку продифференцировав $\frac{x^3}{3} + C$ мы также получим x^2.

Теорема 8.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке *X*, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где *C* – постоянное число.

Учитывая все сказанное выше, дадим определение неопределенного интеграла:

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$.

Обозначается неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$. В данной записи $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением, а *x* – переменной интегрирования.

Операция отыскания неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Пример. Одной из первообразных для функции $f(x)=x^2$ является функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$, тогда неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ можно записать в виде $\int x^2 dx$, а значение полученного неопределенного интеграла равно:

$$\int x^2 dx = F(x)+C = \frac{x^3}{3}+C.$$

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $F(x)+C$, где каждому числовому значению C соответствует определенная кривая. График первообразной называется интегральной кривой (рис. 8.1).

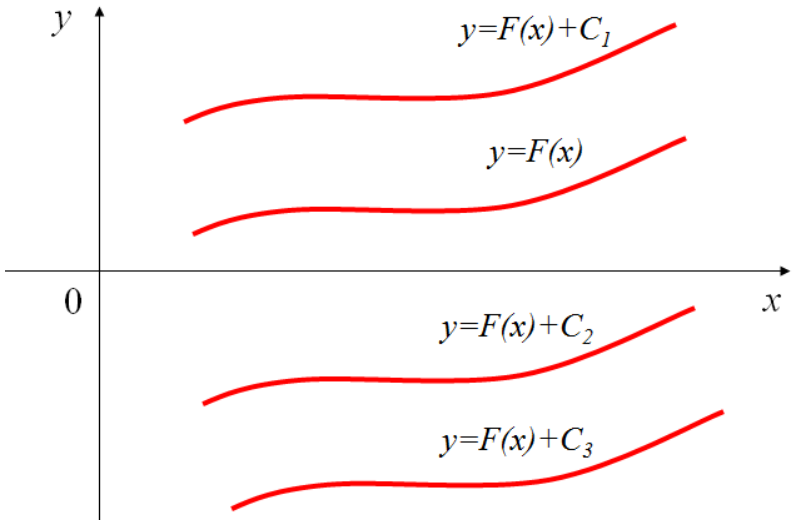


Рис. 8.1. Семейство кривых $F(x)+C$.

8.2. Основные свойства и табличные интегралы

8.2.1. Основные свойства неопределенного интеграла

Из определения непосредственно следуют его основные свойства.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \text{ и } \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции

равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x)\,dx = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы (разности) двух функций равен алгебраической сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\,.$$

5. Инвариантность формулы интегрирования.

Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

8.2.2. Табличные интегралы

Путем обращения формул дифференцирования основных элементарных функций можно получить табличные интегралы:

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1);$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, (x \neq 0);$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1);$

4) $\int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

9) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C;$

11) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C\ (a \neq 0);$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right| + C;$

13) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C;$

14) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

8.3. Простейшие методы интегрирования

Нахождение интегралов – это сложный, творческий и иногда непредсказуемый процесс, однако в ряде стандартных случаев можно выделить основные методы интегрирования, выбираемые в зависимости от вида интегрируемых выражений.

8.3.1. Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием.*

Пример. Найдем интеграл $\int (12x-9)\,dx$.

Используя табличную формулу интегрирования степенной функции $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ и свойство интеграла суммы функций получим:

$$\int (12x-9)\,dx = \int 12x\,dx - \int 9\,dx = 12\frac{x^2}{2} - 9x + C = 6x^2 - 9x + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int (18x^2 + 16x - 20)\,dx$.

Аналогично предыдущему примеру здесь также можно применить свойство интеграла суммы функций:

$$\int (18x^2 + 16x - 20)\,dx = \int 18x^2\,dx + \int 16x\,dx - \int 20\,dx.$$

Затем будем использовать формулу интегрирования степенной функции $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ для каждого из полученных интегралов:

$$\int 18x^2\,dx + \int 16x\,dx - \int 20\,dx = = 18\cdot\frac{x^3}{3} + 16\frac{x^2}{2} - 20x + C =$$
$$= 6x^3 + 8x^2 - 20x + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int (10x+8)x^3\,dx$.

Перед интегрированием раскроем скобки в выражении подынтегральной функции:

$$\int (10x+8)x^3\,dx = \int (10x^4+8x^3)\,dx.$$

Теперь разобьем наш интеграл на два слагаемых и, используя табличные формулы интегрирования степенной функции, получим:

$$\int (10x^4+8x^3)\,dx = \int 10x^4\,dx + \int 8x^3\,dx = 10\cdot\frac{x^5}{5} + 8\frac{x^4}{4} + C = 2x^5+8x^4+C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int (10x^{10}+3^x)\,dx$.

Используя свойство интеграла суммы двух функций и табличные формулы интегрирования степенной $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ и показательной $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$ функций, получим:

$$\int (10x^{10}+3^x)\,dx = 10\cdot\frac{x^{11}}{11} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \left(2x^2+1\right)^2 dx.$

Для нахождения интеграла раскроем скобки в записи функции, а затем разобьем интеграл на три элементарных слагаемых:

$$\int \left(2x^2+1\right)^2 dx = \int \left(4x^4+4x^2+1\right)dx = 4\int x^4 dx + 4\int x^2 dx + \int dx =$$

$$= \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int (19\cos x - 5\sin x)\,dx.$

Учитывая, что $\int \sin x dx = -\cos x + C$ и $\int \cos x dx = \sin x + C$, найдем значение неопределенного интеграла:

$$\int (19\cos x - 5\sin x)\,dx = 19\int \cos x\,dx - 5\int \sin x\,dx = 19\sin x - 5\cos x + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

В этом примере разложим $\cos 2x$ на разность $\cos^2 x - \sin^2 x$, а затем разобьем функцию на две дроби, которые проинтегрируем с помощью табличных интегралов $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ и $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$:

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx =$$

$$= -ctgx - tgx + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{10x^2 + 14x - 1}{x} dx$.

В подынтегральном выражении $\frac{10x^2 + 14x - 1}{x}$ разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$\int \frac{10x^2 + 14x - 1}{x} dx = \int (10x + 14 - \frac{1}{x}) dx.$$

Теперь можно разбить интеграл на три части и, используя соответствующие табличные интегралы, найти неопределенный интеграл:

$$\int (10x + 14 - \frac{1}{x}) dx = \int 10x\, dx + \int 14\, dx - \int \left(\frac{1}{x} \right) dx = 10\frac{x^2}{2} + 14x - \ln|x| + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{10(x^2 - 3x - 270)}{x - 18} dx$.

В подынтегральном выражении $\frac{10(x^2 - 3x - 270)}{x - 18}$ попробуем сократить дробь. Для этого разложим трехчлен $x^2 - 3x - 270$ на множители.

Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = 9 + 4 \cdot 270 = 1089$.

Тогда $x_1 = \frac{3 - \sqrt{1089}}{2} = \frac{3 - 33}{2} = -15$, а $x_2 = \frac{3 + \sqrt{1089}}{2} = \frac{3 + 33}{2} = 18$. Таким образом, трехчлен $x^2 - 3x - 270$ можно представить, как $(x + 15)(x - 18)$.

Упростим неопределенный интеграл:

$$\int \frac{10(x^2-3x-270)}{x-18}dx = \int \frac{10(x+15)(x-18)}{x-18}dx = \int (10(x+15))dx.$$

Теперь раскроем скобки, разобьем интеграл на два неопределенных интеграла:

$$\int (10(x+15))dx = \int (10x+150)dx = 10\int x\,dx + 150\int dx.$$

И, наконец, используя табличный интеграл степенной функции получим решение:

$$10\int x\,dx + 150\int dx = 10\frac{x^2}{2} + 150x + C = 5x^2 + 150x + C.$$

8.3.2. Внесение под знак дифференциала

При сведении заданного интеграла к табличному часто используются преобразования, использующие внесение под знак дифференциала интегрируемых выражений.

Метод основан на определении дифференциала: $f'(x)dx = d(f(x))$. Он используется, если в произведении подынтегральной функции и дифференциала можно увидеть произведение другой функции и дифференциала от нее.

При внесении под знак дифференциала можно использовать некоторые преобразования дифференциала:

1) $du = d(u \pm a),\ \ a - const;$ 2) $du = \frac{1}{a}d(au),\ a - const;$

3) $u^n du = \frac{1}{n+1}d\left(u^{n+1}\right);$ 4) $\frac{du}{u} = d(\ln u);$

5) $\sin u du = -d(\cos u);$ 6) $\cos du = d(\sin u).$

Пример. Найдем интеграл $\int 4\cos(x-12)dx$.

Используя преобразование $du = d(u \pm a)$, можно получить под знаком дифференциала выражение $x-12$. Заодно вынесем четверку за знак дифференциала. Таким образом,

$$\int 4\cos(x-12)\,dx = 4\int \cos(x-12)\,d(x-12).$$

Теперь вспомним, что $\int \cos x dx = \sin x + C$. Учитывая этот факт получим значение неопределенного интеграла:

$$4\int \cos(x-12)\,d(x-12) = 4\sin(x-12) + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{x-4}$.

Воспользуемся преобразованием $du = d(u \pm a)$ и изменим дифференциал с dx на $d(x-4)$. В результате получим:

$$\int \frac{dx}{x-4} = \int \frac{d(x-4)}{x-4}.$$

Теперь мы видим, что наш интеграл приведен к табличному виду $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Зная, что если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$. Окончательно получим:

$$\int \frac{d(x-4)}{x-4} = \ln|x-4| + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{2xdx}{x^2-5}$.

Воспользуемся преобразованием $u^n du = \frac{1}{n+1} d(u^{n+1})$. Для этого внесем под знак дифференциала переменную x. В результате получим:

$$\int \frac{2xdx}{x^2-5} = \int \frac{2x^0 dx}{x^2-5} = \int \frac{2 \cdot \frac{1}{2} dx^2}{x^2-5} = \int \frac{dx^2}{x^2-5}.$$

Теперь, согласно преобразованию $du = d(u \pm a)$, отнимем от значения x^2, находящегося под знаком дифференциала, значение 5:

$$\int \frac{dx^2}{x^2-5} = \int \frac{d(x^2-5)}{x^2-5}.$$

Полученное выражение можно рассматривать, как табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, где роль переменной x выполняет выражение $x^2 - 5$.

$$\int \frac{d(x^2-5)}{x^2-5} = \ln\left|x^2-5\right| + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int (2x+3)^{17} dx$.

Для нахождения интеграла используем преобразования $u^n du = \frac{1}{n+1} d\left(u^{n+1}\right)$ степенной функции:

$$\int (2x+3)^{17} dx = \int (2x+3)^{17} \cdot \frac{1}{2} d(2x+3) = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{17} d(2x+3).$$

Используя табличный интеграл $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ получим окончательный ответ:

$$\frac{1}{2}\int (2x+3)^{17} d(2x+3) = = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{18}}{18} + C = \frac{(2x+3)^{18}}{36} + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int e^{2x+1} dx$.

Внесем под знак дифференциала выражение $2x+1$. Для этого воспользуемся преобразованием $u^n du = \frac{1}{n+1} d\left(u^{n+1}\right)$:

$$\int e^{2x+1} dx = \int e^{2x+1} \cdot \frac{1}{2} d\left(2x+1\right).$$

Вынесем за знак интеграла $\frac{1}{2}$, а затем воспользуемся табличным интегралом $\int e^x dx = e^x + C$:

$$\int e^{2x+1} \cdot \frac{1}{2} d\left(2x+1\right) = \frac{1}{2}\int e^{2x+1} d\left(2x+1\right) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

Запишем интеграл в стандартном виде:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

Зная, что $\frac{du}{u} = d(\ln u)$, внесем под знак дифференциала $\frac{1}{x}$, а затем, используя табличный интеграл $\frac{du}{u} = d(\ln u)$, получим:

$$\int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln(\ln x) + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int tgx dx$.

Выполним тождественные преобразования подынтегральной функции:

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}.$$

Используя преобразование $\sin u du = -d(\cos u)$, внесем под знак дифференциала $\sin x$:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{d(-\cos x)}{\cos x}.$$

Вынесем за знак дифференциала и за знак интеграла минус, стоящий перед $\cos x$, а затем, используя табличный интеграл $\frac{du}{u} = d(\ln u)$, найдем неопределенный интеграл:

$$\int \frac{d(-\cos x)}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$.

В данном примере будем преобразовать преобразование $\cos du = d(\sin u)$. Внесем под знак дифференциала $\cos x$:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x).$$

А теперь, учитывая, что $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, получим:

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{10x^4 dx}{x^5 + 12}$.

Внесем под знак дифференциала выражение $2x^4$. Для этого воспользуемся преобразованием $u^n du = \frac{1}{n+1} d\left(u^{n+1}\right)$:

$$\int \frac{10x^4 dx}{x^5 + 12} = \int \frac{10 \cdot \frac{1}{5} d(x^5)}{x^5 + 12} = \int \frac{2d(x^2)}{x^5 + 12}.$$

Так как $du = d(u \pm a)$, то

$$\int \frac{2d(x^5)}{x^5 + 12} = \int \frac{2d(x^5 + 12)}{x^5 + 12}.$$

Теперь воспользуемся табличным интегралом $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ и окончательно найдем решение:

$$\int \frac{2d(x^5 + 12)}{x^5 + 12} = 2\ln|x^5 + 12| + C.$$

8.3.3. Метод замены переменных

Метод интегрирования заменой переменных (подстановкой) заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

Для нахождения неопределенного интеграла сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получим *формулу интегрирования подстановкой*:

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Следует запомнить, что после нахождения интеграла следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Пример. Найдем интеграл $\int (3x+2)^5 dx$.

Введем новую переменную $t = 3x + 2,$ выразим аргумент x через t, продифференцируем полученное равенство $x = \frac{t-2}{3}$, а затем, перейдя к новой переменной, найдем новый интеграл:

$$\int (3x+2)^5 dx = \left[t = 3x+2,\ x = \frac{t-2}{3}, dx = \frac{dt}{3} \right] =$$

$$= \int t^5 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^5 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^6}{6} + C.$$

Теперь перейдем от новой переменной интегрирования t назад к переменной x:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \cos(3x+2)^5 dx$.

Снова вводим новую переменную $t = 3x + 2$ и выразим аргумент x через t. Продифференцируем полученное равенство $x = \frac{t-2}{3}$, а затем, перейдя к новой переменной, найдем новый интеграл:

$$\int \cos(3x+2)^5 dx = \left[t = 3x+2,\ x = \frac{t-2}{3}, dx = \frac{dt}{3} \right] =$$

$$\frac{1}{3}\int \cos t\, dt = \frac{1}{3}\int \sin t\, dt + C.$$

Переходя от переменной t назад к переменной x, получим:

$$\frac{1}{3}\int \sin t\, dt + C = \frac{1}{3}\int \sin(3xч + 2)\, dt + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{x^3}{x^8+1} dx$.

Выполняя замену $t = x^4$ найдем интеграл методом замены переменных:

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}dx = \left[t = x^4, dt = 4x^3 dx, x^3 dx = \frac{dt}{4} \right] = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4} arctgt + C .$$

Перейдем от переменной *t* назад к переменной *x.* В результате получим:

$$\frac{1}{4} arctgt + C = \frac{1}{4} arctgx^4 + C .$$

Пример. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{5xdx}{5x^2-3}$.

Для нахождения неопределенного интеграла сделаем замену $5x^2 - 3 = t$ и продифференцируем полученное равенство. Выражение $10xdx = dt$ разделим на 2 и подставим $5xdx = \frac{dt}{2}$ в исследуемый интеграл:

$$\int \frac{5xdx}{5x^2-3} = \left[5x^2 - 3 = t, \quad 10xdx = dt, \quad 5xdx = \frac{dt}{2} \right] = \int \frac{dt}{2} \cdot \frac{1}{t}.$$

Теперь вынесем $\frac{1}{2}$ за знак интеграла и найдем получившийся табличный интеграл:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \ = \frac{1}{2}\ln|t| + C .$$

Переходя от переменной *t* назад к переменной *x,* получим:

$$\frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|5x^2 - 3| + C .$$

Пример. Найдем неопределенный интеграл $\int x\sqrt{x-1}\,dx$.

Очевидно, что для нахождения неопределенного интеграла нужно сделаем замену $\sqrt{x-1} = t$ и продифференцируем полученное равенство. Выразим *x* через *t* и продифференцируем полученное равенство. Полученные выражения $\sqrt{x-1} = t$ и $dx = 2dt$ подставим в исследуемый интеграл:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left[\sqrt{x-1} = t, \quad x = t^2 + 1, \quad dx = 2dt \right] = \int (t^2+1) \cdot t \cdot 2t\,dx .$$

Выполним действия умножения в подынтегральной функции и разобьем интеграл на два слагаемых и найдем неопределенный интеграл:

$$\int (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dx = 2\int (t^4+t^2)\,dx = 2\int t^4\,dx + 2\int t^2\,dx = \frac{2}{5}\int t^5 + \frac{2}{3}\int t^3 + C.$$

Переходя от переменной *t* назад к переменной *x,* окончательно получим:

$$\frac{2}{5}\int \sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\int \sqrt{(x-1)^3} + C.$$

8.3.4. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две функции дифференцируемые функции от аргумента x. Тогда по правилу дифференцирования произведения $d(uv) = udv + vdu$ или $udv = d(uv) - vdu$.

Интегрируя левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Полученная формула называется формулой интегрирования по частям. Она дает возможность свести вычисление сложного интеграла $\int udv$ к возможно более простому интегралу $\int vdu$.

Существует три типа интегралов, интегрируемых по частям.

1-й тип интегралов, интегрируемых по частям

К этому типу относятся интегралы вида: $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, где $P(x)$ – многочлен произвольной степени, *k* – константа.

В этом случае можно взять $u = P(x)$, а за dv обозначить остальные сомножители.

Пример. Найдем методом интегрирования по частям интеграл $\int x\sin 2xdx$.

Положим $u = x$, а все остальное множители подынтегрального выражения $\sin 2xdx$ обозначим, как $dv = \sin 2xdx$. Продифференцируем равенство $u = x$, тогда $du = dx$. Интегрируя уравнение $dv = \sin 2xdx$, получим $v = \int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

$$\int x\sin 2x dx = \left[\begin{array}{c} u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \sin 2x \Rightarrow v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right] =$$

Используя формулу интегрирования по частям, получим решение:

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C .$$

Пример. Найдем неопределенный интеграл $\int xe^x dx$.

Положим $u = x$, а все остальное множители подынтегрального выражения $xe^x dx$ обозначим, как $dv = e^x dx$. Продифференцируем равенство $u = x$, тогда $du = dx$. Интегрируя уравнение $dv = e^x dx$, получим $v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

$$\int x\sin 2x dx = \left[\begin{array}{c} u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right] =$$

Используя формулу интегрирования по частям, получим решение:

$$= xe^x - \int e^x dx = \ xe^x - e^x + C$$

2-й тип интегралов, интегрируемых по частям

К этому типу относятся интегралы вида: $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x) arc\,tg\,x\,dx$, $\int P(x) arc\,ctg\,x\,dx$.

Для нахождения интеграла необходимо за $P(x)dx$ определить dv, а за u взять все остальные множители подынтегрального выражения.

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Задачу будем решать методом интегрирования по частям. Для решения задачи положим $u = \ln x$ и $dv = \frac{dx}{x^2}$. Учитывая это, получим $du = \frac{dx}{x}$ и $v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$.

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] =$$

Подставляя выражения du и v в формулу интегрирования по частям найдем неопределенный интеграл:

$$= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} = -\ln x \cdot \frac{1}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + C .$$

3-й тип интегралов, интегрируемых по частям

К этому типу относятся интегралы вида: $\int e^{ax} \sin bx\,dx$, $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, где a и b – константы.

В этом случае за u можно принять тригонометрические функции $\sin bx$ или $\cos bx$, а все остальные множители в подынтегральном выражении обозначить, как dv.

Пример. Найдем интеграл $\int e^x \sin 3x dx$, интегрируя его по частям.

Введем обозначения: $u = \sin 3x$ и $dv = e^x dx$. Тогда $du = 3\cos 3x dx$, а $v = \int e^x dx = e^x$.

$$\int e^x \sin 3x dx = \left[\begin{array}{c} u = \sin 3x \quad \Rightarrow \quad du = 3\cos 3x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \displaystyle\int e^x dx = e^x \end{array}\right] =$$

Подставив полученные выражения в интеграл получим:

$$\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - \int e^x \cdot 3\cos 3x dx = e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx.$$

В результате преобразований мы снова получили интеграл третьего типа. Еще раз применим метод интегрирования по частям. Введем новые обозначения: $u = \cos 3x$ и $dv = e^x dx$. Тогда $du = -3\sin 3x dx$, а $v = \int e^x dx = e^x$.

$$e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx = \left[\begin{array}{c} u = \cos 3x \quad \Rightarrow \quad du = -3\sin 3x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \displaystyle\int e^x dx = e^x \end{array}\right] =$$

И снова подставим полученные выражения в интеграл:

$$e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9\int e^x \sin 3x dx.$$

Заметим, что в полученном выражении содержится начальное значение интеграла. Запишем уравнение, в левую часть которого поместим исходный интеграл, а в правую его преобразованный на последнем шаге вид:

$$\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9\int e^x \sin 3x dx.$$

Решим это уравнение:

$$10\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x$$

Разделив обе части уравнения на 10 получим значение интеграла:

$$\int e^x \sin 3x dx = \frac{1}{10} e^x \sin 3x - \frac{3}{10} e^x \cos 3x + C.$$

8.4. Интегрирование рациональных дробей

8.4.1. Приведение дроби к правильной

Для интегрирования дробно-рациональных функций часто достаточно привести дробь к правильной, разделив числитель на знаменатель с остатком.

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{2x^2 - 9x - 34}{2x + 5} dx$.

Разделим числитель дроби на знаменатель: $\frac{2x^2 - 9x - 34}{2x + 5} = x - 7 + \frac{1}{2x + 5}$,

а затем проинтегрируем полученное выражение. В результате получим:

$$\int \frac{2x^2 - 9x - 34}{2x + 5} dx = \int \left(x - 7 + \frac{1}{2x + 5} \right) dx.$$

Разобьем интеграл на два слагаемых:

$$\int \left(x - 7 + \frac{1}{2x + 5} \right) dx = \int x dx - 7\int dx + \int \frac{dx}{2x + 5}.$$

Два первых интеграла являются табличными, а третий найдем внесение под знак дифференциала:

$$\int x dx - 7\int dx + \int \frac{dx}{2x + 5} = \frac{x^2}{2} - 7x + \frac{1}{2}\int \frac{d(2x + 5)}{2x + 5}.$$

Окончательно получим решение, сделав соответствующие преобразования:

$$\frac{x^2}{2}-7x+\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+5)}{2x+5}=\frac{x^2}{2}-7x+\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C.$$

Некоторые интегралы, содержащие дробно-рациональные подынтегральные функции, находятся методом внесения под знак дифференциала или замены переменной:

$$\int\frac{dx}{(6x-1)^7}=\frac{1}{6}\int\frac{d(6x-1)}{(6x-1)^7}=\frac{1}{6}\int(6x-1)^{-7}d(6x-1)=$$

$$=\frac{1}{6}(6x-1)^{-6}+C=\frac{1}{6(6x-1)^6}+C.$$

8.4.2. Разложение правильной дроби

Для упрощения интегрирования сложных правильных дробей их можно разложить в сумму элементарных дробей, а затем проинтегрировать полученные слагаемые.

Теорема 12.2. Правильную рациональную дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$, в которой знаменатель разложен на множители:

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_1x+g_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+g_m)^{r_m},$$

а $x^2+p_ix+g_i$ – трехчлен с отрицательным дискриминантом, можно единственным образом разложить на сумму элементарных делителей:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+..+\frac{A_r}{(x-a)^r}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+2px+q)^l}+\ldots,$$

где $A_1,A_2,..,A_r,..,M_1,N_1,M_2,N_2,..,M_l,N_l,..$ – некоторые вещественные числа.

Пример. Найдем интеграл от правильной дроби $\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}dx.$.

Выполним преобразования подынтегрального выражения. Разложим знаменатель дроби на множители, предварительно отыскав корни квадратного трехчлена x^2+5x-6.

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6}=\frac{x+2}{(x-1)(x+6)}.$$

Разобьем получившуюся дробь на сумму двух дробей, числители которых представим в виде переменных A и B:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+6)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}.$$

И, приводя к общему знаменателю, сложим их:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}=\frac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)}=\frac{(A+B)x+6A-B}{(x-1)(x+6)}.$$

Заметим, что $x+2=(A+B)x+6A-B$.

Тогда получим систему двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}A+B=1\\6A-B=2\end{cases}.$$

Решая систему, получим: $A=\frac{3}{7}, B=\frac{4}{7}$.

Отсюда следует: $\frac{x+2}{x^2+5x-6}=\frac{\frac{3}{7}}{x-1}+\frac{\frac{4}{7}}{x+6}$.

Найдем интеграл от преобразованного выражения:

$$\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}dx=\frac{3}{7}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x+6}=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Выполним преобразования подынтегрального выражения. Разложим знаменатель дроби на множители, предварительно отыскав корни квадратного трехчлена x^2-3x+2.

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}.$$

Разобьем получившуюся дробь на сумму двух дробей, числители которых представим в виде переменных A и B:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю, сложим дроби:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A^{\backslash x-2}}{x-1} + \frac{B^{\backslash x-1}}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{0x+1}{(x-1)(x-2)}.$$

Заметим, что $1 = (A+B)x - 2A - B$.

Тогда получим систему двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}.$$

Решая систему, получим: $A=-1, B=1.$

Отсюда следует: $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

Найдем интеграл от преобразованного выражения:

$$\int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

8.4.3. Знаменатели дробей с комплексными корнями

Если знаменатель нельзя разложить на множители, то необходимо выполнить тождественные преобразования дробей и использовать уже изученные методы интегрирования

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$.

Знаменатель дроби не разлагается на множители в области действительных чисел, поскольку дискриминант трехчлена меньше нуля. Преобразуем знаменатель дроби:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6} = \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+2}.$$

Заметим, что полученный интеграл соответствует табличному $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$. Используя это, получим:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2+2} = \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x-2}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg \frac{x-2}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx =$.

Здесь также знаменатель нельзя разложить на множители. Теперь преобразуем числитель:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{x+1+2}{x^2+2x+2} dx.$$

Разобьем интеграл на две части:

$$\int \frac{x+1+2}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2} dx =$$

Найдем полученные интегралы методом внесения под дифференциал:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} + 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} + 2 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) + 2 arctg(x+1) + C.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятия первообразной функции и неопределенного интеграла. Каким образом записывается определенный интеграл?

2. Как называется операция отыскания неопределенного интеграла от функции?

3. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете? На примерах продемонстрируйте перечисленные свойства.

4. Для чего нужны табличные интегралы. Выпишите все табличные интегралы, показанные в лекции.

5. Какие методы нахождения неопределенного интеграла вы знаете?

6. Опишите метод непосредственного интегрирования. На чем основан этот метод?

7. Объясните суть метода внесение под знак дифференциала. Приведите примеры использования этого метода.

8. Какие методы нахождения неопределенного интеграла вы знаете?

9. Объясните суть метода замены переменой нахождения неопределенного интеграла. Приведите пример интегрирования функций методом замены переменой.

10. В чем состоит принцип нахождения неопределенного интеграла методом интегрирования по частям?

11. Какие интегралы каких типов можно находить, используя метод интегрирования по частям?

12. В чем заключается различие нахождения интегралов первого, второго и третьего типов?

13. Укажите особенности интегрирования неправильных рациональных дробей.

14. В каком случае можно разложить правильную дробь на слагаемые, упрощая процедуру интегрирования?

15. Каким образом можно интегрировать рациональные дроби, знаменатели которых имеют комплексные корни?

Глава 9. Определенные, несобственные и кратные интегралы

9.1. Понятие определенного интеграла

9.1.1. Основные определения

Исторически задача нахождения определенного интеграла сводится к задаче об определении площади криволинейной трапеции.

Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$.

Рассмотрим криволинейную трапецию ABCD (рис. 9.1). Разделим основание AB нашей фигуры произвольным образом на части и проведем ординаты, соответствующие точкам деления. Тогда криволинейная трапеция разобьется на ряд полосок:

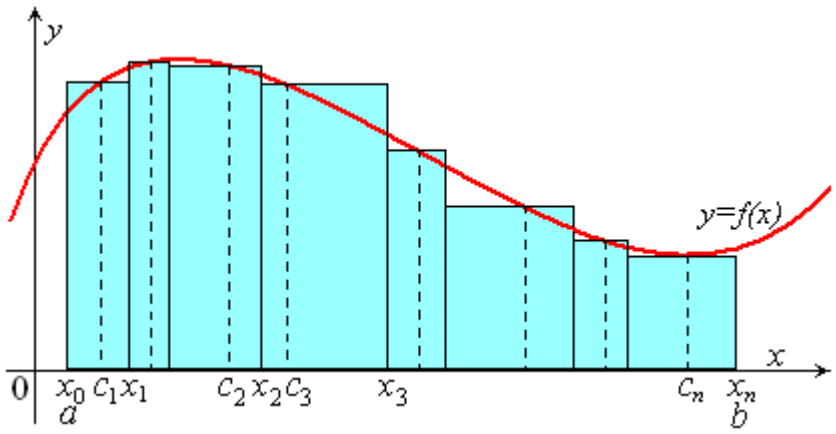


Рис. 9.1. Разбиение интеграла.

Заменим теперь приближенно каждую полоску некоторым прямоугольником, основание которого то же, что и у полоски, а высота совпадает с одной из ординат полоски, скажем, с крайней слева. Таким образом, криволинейная фигура заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников.

Обозначим абсциссы точек деления через

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < .. < x_i < x_{i+1} < .. < x_n = b .$$

Основание i-того прямоугольника $(i = 0, 1, 2, .., n-1)$, очевидно, равно разности $x_{i+1} - x_i$, которую будем обозначать Δx_i. Высота, исходя из

сказанного, будет равна $y_i = f(x_i)$. Поэтому площадь *i*-того прямоугольника будет $y_i \Delta x_i = f(x_i)\Delta x_i$. Просуммировав площади всех прямоугольников, получим приближенное значение площади P криволинейной трапеции:

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \text{ или } P = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i .$$

Погрешность этого равенства при увеличении количества разбиений отрезка $[a, b]$ стремится к нулю, т.е. при безграничном убывании всех Δx_i точное значение площади получится равным пределу

$$P = \lim \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

в предположении что все длины Δx_i стремятся к нулю одновременно.

Для обозначения предельного значения суммы $\sum y\Delta x$ Готфрид Лейбниц ввел символ $\int ydx$, где ydx напоминает типичное слагаемое суммы, а $\int$ – это стилизованная буква S (от лат. "Summa" – сумма). Так как площадь, представляющая это предельное значение, в то же время является первообразной для функции $f(x)$, то тот же символ сохранился и для обозначения первообразной функции.

Возвращаясь к выше сказанному, выберем в каждом из отрезков Δx_i произвольно точку ξ_i $(x_i \le \xi_i \le x_{i+1})$ и образуем сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + .. + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, соответствующая данному разбиению $[a,b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i. При этом сохранился геометрический смысл: σ есть сумма площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$, если $f(x) \ge 0$.

Обозначим через λ длину наибольшего отрезка разбиения Δx_i, т.е.

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}.$$

Если существует конечный предел I интегральной суммы

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + .. + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

при $\lambda \to 0$, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

или

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a,b]$, числа *a* и *b* называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ *– подынтегральной функцией*, *x – переменной интегрирования*.

9.1.2. Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм как правило связано с некоторыми трудностями. Наряду с этим методом, существует более удобный метод вычисления определенных интегралов, который основывается на ранее установленной связи между определенным и неопределенным интегралами.

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке первообразные, причем одной из них является функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C .$$

Пусть $F(x)$ – любая другая первообразная для функции $f(x)$ на том же отрезке $[a,b]$. Имеет место равенство:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \qquad a \le x \le b,$$

где C – некоторое число.

Подставляя в него значение $x = a$, получим:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \qquad 0 = F(a) + C, \qquad C = -F(a).$$

Тогда для любого $x \in [a,b]$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получаем основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

которая называется *формулой Ньютона – Лейбница*.

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать так:

$$F(x)\Big|_a^b \text{ или } \left[F(x)\right]_a^b.$$

Отметим, что в формуле Ньютона-Лейбница в качестве $F(x)$ можно взять любую первообразную для $f(x)$ на $[a,b]$. Эта формула дает простой метод вычисления определенного интеграла:

Теорема 12.1. Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной, вычисленных для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Пример. Найдем определенный интеграл $\int_1^3 x^3 dx$.

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$

Пример. Найдем определенный интеграл $\int_a^b \sin x dx$.

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

Заметим, что при использовании формулы Ньютона – Лейбница задача вычисления определенного интеграла сводится к нахождению неопределенного интеграла. При этом здесь оказывается удобным использование табличных интегралов.

9.1.3. Свойства определенного интеграла

Рассмотрим наиболее общие свойства, используемые для вычисления определенных интегралов.

1. Если функция *f(x)* интегрируема на отрезке [*a; b*] и *k* – постоянное число, то

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

2. Если функции *f(x)* и *g(x)* интегрируемы на отрезке [*a; b*], то

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

4. При перемене мест верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5. Если функции *f(x)* интегрируема на отрезке [*a; b*] и $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. *Теорема о* «*среднем*». Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a; b*], то существует точка $c \in [a; b]$, такая что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

7. Если функции *f(x)* интегрируема на отрезке [*a; b*] и $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. Оценка интеграла. Если *m* и *M* – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *f(x)* на отрезке [*a; b*], ($a < b$), то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

9.2. Особенности вычисления определенных интегралов

Для вычисления определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница и все методы для нахождения неопределенных интегралов, описанные ранее.

9.2.1. Непосредственное интегрирование

При использовании непосредственного интегрирования вычисление определенного интеграла сводится к нахождению первообразной, с использованием основных свойств неопределенных и определенных интегралов, а затем применению формулы Ньютона-Лейбница.

Пример. Найдем определенный интеграл $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$.

$$\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right) =$$

$$= \frac{8}{3} - 4 + 6 - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = \frac{7}{3}.$$

Пример. Найдем определенный интеграл $\int\limits_{\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(3x^2 e^x + 3\right)}{\lg(4x-5)} dx$.

Мы видим, что оба предела интегрирования равны между собой, то значение данного определенного интеграла будет равно нулю:

$$\int\limits_{\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(3x^2 e^x + 3\right)}{\lg(4x-5)} dx = 0.$$

Пример. Найдем определенный интеграл $\int\limits_{2}^{1} \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$.

Учитывая, что интеграл $\int\limits_{2}^{1} \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$ можно получить, поменяв местами пределы интегрирования найденного ранее определенного интеграла $\int\limits_{1}^{2} \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$, значение данного интеграла будет равно

$$\int\limits_{2}^{1} \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = -\int\limits_{1}^{2} \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = -\frac{7}{3}.$$

Пример. Найдем сумму интегралов $\int\limits_{2}^{e} \left(x^2 - 1\right) dx + \int\limits_{e}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx$.

Учитывая, что $2 < e \approx 2{,}71928 < 3$ сумму $\int\limits_{2}^{e} \left(x^2 - 1\right) dx + \int\limits_{e}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx$ можно представить, как определенный интеграл $\int\limits_{2}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx$:

$$\int\limits_{2}^{e} \left(x^2 - 1\right) dx + \int\limits_{e}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx = \int\limits_{2}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right)\Bigg|_{2}^{3} =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2 \right) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

9.2.2. Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;

2) функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi(t)'$ на отрезке $[\alpha; \beta]$;

3) $a= \varphi(\alpha), b= \varphi(\beta)$;

4) функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

При вычислении определенный интегралов методом замены переменной следует иметь ввиду, что возвращаться к старой переменной, как это было в случае с неопределенными интегралами, не требуется, кроме того, не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Пример. Вычислим определенный интеграл $\int_0^3 e^{2x+1}dx$.

Решение осуществим методом замены переменной. Сделаем замену $2x+1=t,$ тогда $dx=\frac{1}{2}dt.$

Заменим пределы интегрирования, подставляя значения пределов в нашу замену. Если $x=0$, то $t=1$, если $x=3$, то $t=7$.

Выполним дальнейшие преобразования и применяя формулу Ньютона-Лейбница вычислим интеграл:

$$\int_0^3 e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^7 e^t dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_1^7 = \frac{1}{2}e^7 - \frac{1}{2}e^1 = \frac{1}{2}\left(e^7 - e^1\right).$$

Пример. Вычислим определенный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Сделаем замену $1+\sqrt{x}=t$, тогда $dx=2(t-1)dt$.

Изменим пределы интегрирования: $x=0 \Rightarrow t=1,\ \ x=4 \Rightarrow t=3$.

Теперь вычислим интеграл:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2(t-1)dt}{t} = 2\int_1^3 \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \; 2\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^3 =$$

$$= 2\left(3-\ln|3|\right) - 2\left(1-\ln|1|\right) = 6 - 2\ln 3 - 2 + 0 = 4 - 2\ln 3 .$$

Пример. Вычислим определенный интеграл $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx.$

Сделаем замену $1+\ln x = t$, тогда $dt = \frac{dx}{x}$. Заменим пределы интегрирования, подставляя значения пределов в нашу замену. Если $x_1 = 1$ и $x_2 = e$ то нижний и верхний пределы станут равны $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Выполним дальнейшие преобразования и применяя формулу Ньютона-Лейбница вычислим интеграл:

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx = \; \int_1^2 t dt = \; \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \; \frac{3}{2}.$$

Пример. Вычислим определенный интеграл $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

В этом случае применим замену $t = \sqrt{x}$. Продифференцируем выражение $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$, тогда $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, а пределы интегрирования станут равны $t_1 = \frac{\pi}{3}$ и $t_2 = \pi$. Теперь вычислим определенный интеграл:

$$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \; 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos t dt = \; 2\sin t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \; 2(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}\,.$$

9.2.3. Интегрирование по частям

Использование методов интегрирования по частям для определенных интегралов отличается только использованием Формулы Ньютона-Лейбница, замены пределов интегрирования здесь не требуется.

Пример. Вычислим интеграл $\int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.

Для решения задачи положим $u = x$ и $dv = \sin 2x dx$. Тогда выражения для *du* и *v* будут следующими: $du = dx, \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x.$ Используя эти факты рассчитаем значение определенного интеграла:

$$\int_0^{\pi} x \sin 2x dx = x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x dx = \pi\left(-\frac{1}{2}\cos 2\pi\right) -$$

$$-0\left(-\frac{1}{2}\cos 0\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример. Вычислим интеграл $\int_1^e (3x - 1)\ln x\, dx.$

Для решения задачи положим $u = \ln x$ и $dv = (3x-1)dx$. Тогда выражения для *du* и *v* будут следующими:

$$du = \frac{1}{x}dx; \qquad v = \int (3x-1)dx = \frac{3x^2}{2} - x\,. -\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Используя значения *du* и *v* рассчитаем значение определенного интеграла:

$$\int_1^e (3x - 1)\ln x\, dx = \ln x\left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\Big|_1^e - \int_1^e\left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln e\left(\frac{3e^2}{2} - e\right) - \ln 1\left(\frac{3\cdot 1^2}{2} - 1\right) - \int_1^e\left(\frac{3x}{2} - 1\right)dx = \frac{3e^2}{2} - e - 0 - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^e =$$

$$= \frac{3e^2}{2} - e - \left(\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{e^2}{2} - e\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1^2}{2} - 1\right)\right) == \frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

9.2.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*-a; a*], симметричном относительно точки *x=0*. Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция}, \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция}. \end{cases}$$

Пример. Найти значение определенного интеграла $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin\frac{\pi x}{2} dx$.

Мы видим, что наша функция $f(x) = x^2 \sin\frac{\pi x}{2}$ непрерывна и определена симметричном отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$. Исследуем функцию $f(x)$ на четность-нечетность:

$$f(-x) = (-x)^2 \sin\frac{\pi(-x)}{2} = -x^2 \sin\frac{\pi x}{2} = -f(x).$$

Так как $f(-x) = -f(x)$, то можно заключить, что функция $f(x) = x^2 \sin\frac{\pi x}{2}$ является нечетной, а, следовательно, значение определенного интеграла $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin\frac{\pi x}{2} dx$ равно нулю.

9.3. Геометрические приложения определенного интеграла

9.3.1. Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция *y=f(x)* неотрицательна и непрерывна на отрезке [*a*, *b*]. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла (определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции):

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

На рисунке 9.2 показана криволинейная трапеция соответствующая интегралу $\int_a^b f(x)dx.$

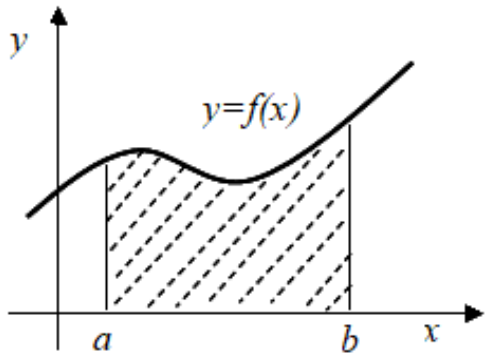


Рис. 9.2. Нахождение площади криволинейной трапеция.

Площадь фигуры (рис. 9.3), ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, при условии $f1(x) \le f2(x)$, можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

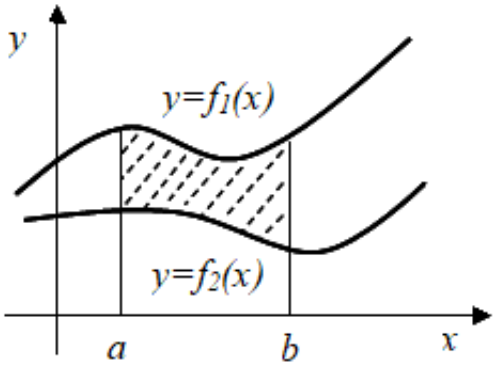


Рис. 9.3. Площадь фигуры, ограниченная кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$.

Если функция $y = f(x)$ неположительна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ (рис. 9.4), то площадь над кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a, b]$, взятому со знаком минус:

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

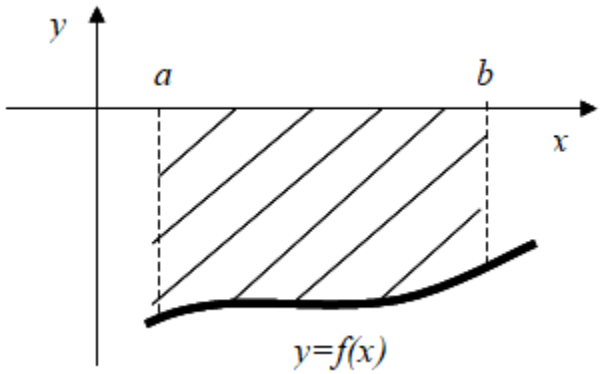


Рис. 9.4. Случай неположительной функции $y = f(x)$.

Если плоская фигура имеет «сложную» конфигурацию (рис. 9.5), то ее необходимо разбить на части, найти площади составных частей, а затем их сложить:

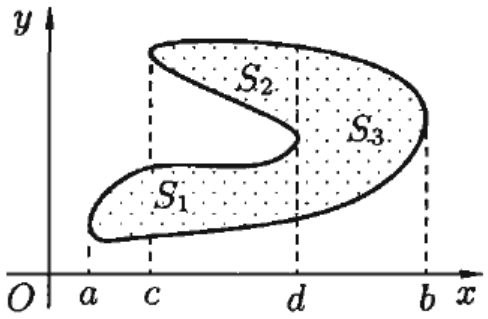


Рис. 9.5. Площадь фигуры, имеющей «сложную» конфигурацию.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = \sqrt{y}, x = 0, y = 4.$$

Искомая площадь равна площади криволинейного треугольника OAB (рис. 9.6).

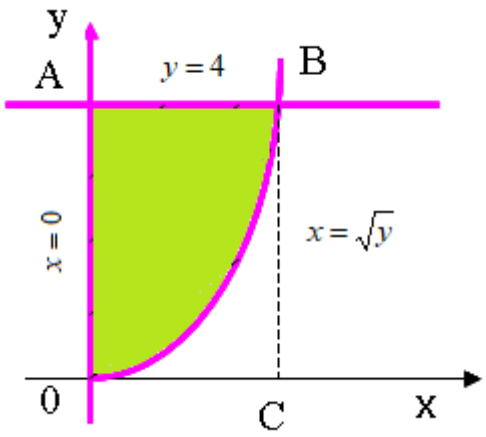


Рис. 9.6. Площадь криволинейного треугольника.

Решая систему: $\begin{cases} y = 4, \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$, найдем координаты точки *B*: *B(2; 4)*.

Тогда площадь криволинейного треугольника *OAB* равна:

$$S_{OAA} = \int_0^2 (f_2(x) - f_1(x)dx = \int_0^2 4dx - x^2 dx =$$

$$= 4x\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = (4 \cdot 2 - 0 \cdot 2) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Пример. Найти площадь фигуры (рис. 9.7), ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, y = x.$$

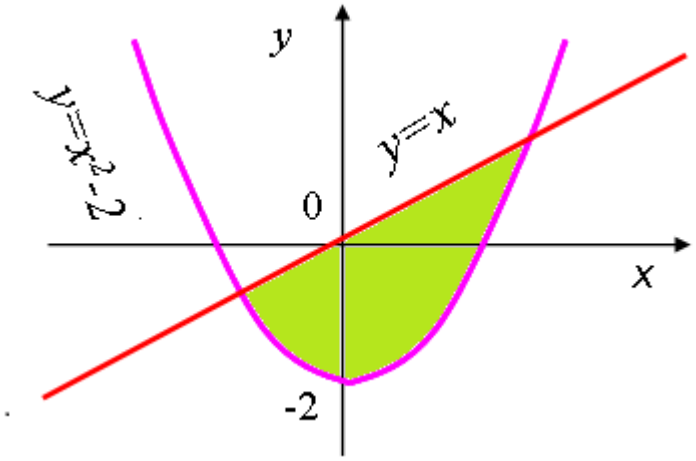


Рис. 9.7. Площадь фигуры.

Найдем координаты точек пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений: $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = x. \end{cases}$. Решением являются две точки: (-1; -1) и (2; 2).

Полагая, $f_2(x)=x, f_1(x)=x^2 - 2,$ найдем площадь фигуры:

$$S = \int_{-1}^{2} (x - (x^2 - 2))dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right) = 4{,}5.$$

Пример. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке 9.8.

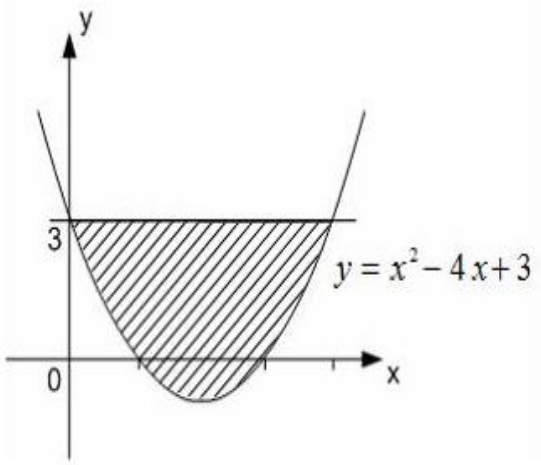


Рис. 9.8. Площадь фигуры.

Площадь фигуры найдем по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$, где $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$, а $f_2(x) = 3$.

Определим пределы интегрирования *a* и *b*:

$$x^2 - 4x + 3 = 3 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 4.$$

Тогда площадь фигуры будет равна:

$$S = \int_0^4 (3 - (x^2 - 4x + 3))dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

9.3.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Если плоская кривая задана уравнением *y=f(x)* и производная *f'(x)* непрерывна, то длина дуги этой кривой выражается интегралом:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы, заключенной между точками с абсциссами *x=0, x=4*.

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + ((x^{3/2})')^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx =$$

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

9.3.3. Вычисление объемов тел вращения

Пусть на отрезке [*a, b*] задана непрерывная знакопостоянная функция *y=f(x)*. Объем *Vx* тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями *y=f(x), y=0, x=a, x=b* равен:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1$ вокруг оси *Ox*.

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi(-\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \approx 1{,}36.$$

9.4. Несобственные интегралы

9.4.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на произвольном отрезке $[a; t]$, т.е. функция $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$ определена для произвольного $t \geq a$

.

Определение. Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a; +\infty)$ называется предел функции $\Phi(t)$ при $t \to +\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

При работе с несобственными интегралами обычно выделяют следующие две задачи:

1. Исследование вопроса о сходимости заданного несобственного интеграла.

2. Вычисление значения интеграла в случае, если последний сходится.

Если несобственный интеграл от неотрицательной функции сходится, то он равен площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу – осью Ox, слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$ (если эти ограничения существуют).

Для несобственных интегралов с верхним бесконечным пределом интегрирования бесконечная криволинейная трапеция может выглядеть следующим образом (рис. 9.9).

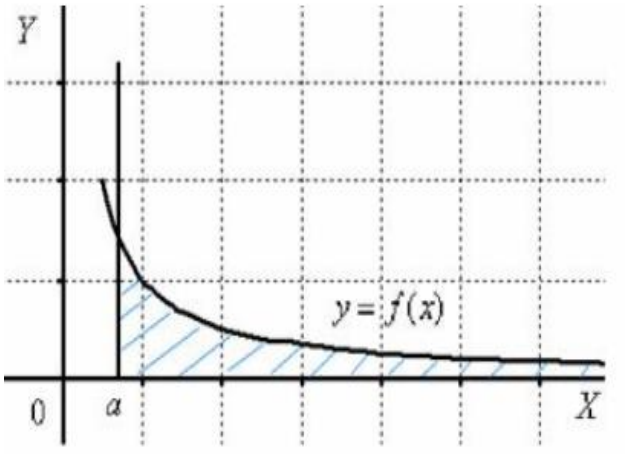


Рис. 9.9. Несобственный интеграл с верхним бесконечным пределом интегрирования.

Пример. Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

По определению несобственного интеграла представим интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ в виде предела функции $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_a^t f(x)dx$. Получим:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_1^t \frac{dx}{x^2}.$$

Вычислим полученный интеграл $\int\limits_1^t \frac{dx}{x^2}$. Интеграл является табличным, следовательно, останется только использовать формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^t \frac{dx}{x^2} = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Найдем предел полученного выражения при $t \to +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}(1 - \frac{1}{t}) = 1.$$

Таким образом, исследуемый интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, а значение интеграла равно 1.

Пример. Вычислим несобственный интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Согласно определению, несобственный интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ представим в виде предела $\lim_{t\to+\infty} \int_e^t \frac{dx}{x\ln^3 x}$:

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{t\to+\infty} \int_e^t \frac{dx}{x\ln^3 x}.$$

Найдем интеграл $\int_e^t \frac{dx}{x\ln^3 x}$, с учетом того, что верхний предел интегрирования является переменной величиной. Для интегрирования будем использовать метод внесения под знак дифференциала:

$$\int_e^t \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int_e^t \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = = \int_e^t (\ln x)^{-3} d(\ln x) = -\left.\frac{1}{2\ln^2 x}\right|_e^t.$$

Подставив в первообразную значения *t* и *e,* получим:

$$-\left.\frac{1}{2\ln^2 x}\right|_e^t = -\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{1}{\ln^2 x}\right|_e^t = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 t} - \frac{1}{\ln^2 e}\right).$$

Найдем предел выражения $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 t} - \frac{1}{\ln^2 e}\right)$ при $t \to +\infty$:

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln^2 t} - \frac{1}{\ln^2 e} \right) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ сходится к $\frac{1}{2}$.

Несобственный интеграл на полуинтервале $(-\infty, b]$ определяется таким же образом, как и на полуинтервале $[a; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Определение сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ осуществляется, также как и для интеграла $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$.

Пример. Вычислим несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{0} x dx.$

По определению несобственного интеграла представим интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ в виде предела функции $\lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$. Получим:

$$\int_{-\infty}^{0} x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 x dx.$$

Вычислим полученный интеграл $\int_t^0 x dx$:

$$\int_t^0 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_t^0 = \frac{0^2}{2} - \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{2}.$$

Найдем предел выражения при $t \to -\infty$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \to -\infty} \left(-\frac{t^2}{2} \right) = -\infty.$$

Таким образом, исследуемый интеграл $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ расходится.

Несобственный интеграл на интервале $(-\infty;+\infty)$ определяется, как сумма интегралов $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,\ c-const.$$

В этом случае интеграл сходится, если сходятся оба интеграла.

Пример. Вычислим несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$

Для нахождения интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ исследуем на сходимость несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ и $\int_{0}^{+\infty} e^x dx$.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}(e^0 - e^t) = 1.$$

Первый интеграл $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ сходится к единице.

$$\int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} e^x dx = \lim_{t\to+\infty}(e^t - e^0) = +\infty.$$

Второй интеграл $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ расходится.

Так как не все интегралы сходятся, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ расходится.

9.4.2. Несобственные интегралы от разрывных функций

Пусть функция *f(x)* непрерывна на интервале [a, *b*) и терпит разрыв при *x=b*.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to b-0}\int\limits_a^t f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом II рода* и обозначается:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0}\int\limits_a^t f(x)dx.$$

Если предел существует несобственный интеграл II рода *сходится*, в противном случае интеграл *расходится*.

На рисунке 9.10 схематично показаны криволинейные трапеции, соответствующие несобственным интегралам второго рода.

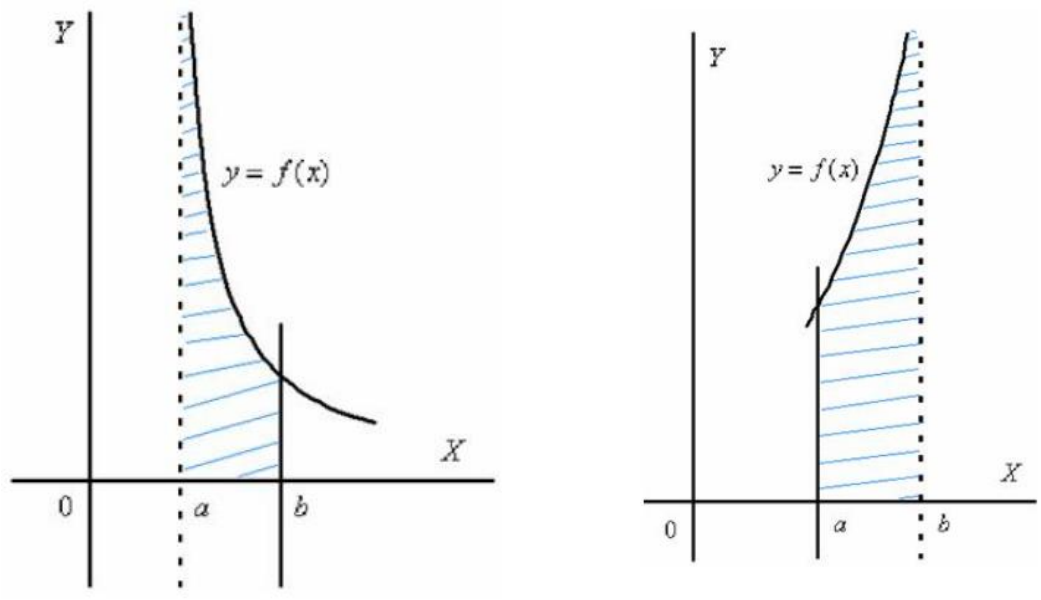


Рис. 9.10 Несобственные интегралы второго рода.

Пример. Вычислим несобственный интеграл: $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Данный интеграл является несобственным второго рода, так как в верхнем пределе интегрирования подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ терпит разрыв.

В этом случае наш интеграл можно представить в виде:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 0-0}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Найдем полученный предел интеграла:

$$\lim_{t\to 0-0}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 0-0}\int_{-1}^{t}x^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{t\to 0-0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{t}\right)=-\frac{3}{2}.$$

Таким образом, несобственный интеграл сходится и его значение равно

$$-\frac{3}{2}.$$

Если функция *f(x),* непрерывна на интервале (a, *b*], терпит разрыв при *x=a*, то конечный предел $\lim_{t\to a+0}\int_{t}^{b}f(x)dx$ также будет *несобственным интегралом II рода*:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{t\to a+0}\int_{t}^{b}f(x)dx.$$

Если предел существует и *сходится*, то несобственный интеграл II рода *сходится*, в противном случае – *расходится*.

Пример. Найдем интеграл $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3}$.

Данный интеграл является несобственным II рода, так как в нижнем пределе интегрирования подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x^3}$ терпит разрыв. Тогда несобственный интеграл можно представить в виде:

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3}=\lim_{t\to 0+}\int_{t}^{1}\frac{dx}{x^3}.$$

Для нахождения интеграла, представим подынтегральное выражение $\frac{1}{x^3}$ в виде x^{-3}, а затем найдем предел:

$$\lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 x^{-3}dx = \lim_{t\to 0+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_t^1 = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) = \infty .$$

Таким образом, несобственный интеграл расходится.

Если пределы интегрирования $x=a$ и $x=b$ являются точками разрыва, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно разбить на слагаемые:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ c\in(a;b).$$

где c принадлежит интервалу $(a;b)$.

Пример. Исследуя несобственный интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ мы видим что подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$ терпит разрыв одновременно в нижнем пределе интегрирования $x=1$ и в верхнем пределе $x=3$.

Разобьём интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ на слагаемые:

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} + \int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

Первое слагаемое является несобственным интегралом второго рода с точкой разрыва в нижнем пределе интегрирования, в второе слагаемое – несобственным интегралом с точкой разрыва в верхнем пределе интегрирования.

Если на отрезке $[a;b]$ существует точка разрыва $c\in[a;b]$, то несобственный интеграл можно представить в виде суммы:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-4}$.

Интеграл будет несобственным, причем второго рода, поскольку на отрезке интегрирования [0; 4] подынтегральная функция терпит разрыв в точке *x=2*.

Для нахождения данного несобственного интеграла достаточно разбить его на два слагаемых:

$$\int_0^4 \frac{dx}{x^2-4} = \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4} + \int_2^4 \frac{dx}{x^2-4}.$$

Если оба несобственных интеграла $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ сходятся, то будет сходится исследуемый интеграл. Если же хотя бы один из интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ расходится, то будет расходиться и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте понятие определенного интеграла. Что означают все компоненты записи определенного интеграла?
2. Каким образом применяется формула. Ньютона-Лейбница?
3. Какими свойствами обладает определенный интеграл? Приведите примеры.
4. Какие методы вычисления определенного интеграла вы знаете?
5. В чем заключается метод непосредственного интегрирования? Продемонстрируйте на примерах принципы использования метода непосредственного интегрирования.
6. На чем основан метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)? Какие особенности имеет метод интегрирования подстановкой для нахождения определенного интеграла?
7. Опишите алгоритмы нахождения определенного интеграла с помощью метода интегрирования по частям. Приведите примеры.
8. Каковы особенности интегрирования четных и нечетных функций в симметричных пределах?

9. Приведите примеры вычисления определенного интеграла методом непосредственного интегрирования? Какие свойства определенного интеграла вы использовали?

10. В чем заключается суть метода интегрирования заменой переменных? Приведите примеры использования метода интегрирования заменой переменных.

11. Каким образом при нахождении определенного интеграла используется метод интегрирования по частям? В чем особенности этого метода?

12. Какие геометрические приложения определенного интеграла вы знаете?

13. Каким образом определенный интеграл можно использовать для вычисления площадей плоских фигур? Постройте график и приведите пример.

14. Продемонстрируйте на примере метод вычисления длины дуги плоской кривой. С какими проблемами здесь можно столкнуться?

15. Каким образом с помощью определенного интеграла можно вычислить объемы тел вращения? Приведите пример.

16. Сформулируйте понятие несобственного интеграла. Какого рода бывают несобственные интегралы?

17. Какие основные задачи выделяют при исследовании несобственных интегралов?

18. Приведите пример несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Что вы можете сказать о его сходимости?

19. Каким образом происходит исследование вопроса о сходимости несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования?

20. Расскажите об особенностях интегрирования несобственных интегралов второго рода. Приведите примеры нахождения таких интегралов?

21. В чем заключается графический смысл несобственных интегралов?

Раздел 4. Теория вероятностей

Глава 10. Комбинаторный анализ

Задачи выбора элементов изучаемых объектов и размещения их в заданном порядке возникают и решаются во многих отраслях науки, промышленности, социальной и правоохранительной сферах деятельности человека. Для развития современных научных направлений математики, физики, химии, биологии, информатики, экономики, создания новых промышленных, строительных и сельскохозяйственных технологий, коммуникаций и средств обработки информации, формирования эффективных методов защиты информации невозможно обойтись без определения количества способов отбора изучаемых объектов, порядка расположения элементов в структурных множествах, распределения имеющихся ресурсов. Такими проблемами занимается комбинаторика.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов (подмножеств) некоторого дискретного множества в соответствии с заданными правилами. Термин «*комбинаторика*» имеет происхождение от латинского «combina», что означает – «сочетать», «соединять».

Комбинаторика изучает не сами свойства выбранного множества или его элементов, а определяет методы нахождения количества комбинаций, выполнения различных действий над изучаемыми объектами, способов выбора, группировки и расположения элементов множества, подчиненные тем или иным условиям.

10.1. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика – одна из самых древних отраслей математики. Несколько тысяч лет назад в Юго-восточной Азии из чисел и других знаков составлялись различные последовательности и таблицы с заданными свойствами. Определялись способы положения и перестановок элементов в данных структурах. В Древней Греции подсчитывали количество различных

комбинаций сочетаний слов в словосочетаниях, способы построений геометрических фигур из заданных элементов. В Средние века в Европе предпринимались попытки вывода математических законов для существующих в то время азартных игр с использованием монет, игральных костей, карт, домино и т.д.

Научное обоснование комбинаторика получает в XVI-XVII веках, как приложение для решения задач из области теории вероятностей. Развитие комбинаторики обусловлено было необходимостью расчета количества возможных вариантов наступления того или иного события, комбинаций выбора предметов или иных действий, выполняемых случайным образом. В это время элементы комбинаторных расчетов появились в работах итальянских ученых Николо Тартальи (1499–1557), Джероламо Кардано (1501–1576), Галилео Галилея (1564–1642), и французских математиков Блеза Паскаля (1623–1662) и Пьера Ферма (1601–1665).

Понятие «*комбинаторика*», как термин, введено немецким математиком Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646 - 1716). В работе «Рассуждения о комбинаторном искусстве» (1666). Лейбниц, впервые опубликовал формулы сочетаний без повторений из k элементов по n, ввел специальные символы для определения количества конфигураций, высказывался о приложениях комбинаторики в различных сферах человеческой деятельности.

Развитием методов решения комбинаторных задач также занимались выдающиеся математики: *Якоб Бернулли* (1654–1705) и Леонард Эйлер (1707–1783). В работах этих ученых рассматривались методы определения числа перестановок, сочетаний и размещений, как без повторений, так и с повторениями, исследовались возможности использования комбинаторики в алгебре, аналитической геометрии, теории вероятности, математической статистике.

В XIX веке изучением *геометрических конфигураций* занимался известный немецкий математик Теодор Карл Рейе (1838–1892), а в работах американского ученого Элиакима Гастингса Мура (1862–1932)

рассматривались *тактические конфигурации.* В XX веке с помощью *перечислительной комбинаторики* известных математиков Дж.-К. Рота и Ричарда Стенли изучались свойства упорядоченных множеств, различных алгебраических структур, специальных алгебраических функций. В настоящее время комбинаторных методов исследования широко востребованы и интегрированы в современной математике и других науках.

10.1.1. Правило сложения

Комбинаторными принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор. Такие способы построения некоторой конструкции из элементов исходного множества называются *комбинаторными конфигурациями.*

Рассмотрим задачи комбинаторики, описывающие наиболее общие и простые комбинаторные конфигурации. Многие такие задачи решаются с помощью основных теорем комбинаторики – *правила сложения и правила умножения.*

Правило сложения. Пусть некоторое множество A состоит из k элементов: $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$. Тогда, если элемент A_1 может быть выбран n_1 способами; элемент $A_2 - n_2$ способами, элемент $A_3 - n_3$ способами, ..., элемент $A_k - n_k$ способами, отличными от первых $k - 1$ способов, то выбор одного из элементов: или A_1, или A_2, ..., или A_k может быть осуществлен $n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ способами.

Данное правило можно сформулировать иначе. Пусть имеется k различных групп A_1: $A_2, A_3, ..., A_k$, причем каждая i-ая группа содержит n_i элементов. Если один элемент из группы A_i можно выбрать n_i способами, и при этом любые две группы A_i и A_j не имеют общих элементов, то выбор одного элемента или из A_1, или из A_2, ..., или из A_k можно осуществить $n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ способами.

Решим комбинаторные задачи, используя правило сложения.

Пример. В ящиках имеется 140 обычных, 30 трассирующих и 65 холостых патронов. Сколько существует способов извлечения из ящиков либо одного обычного, либо одного трассирующего, либо одного холостого патрона?

Решение. Так как количество способов выбора одного обычного патрона $n_1 = 140$, количество способов выбора одного трассирующего патрона $n_2 = 30$, а количество способов выбора одного трассирующего патрона $n_3 = 65$, то согласно правилу сложения количество способов извлечения из ящиков обычного или трассирующего или холостого патрона $n = n_1 + n_2 + n_3 = 140 + 30 + 65 = 21$.

Пример. В подразделении имеются три легковых автомобиля и два микроавтобуса. Для перевозки семи сотрудников к месту патрулирования можно выбрать либо два легковых автомобиля, либо один микроавтобус. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Снова будем использовать правило сложения. Легко рассчитать, что количество способов выбора двух легковых автомобилей из трех $n_1 = 3$. На самом деле, первый способ – можно взять первый и второй автомобили, второй способ – берем первый и третий автомобили, третий способ – выбрали второй и третий автомобили. Количество способов выбора одного микроавтобуса из двух, естественно, равно $n_2 = 2$. Тогда количество всех способов выбора транспортных средств для перевозки личного состава равно $n = n_1 + n_2 = 3 + 2 = 5$.

10.1.2. Правило умножения

Правило умножения. Пусть некоторое множество A состоит из k элементов: $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$. *Если элемент* A_1 *может быть выбран* n_1 *способами, после каждого такого выбора элемент* A_2 *может быть выбран* n_2 *способами, ..., после каждого* $k - 1$ *выбора элемент* A_k *может быть выбран* n_k *способами, то выбор всех элементов* $A_1, A_2, ..., A_k$ *в указанном порядке может быть осуществлен* $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$ *способами.*

Сформулируем это правило по-другому. Пусть имеется k групп $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$, причем i-ая группа содержит n_i элементов. Тогда общее число n способов,

которыми можно получить упорядоченную совокупность ($a_1, a_2, a_3,..., a_k$), где $a_i \in A_i$ (т.е. выбрать по одному элементу из каждой группы и расставить их в определенном порядке), равно $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример. В учебной группе 17 курсантов. Сколько способов может быть при назначении заместителя командира взвода и двух командиров отделений при условии, что каждый учащийся может быть выбран только на одну из этих должностей?

Решение. Пусть сначала назначается заместитель командира взвода, это может сделать одним из 17 способами; командира первого отделения можно выбрать из оставшихся курсантов 16-ю способами, а затем остается 15 вариантов назначения командира второго отделения. Используя правило произведения, найдем количество способов одновременного назначения заместителя командира взвода и двух командиров отделений: $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$.

Пример. Два почтальона должны разнести 10 писем,15 газет и 2 бандероли по 12 адресам. Сколькими способами они могут распределить свою работу, учитывая, что двум почтальонам ходить по одному адресу нецелесообразно?

Решение. Первый адрес имеет $n_1=2$ альтернативы – либо к адресату идет первый почтальон, либо второй. Для второго адресата также есть $n_2=2$ альтернативы и т.д., т.е. $n_1=n_2=\ldots=n_{12}=2$. Следовательно, в силу правила умножения общее число способов распределений доставки корреспонденции между двумя почтальонами равно $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{12} = 2^{12} = 4096$.

10.2. Комбинаторные конфигурации без повторений

В комбинаторных задачах часто определяется количество всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям. Однако, в одних конфигурациях рассматриваются подмножества, отличающиеся не только элементами, но и установленным порядком следования элементов, в других порядок следования элементов не важен и подмножества, отличающиеся только расположением в них элементов, не

считаются различными. Кроме того, в одних случаях исследуемые подмножества могут содержать неограниченное количество повторений выбранных элементов, а в других эти элементы могут браться только однократно. Все эти обстоятельства необходимо учитывать при решении комбинаторных задач.

Способы построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, в которых все выбранные элементы представлены только по одному разу, называются *конфигурациями без повторений*.

10.2.1 Размещения без повторений

Определение размещения без повторений. Пусть имеется множество, содержащее *n* элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из *k* элементов, называется *размещением* (размещением без повторений) из *n* элементов по *k* элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещения без повторений.

Размещение из n элементов по k – это все k-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Для обозначения числа размещений принят специальный математический символ: A_n^k (число размещений из *n* элементов по *k*). Рассчитать количество размещений можно, используя следующую теорему.

Теорема 1.1. Количество размещений из *n* элементов по *k* элементов равно произведению *k* последовательных натуральных чисел от *n* до *n – k + 1* включительно, т. е.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1),\ \ k>0. \qquad (10.1)$$

Формулу (6.1) удобно записывать в другом виде, используя понятие факториала.

Напомним, что факториалом числа *n* называют произведение первых *n* натуральных чисел и обозначают *n! = 1 · 2 · 3 · ... · (n – 1) ·n*. Кроме того, полагают, что 0! = 1. Умножив и разделив нашу формулу на (n – k)!, имеем:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}. \qquad (10.2)$$

Учитывая, что *(n – k)! = 1 · 2 · 3 · ... · (n – k),* после преобразования числителя окончательно получим:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (10.3)$$

Пример. Найдем количество размещений из пяти элементов по три.

Решение. Используя формулу размещений без повторений (10.3) имеем:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Пример. Для решения оперативной задачи необходимо назначить 4 сотрудников из 12 имеющихся. Определить количество всех возможных вариантов составления списка назначенных сотрудников.

Решение. Обратим внимание на то, что порядок следования сотрудников в составляемом списке имеет значение (например, сотрудники направляются на разные объекты или могут выполнять различные обязанности) и в списке сотрудники повторяться не могут, то данная конфигурация будет размещением без повторений. Тогда, используя формулу (10.3) для нахождения количества размещений из двенадцати по четыре, получим:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, число всех возможных вариантов составления списка назначенных сотрудников равно 11880.

Пример. В учебной лаборатории находится 10 столов. Сколькими способами за ними могут сесть 15 курсантов, если каждый стол рассчитан не более чем на двух человек?

Решение. Установим, что количество посадочных мест в аудитории равно 20. Затем отметим, что из этих двадцати мест будет использовано только 15 (по числу курсантов в группе). Очевидно, что каждый курсант может занять только одно место за столом, то есть каждое место будет использовано только один

раз, без повторов. Теперь мы видим, что данная конфигурация является размещением без повторений из двадцати по пятнадцати, следовательно:

$$A_{20}^{15} = \frac{20!}{(20-15)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 20 = 20\,274\,183\,401\,472\,000.$$

Значит, существует 20 274 183 401 472 000 способов посадки пятнадцати курсантов за десять столов.

Можно рассуждать иначе. Для первого курсанта существует 20 способов выбора места в аудитории. Так как одно место уже занято, то для второго курсанта способов занять место остается 19. После того, как расселись 14 курсантов, последнему пятнадцатому придется выбирать только из 6 оставшихся мест. В виду того, что способы для каждого курсанта могут последовательно состояться, то согласно правилу произведения перемножим все натуральные числа от шести до двадцати включительно и получим тот же ответ.

Конечно, полученное значение для количества способов огромно. Ведь, если все способы проверить на практике, то отводя на реализацию каждой новой конфигурации только одну секунду, для непрерывного выполнения всех пересадок курсантов потребуется 642 450 104 года.

10.2.2. Перестановки без повторений

Частным случаем размещений без повторений являются перестановки.

Определение перестановок без повторений. Размещение из n элементов по n элементов называется перестановкой из n элементов. Различные перестановки из n элементов отличаются только порядком элементов. Обозначаются перестановки знаком P_n.

Формулу перестановок из n элементов легко получить из формулы для размещений. По определению перестановок имеем:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Таким образом,

$$P_n = n! \tag{10.4}$$

Пример. Сколькими способами можно расположить шесть автомобилей в одной колонне?

Решение. В нашей задаче мы выбираем все шесть элементов из имеющегося множества автомобилей. Порядок нахождения машин в колонне важен. Каждый автомобиль уникален, и поставить его в колонну два или более раз мы не сможем. Тогда по формуле перестановок без повторений имеем:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 .$$

Пример. На книжной полке находятся пять книг по математике, две по физике и четыре по программированию. Необходимо определить, сколькими способами можно разместить эти издания на полке, если книги по каждому научному разделу должны стоять вместе.

Решение. Данная задача содержит дополнительные ограничения порядка элементов. Разобьем представленное множество книг на 3 части согласно представленным научным разделам: математика, физика, программирование. Каждый раздел на полке должен иметь свое место. Количество способов установления порядка разделов можно определить, как число перестановок из трех элементов:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Но и в каждом научном разделе книги также могут иметь свой порядок. Аналогично рассчитаем количество способов размещения книг по каждой дисциплине.

по математике $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$

по физики $P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2;$

по программированию $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Учитывая все вышесказанное и используя правило умножения, получим:

$$P_3 \cdot P_5 \cdot P_2 \cdot P_4 = 6 \cdot 120 \cdot 2 \cdot 24 = 34560 .$$

10.2.3. Сочетания без повторений

Мы рассматривали конфигурации, в которых место элементов в выбранном подмножестве имел существенное значение. Но на практике часто порядок элементов не имеет никакого значения.

Определение сочетания без повторений. Пусть имеется множество, состоящее из *n* элементов. Каждое его подмножество, содержащее *k* элементов, называется сочетанием из *n* элементов по *k* элементов.

Это определение имеет и другую формулировку. Сочетания из *n* элементов по *k* элементов – это все *k*-элементные подмножества *n*-элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют только неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, в этом случае не считаются различными. Обозначаются сочетания символом C_n^k (число сочетаний из *n* по *k*).

Пусть количество всевозможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов, их число равно C_n^k. Тогда из каждого указанного подмножества (содержащего *k* элементов) перестановкой его элементов можно получить все упорядоченные подмножества, которых будет ровно в *k!* раз больше, так как каждое *k*-элементное множество можно упорядочить *k!* способами. Значит

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = P_k C_n^k . \tag{10.5}$$

Следовательно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} . \tag{10.6}$$

Таким образом, количество сочетаний из *n* по *k* определяется формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} . \tag{10.7}$$

Пример. Необходимо выбрать для букета семь из пятнадцати имеющихся у продавца алых роз. Сколькими способами это можно осуществить?

Решение. Суть задачи заключается в выборе семи элемента из множества, содержащего пятнадцать элементов. В отличие от размещения выбранное подмножество элементов является неупорядоченным, так как отобранные розы будут помещены в один букет и порядок расположения в нем цветов неважен. Кроме того, будем считать, что каждая роза уникальна, следовательно, повторений выбранных элементов не будет. Тогда, используя формулу количества сочетаний без повторений, имеем:

$$C_{15}^{7} = \frac{15!}{(15-7)!7!} = \frac{15!}{8!7!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 15}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 8 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 15} = 6435.$$

Таким образом, количество способов данного выбора равна 6435.

Пример. В учебной группе девять юношей и семь девушек. Для несения наряда необходимо выделить восемь курсантов. Сколькими способами это можно сделать, если среди выделяемых курсантов должно быть три девушки?

Решение. Для решения задачи определимся, что производится одновременный выбор элементов из двух множеств. Из девяти юношей мы выбираем пять человек, а из семи девушек – три человека. По условию задачи все выбираемые элементы не могут повторяться, а их порядок в выбранных подмножествах неважен. По формуле количества сочетаний без повторений получим:

для юношей $$C_{9}^{5} = \frac{9!}{(9-5)!5!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 126;$$

для девушек $$C_{7}^{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

Таким образом, количество комбинаций выбора юношей равно 126, а девушек – 35. Так как оба выбора осуществляются одновременно, то необходимо использовать правила произведения:

$$C_{9}^{5}\cdot C_{7}^{3} = 126\cdot 35 = 4760.$$

Значит, количество вариантов назначения в наряд курсантов равно 4760.

Пример. Сколько существует способов расстановки двадцати полицейских для охраны трех объектов, если для выполнения задания на каждый из этих объектов требуется пять сотрудников?

Решение. Задачу разделим на три этапа, по количеству охраняемых объектов. На первый объект требуется пять полицейских, следовательно, количество вариантов расстановки сотрудников будет:

$$C_{20}^{5} = \frac{20!}{(20-5)!5!} = \frac{20!}{15!\cdot 5!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 20}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 15 \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5} = 15505.$$

На второй объект выберем следующие пять полицейских из пятнадцати оставшихся:

$$C_{15}^{5} = \frac{15!}{(15-5)!5!} = \frac{15!}{10!\cdot 5!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 15}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 10 \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5} = 3003.$$

И, наконец, на третий объект выберем еще пять полицейских из десяти:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{(10-5)!5!} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 10}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5 \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5} = 252.$$

Так как все вышеперечисленные выборы осуществляются одновременно, то используя правило умножения получим ответ:

$$C_{20}^{5}\cdot C_{15}^{5}\cdot C_{10}^{5} = 15505\cdot 3003\cdot 252 = 11\ 733\,501\,780.$$

Таким образом, для охраны трех объектов можно выделить полицейских 11 733 501 780 способами.

10.3. Комбинаторные конфигурации с повторениями

В ряде комбинаторных задач требуется исследовать конфигурации, связанные с неоднократным выбором одних и тех же элементов заданного множества либо с действиями с неограниченным количеством элементов, объединенных по какому-либо определяющему признаку. Такие конфигурации называют конфигурациями с повторениями. Существенная часть прикладных

задач комбинаторики содержит размещения, сочетания и перестановки с повторениями.

10.3.1. Размещения с повторениями

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Упорядоченный набор из k элементов, среди которых могут быть одинаковые элементы, называется размещением с повторениями из n элементов по k элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещений с повторениями.

Размещение с повторениями из n элементов по k – это все k-элементные множества, в которых каждый элемент исходного множества может повторяться, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Размещение с повторением часто называют последовательным выбором с возвращением, так как эта конфигурация описывает повторные выборки при статистической обработке данных.

Количество размещений с повторениями обозначаются символом $\overline{A}_n^k$ (число размещений с повторениями из n по k). Из правила произведения можно получить формулу для подсчета количества размещений с повторениями:

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (10.8)$$

Пример. Сейф имеет сложный цифровой замок, состоящий из 10 дисков. На каждом диске можно выставить цифру от «0» до «9» или латинскую букву от «A» до «F». Сколькими различными наборами знаков может быть представлен код замка.

Решение. В настоящей задаче представлено множество, состоящее из 16 элементов: «0», «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9», «A», «B», «C», «D»,.«E»,.«F». Из заданного множества необходимо выбрать 10 элементов, причем составленные конфигурации являются упорядоченными, а каждый элемент в наборе может повторяться не более 10 раз. Например, набор

«A», «A», «A», «7», «7», «7», «7», «7», «7», «7»

содержит три буквы «А» и семь цифр «7». Тогда, используя формулу числа размещений с повторениями из 16 по 10, получим:

$$\overline{A}_{16}^{10} = 16^{10} = 1\,099\,511\,627\,776.$$

Таким образом, символьный код для описанного замка имеет более триллиона комбинаций.

В конфигурации размещение с повторением количество выборок k может быть больше, чем количество элементов n исследуемого множества.

Пример. Имеется 23 красных, 42 синих и 19 желтых шаров. Шары отличаются только цветом. Случайным образом отобраны 8 шаров и расставлены в ряд. Сколькими способами может быть составлен такой ряд?

Решение. В условии задачи указаны точные количества красных, синих и желтых шаров. Однако для решения данной задачи нам важно знать лишь то, что количество шаров каждого цвета превышает восемь. Будем считать, что у нас только три элемента, назовем их «красный», «синий» и «желтый», и каждый элемент может повторяться, по крайней мере, 8 раз. Порядок цвета элементов в выбранном ряду важен. Таким образом, используем формулу числа размещений с повторениями из трех элементов по восемь:

$$\overline{A}_{3}^{8} = 3^{8} = 6\,561.$$

Следовательно, количество способов составления упорядоченного ряда из 8 шаров равно 6 561.

Пример. Сколькими способами можно разместить 7 служебных автомобилей в 5 секторах охраняемой территории при условии, что в каждом секторе осталось достаточно свободных парковочных мест для размещения всех автомобилей.

Решение. Эту задачу можно рассмотреть следующим образом. Будем исходить из того, что для размещения каждого автомобиля имеется множество из пяти повторяемых свободных парковочных мест, по одному на каждом секторе. Мы выбираем сектор! Номер места в каждом секторе не важен, зато упорядочены автомобили, то есть имеет значение, в каком секторе разместится

тот или иной автомобиль. Следовательно, применяя формулу числа размещений с повторениями из пяти элементов по семь, получим:

$$\overline{A}_5^7 = 5^7 = 78125.$$

Значит, количество способов для размещения 7 служебных автомобилей в 5 секторах охраняемой территории равно 78 125.

10.3.2. Перестановки с повторениями

Определение. Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Упорядоченный набор k элементов этого множества такой, что 1-й элемент взят k_1 раз, 2-й элемент - k_2 раза, …, n-й элемент - k_n раз ($k_1 + k_2 + ... + k_n = k$) называется перестановкой с повторениями длины k из n элементов.

Приведем другую формулировку определения размещений с повторениями. Перестановкой с повторениями из n элементов по k называется всякое k-элементное множество, в котором каждый i-й элемент заданного множества повторяется k_i раз, отличающееся составом элементов или порядком их следования.

Количество перестановок с повторениями длины k из n разных элементов, взятых соответственно по $k_1, k_2, \ldots, k_n$ раз каждый, обозначается $P(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Формула для числа перестановок с повторениями получается непосредственно из правила умножения:

$$P(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}. \qquad (10.9)$$

Пример. Для посадки декоративных деревьев в парке Краснодарского университета МВД подготовлены 20 лунок. Сколькими способами можно разместить в них 8 лип, 5 кленов и 7 катальп, если считать деревья одного сорта одинаковыми?

Решение. Можно считать, что мы имеем множество сортов декоративных деревьев, состоящее из $n = 3$ элементов: «липа», «клен» и «катальпа». Каждый элемент повторяется: количество лип $k_1 = 8$, кленов $k_2 = 5$, катальп $k_3 = 7$. Всего

k = 20 деревьев. Тогда, используя формулу числа перестановок с повторениями, получим:

$$P(8,5,7) = \frac{20!}{8! \cdot 5! \cdot 7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 20}{1 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 7} = 99\,768\,240.$$

Сократив значения факториалов, получим, что посадку деревьев можно сделать 99 768 240 способами, считая деревья одного сорта одинаковыми.

Если бы в условии задачи количество лунок было бы больше, чем количество саженцев, тогда после посадки остались бы пустые лунки и следовало бы ввести еще один сорт деревьев – «пусто» и решать задачу уже с множеством из четырех повторяющихся элементов.

10.3.3. Сочетания с повторениями

Определение. Пусть имеется множество, содержащее *n* элементов. Любой неупорядоченный набор из *k* элементов, среди которых могут быть одинаковые элементы исходного множества, называется сочетанием с повторениями из *n* элементов по *k* элементов.

Можно привести другую формулировку определения размещений с повторениями.

Сочетание с повторениями из *n* элементов по *k* – это все *k*-элементные множества, в которых каждый элемент может повторяться, отличающиеся только составом элементов.

Количество сочетаний с повторениями обозначаются $\overline{C}_n^k$ (число сочетаний с повторениями из *n* по *k*). Формула для подсчета количества сочетаний с повторениями выглядит следующим образом:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} \quad . \tag{10.10}$$

Пример. В буфете продаются 4 вида пирожных. Сколькими способами можно приобрести 10 пирожных, при условии наличия на прилавке большого количества пирожных каждого вида?

Решение. Итак, по условию задачи имеется множество, состоящее из четырех пирожных, каждое из которых может повторяться, по крайней мере, 10

раз. Все пирожные приобретаются одновременно, порядок их появления на прилавке или, например, поедания не важен. Следовательно, данная конфигурация – сочетания с повторениями. Используя первую часть формулы числа сочетаний с повторениями из 4 по 10, рассчитаем количество способов покупки:

$$\overline{C}_4^{10} = C_{4+10-1}^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{(13-10)!\cdot 10!} = \frac{13!}{3!\cdot 10!} = 286 .$$

Значит, существует 286 способов приобретения десяти пирожных при условиях, описанных в условии задачи.

10.4. Разбиения

Разбиением исходного n-элементного множества называется совокупность непересекающихся k подмножеств данного множества, содержащих $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ элементов данного множества, причем $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$.

Разбиения бывают упорядоченными и неупорядоченными. Если подмножества пронумерованы и их номера зафиксированы, то разбиения считаются упорядоченными. В противном случае разбиения являются неупорядоченными. Как в упорядоченных, так и в неупорядоченных разбиениях порядок расположения элементов в получившихся подмножествах не важен.

На практике обычно используют упорядоченные разбиения множеств. Упорядоченное разбиение множества из n элементов на k подмножеств обозначаются следующим выражением: $R(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$. Данная запись указывает на то, что в первое подмножество содержит ровно n_1 элементов, второе – n_2 элементов, третье – n_3 элементов, …, k-ое – n_k элементов.

Для подсчета числа упорядоченных разбиений можно использовать следующую формулу:

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \cdots \cdot n_k!} . \qquad (10.11)$$

Пример. Шесть книг нужно расставить по трем полкам так, чтобы на одной полке оказалось две книги, на второй – три книги, а на третьей – одна. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В данной задаче мы имеем упорядоченные разбиения множества из $n = 6$ книг на $k = 3$ подмножества. Причем, первое подмножество содержит $n_1 = 2$ элемента, втрое – $n_2 = 3$ элемента, а третье $n_3 = 1$ элемент. Используя формулу числа упорядоченных разбиений получим:

$$R(2,3,1) = \frac{6!}{2!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{2} = 60.$$

Таким образом, если не учитывать внутренний порядок книг на каждой полке, расставить книги указанным способом можно 60 способами.

Пример. Сколькими способами можно разбить группу из 25 курсантов на три подгруппы по 6, 9 и 10 человек в каждой группе?

Решение. По условию задачи общее количество курсантов в группе $n = 25$, количество подгрупп, на которые разбивается наша группа, $k = 3$, а количество курсантов в каждой подгруппе определены соответственно, как n_1=6, n_2=9, n_3=10. Число упорядоченных разбиений группы рассчитаем по формуле:

$$R(6,9,10) = \frac{25!}{6!\cdot 9!\cdot 10!} = 16\,360\,143\,800.$$

Таким образом, группу курсантов из 25 человек можно разбить на три подгруппы по 6, 9 и 10 человек 16 360 143 800 способами. Число впечатляет!

Пример. Сколькими способами можно разделить группу из восьми оперативных сотрудников на две части для проведения поиска и задержания преступников в городском парке и торговом центре, учитывая, что в каждой группе должно быть не менее трех человек?

Решение. Решение данной задачи сводится к исследованию всех возможных вариантов разбиений группы из восьми человек на две части, содержащих не менее трех сотрудников.

Варианты	Городской парк	Торговый центр
Вариант 1	3	5
Вариант 2	4	4
Вариант 3	5	3

Таких вариантов получилось равно три. Рассчитаем число возможных разбиений в каждой конфигурации:

$$R(3,5) = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56; \qquad R(4,4) = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70; \qquad R(5,3) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

Сложив количества разбиений в каждом из выше перечисленных вариантов, получим:

$$R = R(3,5) + R(4,4) + R(5,3) = 56 + 70 + 56 = 182.$$

Значит, группу из восьми оперативных сотрудников можно разделить на две части 182 способами.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение комбинаторных конфигураций. Приведите примеры комбинаторных конфигураций.
2. Каким образом используется правило сложения для комбинаторных конфигураций? Приведите пример применения правила сложения.
3. Сформулируйте правило умножения для комбинаторных конфигураций. Приведите примеры.
4. В чем особенности определения количества комбинаторных конфигураций с помощью правил сложения и умножения?
5. Какие конфигурации без повторений вы знаете? В чем особенности каждой конфигурации?
6. Сформулируйте определение перестановок без повторений. Приведите примеры перестановок без повторений.
7. Что такое сочетания без повторений? В каких случаях можно использовать формулу количества сочетаний без повторений?
8. Определите понятие комбинаторных конфигураций. Приведите примеры комбинаторных конфигураций.

9. Сформулируйте правило сложения для комбинаторных конфигураций.

10. Приведите примеры использования правило умножения для комбинаторных конфигураций.

11. В каких случаях используются перестановки без повторений?

12. Как в комбинаторике применяются размещения без повторений?

13. Приведите пример использования сочетания без повторений. Каким образом можно определить количество сочетаний без повторений?

14. В чем основное отличие комбинаторных задач, при решении которых используются перестановки без повторений, сочетания без повторений, размещения без повторений?

15. Дайте понятие перестановок с повторениями.

16. Определите метод нахождения количества размещений с повторениями.

17. Выпишете формулу определения количества сочетаний с повторениями.

18. Определите область применения конфигураций с повторениями при решении комбинаторных задач.

19. Каким образом можно определить количество упорядоченных разбиений?

20. Приведите пример использования формулы Бинома Ньютона.

21. Опишите алгоритмы использования треугольника Паскаля в комбинаторных исследованиях.

Глава 11. Вероятность события

Функционирование органов внутренних дел связано с различными явлениями, процессами, деятельностью людей (правонарушителей, сотрудников, вспомогательного состава), которые часто имеют непредсказуемый характер. Эффективность борьбы с преступностью зависит от многих факторов, порой неизвестных заранее или известных лишь частично. Так, раскрытие преступных действий и выявление преступников осуществляется при наличии и действии случайных факторов. Изучением закономерностей в случайных явлениях и процессах занимается специальная наука - теория вероятностей.

Большинство задач, которые решают специалисты органов внутренних дел, содержат элементы неопределенности. Объясняется это тем, что процессы формирования объектов исследования протекают под влиянием множества факторов. В каждом конкретном случае их комбинации и степень воздействия различны. Поэтому признаки объектов, возникающие под влиянием совокупности факторов, не поддаются однозначной оценке и приобретают вероятностный характер. Решением такого рода задач и занимается раздел математики, называемый теорией вероятностей.

11.1. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей – это наука, изучающая количественные закономерности однородных случайных событий массового характера и разрабатывающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные события.

Теория вероятностей, подобно другим математическим наукам возникла из потребностей практики. Первые ростки этой теории относятся к началу XVII в. Уже тогда знаменитый физик Галилео Галилей (1564 – 1642) пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. Однако теория вероятностей, как математическая наука, сформировалась, в основном, на более

простом материале. Таким материалом исторически оказались так называемые «азартные» игры. Само слово «азарт» означает «случай». Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII в. и связано с исследованиями Блеза Паскаля (1623 – 1662), Пьера Ферма (1601 – 1665), Христиана Гюйгенса (1629 – 1695) в области азартных игр. Для всего XVIII в. и начала XIX в. характерно бурное развитие теории вероятностей. Эта теория становится «модной» наукой. Ее пытаются применять к изучению общественных явлений.

Важный вклад в теорию вероятностей внёс Якоб Бернулли (1655 – 1705): он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний.

В XVIII веке важное значение для развития теории вероятностей имели работы Томаса Байеса (1702 –1761), сформулировавшего и доказавшего знаменитую Теорему Байеса.

Выдающаяся роль в развитии теории вероятностей принадлежит знаменитому математику Пьеру-Симону Лапласу (1749-1827). Он впервые дал стройное и систематическое изложение основ теории вероятностей и развил ряд замечательных приложений к вопросам практики, в частности к анализу ошибок наблюдений и измерений.

В первой половине XIX века теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений. Французский ученый Семион Пуассон (1781 – 1840) доказал первые предельные теоремы. Величайший немецкий математика Иоганн Карл Гаусс (1855 –1777) детально исследовал нормальное распределение случайной величины, также называемое «распределением Гаусса». Среди ученых Петербургской школы теории вероятностей следует назвать Виктора Буняковского (1804-1889) – автора первого курса теории вероятностей на русском языке. В этой работе автор наряду с оригинальным изложением методов теории вероятностей осветил вопросы ее практического применения.

Во второй половине XIX века значительный вклад внёс ряд европейских учёных. Среди них исключительный научный вклад внесли русские ученые: Пафнутий Чебышев (1821 – 1824), Андрей Марков (1856 – 1922) и Александр Ляпунов (1857 – 1918). В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, разработана теория Марковских цепей.

Наследие русских математиков получило развитие в работах советских математиков Евгения Слуцкого (1880-1948), Сергея Бернштейна (1880-1968), Александра Хинчина (1894-1959), Юрия Линника (1904-1972).

Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной Андреем Колмогоровым (1903 – 1987). В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из важнейших разделов математики.

11.1.1. Основные понятия и классификация событий

Случайным событием (событием) называется любой исход опыта или наблюдения, который может произойти или не произойти.

Рассмотрим следующие примеры.

Подбрасываем монету. Появился орел. А ведь могла появиться и решка. То, что появился орел – случайное событие.

При задержании особо опасного преступника оперативный работник произвел выстрел из пистолета. Попал. Но мог и не попасть (произошла осечка, подвел глаз, дрогнула рука). Попадание - событие случайное.

На месте преступления обнаружен отпечаток указательного пальца левой руки предполагаемого преступника. Конечно, это дело случая: мог быть оставлен отпечаток указательного пальца правой руки, большого пальца или вообще ничего. То, что обнаружен отпечаток именно указательного пальца левой руки - случайное событие.

В этих примерах *случайные события* - последствия определенных действий или результаты наблюдений при реализации комплекса условий (подбрасывание монеты, выстрел, снятие отпечатка).

Для простоты *случайные события* называют *событиями*. События обозначаются заглавными латинскими буквами (часто с добавлением цифровых обозначений), например, A, B, C, A_1, B_2, D_8.

Классифицируются события по следующим видам:

1) достоверные, невозможные, случайные, неопределенные;
2) совместные, несовместные;
3) зависимые, независимые;
4) простые, сложные.

Достоверным событием называется такое событие, которое при реализации данного комплекса условий непременно произойдет.

Пример. Бросается игральный кубик, содержащий шесть граней с числами «1», «2», «3», «4», «5», «6». Определим событие A_1, как «выпадение натурального числа». Очевидно, что все числа от одного до шести являются натуральными числами, следовательно, Событие A_1 «выпадение натурального числа» является достоверным.

Невозможное - это такое событие, которое при соблюдении некоторых условий не может произойти.

Пример. Теперь бросим два игральных кубика. Определим событие A_2, как «сумма выпавших чисел равна одному». Так как на каждом кубике могут выпасть числа от одного до шести, следовательно, минимальная сумма будет равна 1 + 1 = 2. Таким образом, событие A_2 «сумма выпавших чисел равна одному» является невозможным.

Случайным событием называется такой исход эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Пример. Снова бросаем кубик. Определим событие A_3, как «выпадение шестерки». Данное событие A_3, является случайным событием, так как в нашем опыте «шестерка» может выпасть, в может и не выпасть.

Пример. Факт совершения преступления на обслуживаемой органами внутренних дел территории в какой-либо период времени является случайным событием.

Неопределенным называется событие, исход которого заранее не может быть предсказан, так как невозможно проводить многократные эксперименты при одних и тех же условиях.

Пример. Поиск и задержание конкретного преступника невозможно многократно повторять, соблюдая одни и те же условия.

Два события A и B называются *совместными* при данном испытании (наблюдении), если появление одного из них не исключает возможности появления другого.

Пример. Снова бросим два кубика. Событие A_1 определим, как «Выпадение шестерки на первом кубике», а событие A_2, как «Выпадение шестерки на первом кубике». Так как при одном испытании одновременно могут выпасть две шестерки сразу, следовательно, события A_1 и A_2 являются совместными.

Пример. Представим, что в тире по мишени одновременно стреляют два курсанта. Событие A_1 определим, как «поражение мишени первым курсантом», а событие A_2 определим, как «поражение мишени вторым курсантом». Так как при выстрелах двух курсантов мишень может быть поражена двумя пулями, то события A_1 и A_2 являются совместными.

Пример. Если входная дверь банка блокирована двумя независимо срабатывающими устройствами, то событие A (срабатывание первого устройства) и событие B (срабатывание второго устройства) являются совместными, так как оба датчика могут сработать одновременно.

События A и B называются *несовместными*, если появление одного из них исключает возможность появления другого.

Пример. По мишени производится выстрел одним стрелком. Определим событие A, как попадание в мишень, а событие B, как промах. Очевидно, что указанные события A и B исключают появление друг друга: одним выстрелом

попасть в мишень и промахнуться стрелок не может. Таким образом, определенные события А и В являются несовместными.

Пример. Если предложены две версии раскрытия преступления, то событие А (верна первая версия) и событие В (верна вторая версия) несовместны, так как не могут быть верны одновременно обе версии.

События А и В являются *зависимыми* друг от друга, если наступление или не наступление события А влияет на возможность наступления события В.

Пример. Возьмем колоду игральных карт и последовательно вытащим из нее две карты. Определим события. Событие А определим, как «первая карта является тузом», а событие В, как «вторая карта является тузом». Тогда наступление событие А влияет на наступление события В, поскольку если событие А наступит, то в колоде останется только три туза, а если первая карта не оказалась тузом, то в колоде перед выбором второй карты останется четыре туза, а возможность наступления события В изменится.

Пример. Если событие А – наступление холодного сезона, а событие В – переход на зимнюю форму одежды, то событие В зависит от наступления события А.

События А и В являются *независимыми*, если появление одного из них никак не влияет на появление другого.

Пример. В тире по мишени одновременно стреляют два курсанта. Событие A_1 определим, как «поражение мишени первым курсантом», а событие A_2 определим, как «поражение мишени вторым курсантом». Очевидно, события A_1 и A_2 являются независимы.

Пример. Сообщения граждан, поступающие в дежурную часть по телефону, тоже можно считать независимыми.

События A_1, A_2, …, A_n называются *попарно-несовместными*, если любые два из них несовместны

Пример. Производится один выстрел в тире по мишени с концентрическими зонами поражения. Пулей может быть поражена одна из зон, а стрелку начисляется 10, 9, 8, 7, 0 баллов. События A_1 «получение 10

баллов», A_2 «получение 9 баллов», A_3 «получение 8 баллов», A_4 «получение 7 баллов» и A_5 «получение 0 баллов» являются попарно-несовместными.

N несовместных событий A_1, A_2, … , A_n образуют *полную группу*, если в результате данного испытания обязательно должно произойти одно из них.

Пример. Бросая игральный кубик, можно определить шесть событий: A_1 «Выпадение единицы», A_2 «Выпадение двойки», A_3 «Выпадение тройки», A_4 «Выпадение четверки», A_5 «Выпадение пятерки», A_6 «Выпадение шестерки». Все указанные события являются попарно-несовместными и образуют полную группу.

Пример. Предложено 4 версии, образующих полную группу. Тогда в результате практической разработки одна из них обязательно окажется верной.

Два единственно возможных и несовместных события образуют полную группу событий. Такие события называются *противоположными* и обозначаются A и $\overline{A}$.

Пример. Пусть событие A - «попадание стрелка в цель», а событие $\overline{A}$ – «промах». События A и $\overline{A}$ образуют полную группу и являются противоположными.

Пример. Подбрасывается монета. «Выпадение орла» и «Выпадение решки» также являются противоположными.

Простое событие – это событие, которое нельзя разложить на другие события.

Пример. Событие «получение пятерки на экзамене» является простым.

Комбинируя вышеуказанные простые события определенным образом, можно получать так называемые сложные события, имеющие важные практические приложения.

Пример. Сравним следующие события:

A - появление двух очков при бросании игральной кости;

B - появление четного числа очков при бросании игральной кости.

Заметим следующее отношение между событиями: если произошло A, то обязательно произойдет и событие B.

Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если появление события A влечет за собой появление события B.

Тот факт, что A благоприятствует B (или B является следствием A), записывается в виде:

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

Событие A является частью события B, поскольку событие B состоит в осуществлении трех элементарных событий: появление двух очков, появление четырех очков, появление шести очков.

Пример. Сопоставим события:

A – появление герба при подбрасывании монеты,

B – не появление цифры при подбрасывании монеты.

Если же монета не может укатиться и застрять в щели пола или стать на ребро, тогда если произошло A, то произошло и B и в то же время если произошло B, то произошло и A. Тогда запишем: $A = B$ и будем говорить, что события A и B равносильны.

События A и B называются *равносильными*, если появление события A влечет за собой появление события B и в то же время появление события B влечет за собой появление события A.

Равносильные события не следует путать с равновозможными.

События называются *равновозможными*, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие.

Пример. Появление «орла» и появление «решки» при бросании монеты – равновозможные события, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного металла, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не оказывает влияния на результат.

Пример. Появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости равновозможные события, если игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

11.1.2. Операции над событиями

Мы привыкли к тому, что математические действия выполняются в основном над числами. Но оказывается, что их можно проводить и над событиями. Этим и занимается раздел математики, который называется *алгебра событий*.

Суммой (объединением) двух событий A и B называется третье событие C, состоящее в появлении или события A, или события B, или обоих этих событий.

Обозначение: $C = A + B$ или $C = A \cup B$.

Пример. Если событие A – попадание в цель при первом выстреле, B – попадание в цель при втором выстреле. Тогда событие $C = A + B$ есть попадание в цель вообще, безразлично при каком выстреле - при первом, при втором или при обоих вместе.

Пример. В ящике находятся 20 деталей первого сорта и 17 деталей втор ого. Из ящика последовательно вытаскивают две детали. Определим события:

A – первая деталь окажется высшего сорта;

B – вторая деталь окажется высшего сорта.

Тогда суммой $A + B$ является событие, состоящее в том, что хотя бы одна деталь из двух взятых будет первого сорта.

Суммой (объединением) нескольких событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Пример. Производится 5 выстрелов по мишени. Рассмотрим события: A_0 – «ни одного попадания», A_1 – «одно попадание», A_2 – «два попадания», A_3 – «три попадания», A_4 – «четыре попадания», A_5 – «пять попаданий». Тогда $A = A_0 + A_1 + A_2$ есть событие – «не более двух попаданий», $B = A_3 + A_4 + A_5$ есть событие – «не менее трех попаданий».

Произведением (пересечением) двух событий A и B называется такое третье событие C, которое состоит в совместном появлении и события A, и события B.

Обозначение: $C = AB$ или $C = A \cap B$.

Пример. Событие A – «попадание в цель при первом выстреле», событие B – «попадание в цель при втором выстреле». Тогда AB состоит в попадании в цель при обоих выстрелах.

Произведением (пересечением) нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Пример. Бросается игральный кубик. Рассмотрим следующие события: A – «число выпавших очков меньше 5», B – «число выпавших очков больше 2», C – «число выпавших очков нечетное. Тогда событие $D = ABC$ заключается в том, что выпало 3 очка.

11.2. Вероятность события

Вероятность события - это численная мера объективной возможности его появления.

Идея выражать числами степень возможности появления тех или иных событий возникла давно и возникла на основе первых попыток исчисления шансов в азартных играх. Исторически первым определением понятия вероятности является то определение, которое в настоящее время принято называть классическим определением вероятности.

Если опыт таков, что подразделяется только на конечное число элементарных событий, которые к тому же являются равновероятными, то говорят, что речь идет о классическом случае.

Примерами таких опытов являются броски монеты (два равновероятных элементарных события) или бросание игральной кости (шесть равновероятных элементарных событий).

11.2.1. Классическая вероятность

Классическая формула вероятности. В общем случае, когда имеется n равновероятных элементарных событий, вероятность любого составного события A, состоящего из m элементарных событий определяется как отношение элементарных событий, благоприятствующих событию A, и общему числу элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример. Какова вероятность появления «решки» при бросании монеты?

В нашем примере можно определить всего 2 равновероятных элементарных событий, а благоприятствует событию A только одно из них. Тогда вероятность появления «решки» при одном бросании монеты равна:

$$P(A_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Пример. В случае с игральной костью вероятность события A_1, состоящего в выпадении шестерки равна $P(A_1) = \frac{1}{6}$, а вероятность событий A_2, состоящего в выпадении четного числа очков равна $P(A_2) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$

Пример. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 13?

Каждый из кубиков может упасть шестью различными способами.

Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть 66=36 различными способами. Любой из этих исходов благоприятствует наступлению события A, заключающегося в том, что сумма выпавших очков меньше 13. Действительно, максимальная сумма очков выпадет тогда, когда на каждом кубике выпадет по 6 очков. Но эта сумма равна 12, и она меньше 13. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36}{36} = 1.$$

Из формулы для вычисления вероятности вытекают следующие свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие A достоверное, то любой исход испытания благоприятствует этому событию, но тогда . Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна 0.

Действительно, если событие A невозможное, то ни один из исходов испытания не благоприятствует ему. Следовательно, $m = 0$, но тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3.Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Число исходов, благоприятствующих наступлению события, либо равно 0, либо *m*, либо, по определению вероятности, является частью всех *n* исходов испытания.

Пример. Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны. Произвольным образом выбираются подряд три карточки и кладутся в ряд. Какова вероятность того, что число, составленное из трех цифр, которые написаны на карточках, больше 987?

Найдем число исходов, благоприятствующих событию A, вероятность которого следует определить. Однако это число равняется нулю, так как из данных карточек нельзя составить число, которое больше 987. Действительно, любое число, которое больше 987, например, 988, 991, предполагает повторение цифр, что невозможно по условию задачи.

Таким образом, число благоприятствующих исходов $m = 0$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Для нахождения вероятности с помощью формулы классической вероятности часто приходится использовать элементы комбинаторики. Рассмотрим примеры

Пример. В урне находятся 12 красных и 8 зеленых шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что он красный?

Введем обозначения:

A – вынутый из урны шар окажется красным.

Тогда число случаев, благоприятствующих событию A, совпадает с количеством красных шаров в урне $m = 12$; а общее число случаев рассчитаем, как общее количество шаров в урне, $n = 12 + 8 = 20$.

Тогда, используя классическую формулу вероятностей получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0{,}6 .$$

Таким образом, вероятность того, что вынутый из урны шар окажется красным, равна 0,6.

Пример. В урне находятся 12 красных и 8 зеленых шаров. Вынули три шара. Какова вероятность того, что один из них красный и два зеленых?

Введем обозначения:

A – вынули один красный шар и два зеленых.

Учитывая тот факт, что порядок вытаскивания трех шаров не важен, общее число вариантов n вытаскивания трех шаров из двадцати будет равно сочетанию из двадцати по трем:

$$n = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140 .$$

Число благоприятных исходов m можно представить, как произведение количества комбинаций выбора одного красного шара из двенадцати C_{12}^{1} на количество комбинаций выбора двух шаров зеленого цвета из восьми C_{8}^{2}:

$$m = C_{12}^{1}\cdot C_{8}^{2} = \frac{12!}{1!\cdot 11!}\cdot\frac{8!}{2!\cdot 6!} = 12\cdot\frac{7\cdot 8}{2} = 336 .$$

Тогда, используя классическую формулу вероятностей получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{336}{1140} \neq 0{,}294737 \ .$$

Таким образом, вероятность того, что среди вынутых из урны шаров один красный и два зеленых, равна 0,294737.

11.2.2. Статистическая вероятность

На практике очень часто встречаются испытания, число возможных исходов которых велико или бесконечно. Так же встречаются задачи, в которых элементарные события не являются равновозможными. В таких случаях классическое определение вероятности неприемлемо.

Во многих случаях трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы являются равновозможными. В связи с этим появилась необходимость введения еще одного определения вероятности, называемого *статистическим*. Чтобы дать это определение, предварительно вводят понятие относительной частоты события.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

$$\omega(A) = \frac{m}{n} \ .$$

Здесь $\omega(A)$ – относительная частота события A; m – число появлений события; n – общее число испытаний.

Частота события обладает следующими свойствами:

1) Частота достоверного события U равна единице:

$$\omega(U) = 1 \ .$$

2) Частота невозможного события V равна нулю:

$$\omega(V) = 0 \ .$$

3) Частота случайного события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq \omega(A) \leq 1 \ .$$

4) Частота суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частот этих событий:

Наблюдения позволили установить, что относительная частота обладает свойствами статистической устойчивости: в различных сериях многочленных испытаний (в каждом из которых может появиться или не появиться это событие) она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной. Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, считают вероятностью данного события.

Статистической вероятностью события A называется относительная частота появления этого события в n произведенных испытаниях.

$$P(A) = \omega(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример. В результате 200 выстрелов по мишени получено 176 попаданий. Определить вероятность поражения цели при одном выстреле и вероятное число попаданий при 25 выстрелах.

Введем обозначения:

A – попадание в мишень.

Из условия задачи следует, что число испытаний, в котором появилось событие A, $m = 176$, а общее число фактически произведенных испытаний $n = 200$. Найдем вероятность поражения цели при одном выстреле:

$$P(A) = \omega(A) = \frac{m}{n} = \frac{176}{200} = 0{,}88.$$

Из формулы статистической вероятности следует, что $m = \omega(A) \cdot n$, тогда подставляя числовые значения n и $\omega(A)$ получим:

$$m = \omega(A) \cdot n = 0{,}88 \cdot 25 = 22.$$

Таким образом, частота попаданий по мишени и вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,88, а вероятное число попаданий при 25 выстрелах равно 22.

11.2.3. Геометрическая вероятность

Пусть случайное испытание можно представить, как *бросание точки* наудачу в некоторую геометрическую область G (на прямой, плоскости, в пространстве). Элементарные исходы – это отдельные точки области G, любое событие A – это подмножество области, пространства элементарных исходов G.

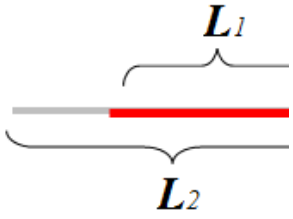
Если для простоты считать, что выбор точек равномерен внутри области G, то вероятность попадания точки в некоторое подмножество пропорциональна его мере (длине, площади, объему) и не зависит от его расположения и формы.

Геометрическая вероятность – это вероятность попадания точки в некоторую, заранее определенную область (отрезок, часть плоскости, объемной фигуры). Она определяется отношением:

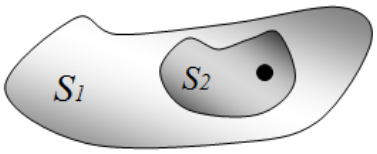
$$P(A)=\frac{m(A)}{m(G)},$$

где $m(G)$ и $m(A)$ – геометрические меры (длины, площади или объемы) всего пространства элементарных исходов G и события A соответственно.

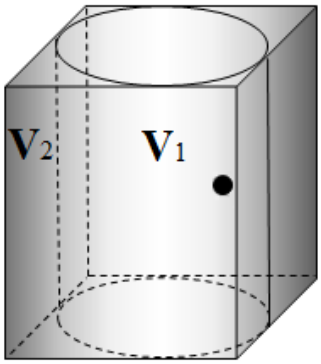
Чаще всего, в одномерном случае речь будет идти о длинах отрезков, в двумерном – о площадях фигур, в трехмерном – об объемах тел.



$$P(A)=\frac{\text{длина } l}{\text{длина L}}$$



$$P(A)=\frac{\text{площадь S}_1}{\text{площадь S}_2}$$



$$P(A)=\frac{\text{объем } V_1}{\text{объем } V_2}$$

Основная сложность при решении задач с использованием геометрической вероятности – построить математическую модель

эксперимента, нужным образом выбрать пространство элементарных исходов, обозначить событие, выразить его математически как некоторую область.

Пример. В прямоугольник со сторонами 7 и 4 см вписан круг радиуса 2 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Введем обозначения:

A – точка окажется внутри круга.

Согласно геометрической интерпретации искомая вероятность равна отношению площади круга, в который точка должна попасть, к площади прямоугольника, в который попадает поставленная точка:

$$P(A) = \frac{S_{круга}}{S_{прямоугольника}} = \frac{\pi 2^2}{7 \cdot 4} \approx 0{,}448799.$$

Таким образом, вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга, приближенно равна 0,448799.

Пример. Какова вероятность встречи двух курсантов, если они договорились встретиться в определенном месте, с 19.00 до 20.00 и могут ждать друг друга в течение 5 минут?

Введем обозначения:

A – курсанты встретятся.

Для решения задачи будем использовать геометрическое определение вероятности события. Обозначим *x* и *y* время прихода первого и второго курсантов соответственно. На значения переменных накладываются ограничения:

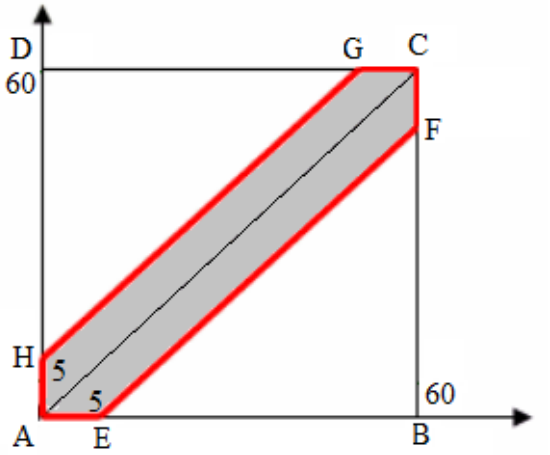
$$0 \le x \le 60; \quad 0 \le y \le 60.$$

В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата *ABCD*.

Курсанты встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 5 минут. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} y - x < 5, & при\ x < y \\ x - y < 5, & при\ x > y \end{cases}.$$

Изобразим геометрически решение системы неравенств:



Тогда вероятность встречи равна отношению площадей шестиугольника *AEFCGH* и квадрата *ABCD*.

$$P(A) = \frac{S_{AEFCGH}}{S_{ABCD}} = \frac{60 \cdot 60 - 55 \cdot 55}{60 \cdot 60} \approx 0{,}159722.$$

Таким образом, вероятность встречи двух курсантов равна 0,159722.

11.3. Вероятности суммы и произведения несовместных событий

Самыми простыми случаями применения формулы классической вероятности можно считать задачи, в условиях которых используются два или более несовместных событий.

Напомним, что два или несколько событий называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. Рассмотрим методы нахождения вероятностей для случаев суммы и произведения несовместных событий.

11.3.1. Вероятность суммы несовместных событий

Теорема 11.1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

Пример. Найдем вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечетное число.

Введем обозначения событий:

A_1 – «выпадение шестерки»; A_2 – «выпадение нечетного числа».

Вероятности наступления указанных событий будут равны:

$$P(A_1) = \frac{1}{6} \text{ и } P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

События A_1 и A_2 являются несовместными, следовательно, для нахождения вероятности того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечетное число можно воспользоваться формулой вероятности суммы двух несовместных событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1+3}{6} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет либо шестерка, либо нечетное число равно $\frac{2}{3}$.

Теорема о вероятности суммы двух несовместных событий обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий.

Теорема 11.2. Вероятность суммы двух или более попарно несовместных событий равна сумме вероятностей всех этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Пример. Стрелок производит выстрел по мишени. Вероятность его попадания в десятку равна 0,2, в девятку – 0,3, в восьмерку – 0,2 и в семерку – 0,1. Найти вероятность поражения цели.

Введем обозначения событий:

A_1 – «попадание в десятку»; A_2 – «попадание в девятку»;

A_3 – «попадание в восьмерку»; A_2 – «попадание в семерку».

Тогда вероятности наступления указанных событий будут равны:

$$P(A_1) = 0,2;\ P(A_2) = 0,3;\ P(A_3) = 0,2;\ P(A_4) = 0,1.$$

Все определенные события A_1, A_2, A_3, A_4 являются попарно несовместными. На самом деле, одним выстрелом одновременно попасть в две, три или четыре зоны поражения невозможно. Следовательно, для нахождения

вероятности поражения цели, то есть наступления одного из вышеперечисленных событий A_1, A_2, A_3, A_4 можно найти по теореме вероятности суммы двух или более несовместных событий:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) =$$
$$= 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0.1 = 0,8.$$

Таким образом, вероятность поражения цели стрелком равна *0,8.*

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример. Вероятность того, что событие А произойдет в течении суток равна 0,348. Определить вероятность того, что событие А не произойдет в течении суток.

Преобразуем формулу из следствия, перенеся в правую часть вероятность события А:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Подставив в полученное выражение вероятность события А, получим:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,348 = 0,652.$$

Таким образом, вероятность того, что событие А не произойдет в течении суток равна 0,652.

11.3.2. Вероятность произведения несовместных событий

Рассмотрим произведение двух или более попарно несовместных событий. Из определения несовместных событий следует, что одновременно эти события произойти не могут, а, следовательно, и вероятность их произведения всегда будет равна нулю.

Теорема 11.3. Вероятность произведения двух или более попарно несовместных событий равна нулю.

Пример. Найти вероятность того, что выбранная наудачу карта из колоды будет тузом и девяткой.

Введем обозначения:

A_1 – «выбран туз»; A_2 – «выбрана девятка».

События A_1 и A_2 являются несовместными, следовательно, вероятность того, что выбранная наудачу карта из колоды будет тузом и девяткой равна нулю.

11.4. Вероятность суммы и произведения совместных независимых событий

В этом вопросе лекции мы изучим еще один частный случай нахождения вероятности. Рассмотрим вероятности суммы и произведения для совместных независимых событий.

Напомним, что событие *A* называется *независимым* от события *B*, если появление события *A* не зависит от появления события B. В противном случае события называются *зависимыми*. Если речь идет о нескольких независимых событиях, то подразумевают, что исследуемые события являются попарно независимыми. Рассмотрим сначала метод нахождения вероятности произведения двух или более совместных независимых событий.

11.4.1. Вероятность произведения совместных независимых событий

Теорема 11.4. Вероятность произведения совместных, независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) .$$

Пример. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения первым равна 0,8, а вторым – 0,7.

Введем обозначения событий:

A – поражение первым орудием; *B* – поражение вторым орудием.

Вероятности поражения цели первым и вторым орудиями равны соответственно: P(A) = 0.8; P(B) = 0.7.

События A и B являются совместными и независимыми, так как оба орудия одновременно, независимо друг от друга могут поразить цель. Тогда для нахождения вероятности совместного поражения цели двумя орудиями

можно использовать формулу вероятности произведения совместных независимых событий:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8\,0{,}7 = 0{,}56\,.$$

Таким образом, вероятность совместного поражения цели двумя орудиями равна 0,56.

Пример. Курсант разыскивает формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула окажется: только в одном справочнике; только в двух справочниках; во всех трех справочниках.

По условию вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны

$$p_1 = 0{,}6;\ p_2 = 0{,}7;\ p_3 = 0{,}8.$$

Тогда вероятности того, что формула не окажутся в этих справочниках будут равны: $q_1 = 0{,}4$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}2$.

Найдем вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике:

$$P(A) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}188.$$

Теперь определим вероятность нахождения формулы только в двух справочниках:

$$P(B) = p_1 p_2 q_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3 =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}452.$$

А теперь рассчитаем вероятность того, что формула можно найти во всех трех справочниках:

$$P(C) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336.$$

Теперь рассмотрим алгоритм нахождения вероятности суммы совместных независимых событий.

Пример. Агент передаёт некоторое сообщение по рации. В целях повышения надёжности передачи сообщения в условиях действия помех,

сообщение дублируется 4 раза. Сообщение считается искаженным, если все 4 посылки окажутся искаженными помехами. Какова вероятность искажения сообщения, если вероятность его искажения при каждой посылке 0,3?

Введем обозначения:

A – искажение команды вообще;

B_i – искажение команды при i-й посылке.

Так как события B_i – независимые по условию задачи, то

$$P(A) = P(B_1 B_2 B_3 B_4) = P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = (0{,}3)^4 = 0{,}0081.$$

11.4.2. Вероятность суммы совместных независимых событий

Теорема 11.5. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Пример. Три стрелка производят залп по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,9, третьим – 0,75. Определить вероятность поражения мишени после залпа.

Введем обозначения событий:

A – поражение цели хотя бы одним стрелком;

A_1 – поражение цели первым стрелком;

A_2 – поражение цели вторым стрелком;

A_2 – поражение цели вторым стрелком.

Вероятности событий равны: $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}9$; $P(A_3) = 0{,}75$.

Все события являются совместными и попарно независимыми. Учитывая это применим формулу вероятности суммы совместных независимых событий:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3).$$

Рассчитаем вероятности событий противоположных для A_1, A_2 и A_3:

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2; \quad P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1; \quad P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

Подставляя значения рассчитанных вероятностей получим:

$$P(A) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}25 = 1 - 0{,}005 = 0{,}995 .$$

Таким образом, вероятность поражения мишени после залпа равна 0,995.

Пример. Курсант разыскивает формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что формула окажется хотя бы в одном справочнике.

По условию вероятности того, что формула окажется в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}6; \qquad p_2 = 0{,}7; \qquad p_3 = 0{,}8.$$

Тогда вероятности того, что формула отсутствует в справочниках:

$$q_1 = 0{,}4; \qquad q_2 = 0{,}3; \qquad q_3 = 0{,}2.$$

Тогда вероятность того, что формула окажется хотя бы в одном справочнике можно найти следующим образом:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}976.$$

Пример. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках.

Введем обозначения событий:

A – деталь содержится не более чем в двух ящиках;

A_1 – нужная сборщику деталь находится в первом ящике;

A_2 – нужная сборщику деталь находится во втором ящике;

A_3 – нужная сборщику деталь находится в третьем ящике.

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}6; \qquad p_2 = 0{,}7; \qquad p_3 = 0{,}8.$$

Вероятности того, что нужной детали не окажется в первом, втором, третьем ящике соответственно равны:

$$q_1 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \; q_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3; \; q_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Вероятность того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках можно выразить следующим образом:

$$P_3(m \le 2) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2).$$

Рассчитаем находящиеся в правой части равенства значения. Сначала найдем вероятность того, что нужная деталь не окажется ни в одном из ящиков:

$$P_3(0) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}024.$$

Затем найдем вероятность того, что нужная деталь окажется только в одном ящике. Для этого сложим вероятности нахождения детали только в первом ящике, только во втором ящике и только в третьем ящике:

$$P_3(1) = p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 +$$
$$+ 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}036 + 0{,}056 + 0{,}096 = 0{,}188.$$

Теперь найдем вероятность того, что нужная деталь окажется только в двух ящиках. Снова рассчитываем и складываем три варианта – первый и второй ящики, первый и третий ящики, второй и третий ящики:

$$P_3(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 +$$
$$+ 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}084 + 0{,}144 + 0{,}224 = 0{,}452.$$

Теперь складываем полученные вероятности $P_3(0), P_3(1), P_3(2)$:

$$P_3(m \le 2) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) = 0{,}024 + 0{,}188 + 0{,}452 = 0{,}664.$$

Таким образом, вероятности того, что деталь содержится не более чем в двух ящиках равна 0,664.

11.5. Вероятность суммы и произведения произвольных событий

Если совместные события являются зависимыми, то есть если появление события *A* зависит от появления события B или наоборот, то использование выше приведенных формул для вычисления вероятностей суммы и произведения для независимых событий дадут неверный результат

Рассмотрим несколько новых методов, которые могут использоваться для любых произвольных событий, зависимых и независимых.

11.5.1. Условная вероятность

Условной вероятностью P(A/B) называют вероятность события *A,* вычисленную в предположении, что событие *B* уже наступило.

Теорема 11.6. Для условной вероятности P(A/B) справедлива формула

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично можно найти и вероятность события B, при уже наступившем событии A:

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Пример. В ящике 21 деталь: 14 стандартных, 7 нестандартных. Последовательно берут две детали, не возвращая их в ящик. Какова вероятность того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали.

Введем обозначения событий:

A – при первом испытании появилась нестандартная деталь;

B – при испытании появилась нестандартная деталь.

Вероятность события A можно определить, как отношение количества нестандартных деталей к общему количеству деталей в ящике:

$$P(A)=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}.$$

После наступления события A в ящике осталось 20 деталей, причем, только 13 оставшихся деталей будут нестандартными. Тогда условную вероятность события B можно определить, как отношение количества оставшихся нестандартных деталей к общему количеству оставшихся деталей в ящике.

$$P(B/A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

Для нахождения вероятности того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали, будем использовать формулу условной вероятности:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}-0{,}1.$$

Таким образом, вероятность того, что при обоих испытаниях появятся нестандартные детали рана 0,1.

11.5.2. Вероятность произведения произвольных событий

Теорема 11.7. Вероятность произведения двух произвольных событий A и B равна вероятности одного из этих событий, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Пример. В ящике 50 деталей, 45 стандартных, 5 нестандартных. Последовательно берут две детали, не возвращая их в ящик.

Какова вероятность того, что:

а) при обоих испытаниях появятся стандартные детали;

б) при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м – нестандартная?

Введем обозначения:

A_1 - при 1-м испытании появилась стандартная деталь;

B_1 - при 1-м испытании появилась нестандартная деталь;

A_2 - при 2-м испытании появилась стандартная деталь;

B_2 - при 2-м испытании появилась нестандартная деталь.

а) Найдем вероятность того, что при обоих испытаниях появятся стандартные детали. Для этого необходимо найти вероятность одновременного наступления событий A_1 и A_2:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{45}{50}\cdot\frac{44}{49} \approx 0{,}808 .$$

б) Теперь найдем вероятность того, что при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м – нестандартная. Этого можно достичь, вычислив вероятность одновременного наступления событий A_1 и B_2:

$$P(A_1B_2) = P(A_1)P(B_2/A_1) = \frac{45}{50}\cdot\frac{5}{49} \approx 0{,}092 .$$

Если необходимо вычислить вероятность произведения большего количества событий, то можно использовать следующую теорему.

Теорема 11.8. Вероятность совместного появления нескольких произвольных событий равна произведению вероятности одного из них на

условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot ...\cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Пример. В пепельнице на месте преступления обнаружено 8 окурков, 5 из которых со следами губной помады. В первый день на исследование берутся 4 окурка. Какова вероятность того, что все они будут со следами губной помады, если отбор объектов экспертизы случаен?

Введем обозначения событий:

A_1 – 1-й окурок имеет следы губной помады;

A_2 – 2-й окурок имеет следы губной помады;

A_3 – 3-й окурок имеет следы губной помады;

A_4 – 4-й окурок имеет следы губной помады.

Согласно теореме о вероятности совместного появления нескольких произвольных событий вероятность того, что все окурки будут со следами губной помады можно найти по формуле:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot P(A_4/A_1A_2A_3A_4).$$

Найдем соответствующие вероятности. Вероятность того, что 1-й окурок имеет следы губной помады, найдем разделив количество окурков со следами губной помады на общее количество окурков:

$$P(A_1) = \frac{5}{8}.$$

Найдем условные вероятности $P(A_2/A_1)$, $P(A_3/A_1A_2)$ и $P(A_4,/A_1A_2A_3)$, каждый раз уменьшая количество окурков со следами губной помады и общего количество оставшихся окурков:

$$P(A_2/A_1) = \frac{4}{7};\quad P(A_3/A_1A_2A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ P(A_4/A_1A_2A_3) = \frac{2}{5}.$$

Подставим полученные значения в формулу вероятности совместного появления нескольких произвольных событий:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot P(A_4/A_1A_2A_3A_4) =$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{14}.$$

Пример. В ящике 50 деталей, 45 – стандартных, 5 – нестандартных. Берут последовательно 3 детали, не возвращая в ящик. Какова вероятность того, что:

а) при всех трех испытаниях появятся стандартные детали;

б) при 1-м испытании – стандартная деталь, при 2-м и 3-м – нестандартные?

Введем обозначения событий:

A_1 – при 1-м испытании появились стандартные детали;

B_1 – при 1-м испытании появились нестандартные детали;

A_2 – при 2-м испытании появились стандартные детали;

B_2 – при 2-м испытании появились нестандартные детали;

A_3 – при 3-м испытании появились стандартные детали;

B_3 – при 3-м испытании появились нестандартные детали.

Все рассматриваемые события являются зависимыми.

Сначала рассмотрим первый случай: при всех трех испытаниях появятся стандартные детали. Используя вероятности совместного появления нескольких произвольных событий получим:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2).$$

Определим вероятности наступления событий A_1, A_2, A_3:

$$P(A_1) = \frac{45}{50}; \quad P(A_2/A_1) = \frac{44}{49}; \quad P(A_3/A_1A_2) = \frac{43}{48}.$$

Подставив полученные значения в формулу произведения, найдем вероятность того, что при всех трех испытаниях появятся стандартные детали.

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2) = \frac{45}{50}\cdot\frac{44}{49}\cdot\frac{43}{48} \approx 0{,}724.$$

Рассмотрим второй случай. Здесь при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м и 3-м – нестандартные. Снова будем использовать формулу произведения произвольных событий:

$$P(A_1B_2B_3) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) \cdot P(B_3 / A_1B_2).$$

Рассчитаем вероятности наступления событий A_1, B_2, B_3:

$$P(A_1) = \frac{45}{50}; \quad P(B_2 / A_1) = \frac{5}{49}; \quad P(B_3 / A_1B_2) = \frac{4}{48}.$$

Подставив полученные значения в формулу произведения, найдем вероятность того, что при 1-м испытании появится стандартная деталь, а при 2-м и 3-м – нестандартные/

$$P(A_1B_2B_3) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) \cdot P(B_3 / A_1B_2) = \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{4}{48} \approx 0{,}008.$$

11.5.3. Вероятность суммы произвольных событий

Теорема 11.9. Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей событий без вероятности их произведения:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Пример. Бросают 2 игральных кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Введем обозначения:

A - появление шестерки при бросании 1-й кости;

B - появление шестерки при бросании 2-й кости.

Используя классическое определение вероятности, имеем:

$$\text{P(A)} = \frac{1}{6}; \ \text{P(B)} = \frac{1}{6}.$$

Так как события A и B независимы, то совместное событие AB при одновременном бросании двух костей, где элемент i, j выпадение чисел i и j на двух костях равно $\text{P(AB)} = \frac{1}{36}$.

Так как события A и B совместны, то

$$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Пример. Три стрелка стреляют по одной цели. Найти вероятность поражения цели при одном залпе, если вероятности поражения цели

соответственно равны: 0,8; 0,8; 0,9.

Введем обозначения:

B_i – поражение цели i-м стрелком (i = 1, 2, 3).

Так как события B_i совместны, используем формулу

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) - P(B_1B_2) - P(B_1B_3) - P(B_2B_3).$$

В нашем примере:

$$P(B_1B_2B_3) = 0,8 + 0,8 + 0,9 - 0,8\cdot0,8 - 0,8\cdot0,9 - 0,8\cdot0,9 + 0,8\cdot0,8\cdot0,9 =$$

$$= 2,5 - 0,8\cdot(0,8 + 0,9 + 0,9) + 0,8\cdot0,8\cdot0,9 = 2,5 - 0,8\cdot2,04 = 0,868.$$

Пример. В ящике 50 деталей, из них 45 стандартных и 5 нестандартных. Из ящика берут одну деталь, затем возвращают в ящик и повторяют проделанную манипуляцию. Какова вероятность того, что, хотя бы одна деталь окажется стандартной?

Введем обозначения событий:

A_1 - при первом испытании появилась стандартная деталь.

A_2 - при втором испытании появилась стандартная деталь.

Используем формулу вероятности суммы двух произвольных событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2).$$

Так как деталь возвращается в ящик, то события A_1, A_2 – независимые, следовательно,

$$P(A_1A_2) = P(A_1)(A_2).$$

Найдем вероятности событий A_1, A_2, A_1A_2,

$$P(A_1) = \frac{45}{50}; \quad P(A_2) = \frac{45}{50}; \quad P(A_1A_2) = \frac{45}{50}\cdot\frac{45}{50}.$$

Тогда окончательно получим:

$$P(A_1 + A_2) = \frac{45}{50} + \frac{45}{50} - \frac{45}{50}\cdot\frac{45}{50} = 2\cdot\frac{45}{50} - \left(\frac{45}{50}\right)^2 = \frac{45}{50}\left(2 - \frac{45}{50}\right) =$$

$$= \frac{45}{50}\cdot\frac{55}{50} = \frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10} = \frac{99}{100} = 0,99.$$

Теорема 11.10. Вероятность суммы *n* произвольных событий можно определить следующим образом:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Ai\right) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) - \sum_{ij} P(AiAj) + \sum_{ijk} P(AiAjAk) + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^{n} Ai\right).$$

Пример. В ящике 50 деталей, из них 45 стандартных, 5 нестандартных. Из ящика берут наудачу 2 детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется нестандартной?

Используется теорема: $P(A_1 + A_2 + \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$ (для попарно несовместимых событий).

Введем обозначения:

B – среди выбранных деталей появилась хотя бы одна нестандартная;

A_1 – выбраны стандартная и нестандартная детали;

A_2 – выбраны две нестандартные детали.

$$B = A_1 + A_2$$

Общее число возможных вариантов выбора двух деталей из пятидесяти равно C_{50}^2. Число событий, благоприятствующих событию A_1, равно $C_{45}^1 C_5^1$. А вероятность события A_1 равна

$$P(A_1) = \frac{C_{45}^1 C_5^1}{C_{50}^2} = \frac{45 \cdot 5 \cdot 48! \cdot 2!}{50!} = \frac{45}{245}.$$

Число событий, благоприятствующих событию A_2, равно C_5^2. Тогда вероятность события A_2 равна

$$P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{50}^2} = \frac{5! \cdot 48! \cdot 2!}{2! \cdot 3! \cdot 50!} = \frac{4 \cdot 5}{45 \cdot 50} = \frac{2}{245}.$$

Вероятность того, что среди выбранных деталей появилась хотя бы одна нестандартная, равна

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = \frac{45}{245} + \frac{2}{245} = \frac{47}{245}.$$

Пример. Выпущено 10000 лотерейных билетов и установлены размеры выигрышей и количества: 10 выигрышей по 200 долларов, 100 – по 100 долларов, 500 – по 25 долларов и 1000 – по 5 долларов. Был куплен один билет. Какова вероятность того, что он будет выигрышным и выиграет не меньше 25

долларов?

Введем обозначения:

А – выигрыш не менее 25 долларов;

A_1 – выигрыш равен 25 долларов (500 билетов);

A_2 – выигрыш равен 100 долларам (100 билетов);

A_3 – выигрыш равен 200 долларов (10 билетов).

Тогда

$$P(A_1) = \frac{500}{10000} = 0{,}05;\ P(A_2) = \frac{100}{10000} = 0{,}01;\ P(A_3) = \frac{10}{10000} = 0{,}001;$$

P(A) = 0,05+0,01+0,001 = 0,061.

11.6. Формула полной вероятности

Следствием двух основных теорем теории вероятностей, теоремы сложения и теоремы умножения, является формула полной вероятности.

11.6.1. Основные понятия и формулы

Пусть событие *A* может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, то есть в результате испытания обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий. Поскольку заранее не известно, какое из событий H_i наступит, события $H_1, H_2, \ldots, H_n$, будем называть *гипотезами*.

В силу того, что H_1, H_2, ..., H_n – полная группа попарно несовместных событий, используя теорему сложения для попарно несовместных событий, можно получить вероятность события *A*:

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \ldots + P(A \cap H_n)$$

Кратко полученную формулу можно записать в виде:

$$P(A) = \sum_{i+1}^{n} P(A \cap H_i).$$

Вероятности $P(A \cap H_i)$ можно представить, как произведение вероятности гипотезы H_i на условную вероятность события *A* при наступлении H_i:

$$P(A \cap H_i) = P(H_i) \cdot P(A / H_i) .$$

В результате подстановки выражения $P(H_i) \cdot P(A / H_i)$ вместо $P(A \cap H_i)$ получим новую формулу вычисления вероятности события *A*:

$$P(A) = \sum_{i+1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i) .$$

Полученная формула называется формулой *полной вероятности.*

Теорема 11.11. Если событие *A* может произойти только при условии появления одной из гипотез H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу, то вероятность события *A* равна сумме произведения вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующие условные вероятности события *A*:

$$P(A) = \sum_{i+1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)$$

В случае небольшого количества гипотез, образующих полную группу, формулы полной вероятности проще записывать в виде:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A / H_n) .$$

11.6.2. Вычисление вероятностей с помощью формулы полной вероятности

Формула полной вероятности используется в случаях, когда вероятность события *A* вычисляется сложно, гипотезы H_i образуют полную группу, а условные вероятности $P(A/H_I)$ и вероятности самих гипотез $P(H_i)$ вычисляются достаточно просто.

Пример. В пирамиде 20 винтовок, 8 из них с оптическим прицелом. Вероятность поражения цели при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,98; а для винтовки без оптического прицела – 0,7. Стрелок производит выстрел из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность того, что цель будет поражена?

Введем обозначения событий.

A – цель поражена;

H_1 – выбрана винтовка с оптическим прицелом;

H_2 – выбрана винтовка без оптического прицела.

События H_1 и H_2 состоят в том, что будет выбрана винтовка с оптическим или без оптического прицела. Определим вероятности наступления этих гипотез. Используя теорему классической вероятности получим:

$$P(H_1) = \frac{8}{20} = 0{,}4; \quad P(H_2) = \frac{20-8}{20} = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

По условию задачи вероятности наступления события А при наступлении гипотез H_1, H_2 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}98; \quad P(A/H_2) = 0{,}7.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}812.$$

Таким образом, вероятность того, что цель поражена рана 0,812.

Пример. Литье в болванках для дальнейшей обработки поступает из двух цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго – 20%. Найти вероятность того, что одна наудачу взятая болванка не имеет дефектов.

Введем обозначения:

А –болванка взята без дефектов;

H_1 – заготовка взята из 1-го цеха;

H_2 – заготовка взята из 2-го цеха.

События H_1 и H_2 состоят в том, что взятая болванка взята из первого или второго цеха. Определим вероятности наступления этих гипотез:

$$P(H_1) = \frac{70}{100} = 0{,}7; \quad P(H_2) = \frac{30}{100} = 0{,}3.$$

По условию вероятности наступления события А при условиях наступления гипотез H_1 и H_2 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 1 - \frac{10}{100} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9; \quad P(A/H_2) = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}87.$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу болванка не имеет дефектов равна 0,87.

Пример. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9; второй цех – с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Введем обозначения событий.

A - выбрана деталь отличного качества.

гипотеза H_1 - выбранная деталь изготовлена в первом цехе;

гипотеза H_2 - выбранная деталь изготовлена во втором цехе;

гипотеза H_3 - выбранная деталь изготовлена в третьем цехе.

События H_1, H_2, H_3 состоят в том, что выбранная деталь изготовлена в первом, втором, третьем цехах, тогда

$$P(H_1) = \frac{18}{50}; \quad P(H_2) = \frac{20}{50}; \quad P(H_3) = \frac{12}{50}.$$

По условию вероятности наступления события A при наступлении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}9; \quad P(A/H_2) = 0{,}6; \quad P(H_3) = 0{,}9.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot \frac{18}{50} + 0{,}6 \cdot \frac{20}{50} + 0{,}9 \cdot \frac{12}{50} = \frac{39}{50} = 0{,}78.$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества равна 0,78.

Пример. На огневом рубеже три стрелка. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,75; вторым – 0,9; а третьим – 0,87. Стреляет произвольно выбранный стрелок. Найти вероятность попадания в цель.

Введем обозначения событий.

A – попадание в цель;

гипотеза H_1 – стреляет первый стрелок;

гипотеза H_2 – стреляет второй стрелок;

гипотеза H_3 – стреляет третий стрелок.

События H_1, H_2, H_3 состоят в том, что будет стрелять первый, второй или третий стрелок. Определим вероятности наступления этих гипотез. Поскольку стрелков всего три, то вероятности того, что будет стрелять первый, второй, третий одна и та же:

$$P(H_1)=\frac{1}{3};\quad P(H_2)=\frac{1}{3};\quad P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

По условию вероятности наступления события А при наступлении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно равны:

$$P(A/H_1)=0{,}75;\quad P(A/H_2)=0{,}9;\quad P(A/H_3)=0{,}87.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0{,}75+\frac{1}{3}\cdot 0{,}9+\frac{1}{3}\cdot 0{,}87=\frac{1}{3}\cdot(0{,}75+0{,}9+0{,}87)=\frac{1}{3}\cdot 2{,}52=0{,}84.$$

Таким образом, вероятность того, что цель поражена рана 0,84.

Пример. В первой урне находится 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 5 белых и 3 чёрных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух наудачу берется один. Какова вероятность, что это будет белый шар?

Введем обозначения:

А – из двух урн вынули наудачу белый шар;

H_1 – из первой урны вытащили белый шар, а из второй – черный;

H_2 – из первой урны вытащили белый шар, а из второй – белый;

H_3 – из первой урны вытащили черный шар, а из второй – черный;

H_4 –из первой урны вытащили черный шар, а из второй – белый.

Найдем вероятности гипотез H_1, H_2, H_3, H_4, используя классическое определению вероятности:

$$P(H_1) = \frac{4}{4+6} \cdot \frac{3}{5+3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{80} = \frac{3}{20};$$

$$P(H_2) = \frac{4}{4+6} \cdot \frac{5}{5+3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4};$$

$$P(H_3) = \frac{6}{4+6} \cdot \frac{3}{5+3} = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{80} = \frac{9}{40};$$

$$P(H_4) = \frac{6}{4+6} \cdot \frac{5}{5+3} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}.$$

Найдем вероятности события А, при условии появления гипотез H_1, H_2, H_3, H_4. При появлении гипотез H_1 и H_3 условные вероятности наступления события А будут равны 0,5, поскольку в этих случаях мы выбираем один белый и один черный шары:

$$P(A/H_1) = \frac{1}{2}; \quad P(A/H_4) = \frac{1}{2}.$$

При появлении H_2 событие A/H_2 будет достоверным, так как обо шара – белые, а при появлении H_4 событие A/H_4 будет невозможным, так как оба выбранных шара – черные:

$$P(A/H_2) = 1; \quad P(A/H_3) = 0.$$

Вероятность события А найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) + P(H_4) \cdot P(A/H_4) =$$

$$= \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{9}{40} \cdot 0 + \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{8} = \frac{41}{80} = 0{,}5152.$$

Таки образом, вероятность того, что в результате испытания появится белый шар равна 0,5152.

11.7. Формула гипотез Байеса

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула гипотез Байеса.

11.7.1. Теорема Байеса

Теорема 11.12. Если событие *A* может произойти только при условии появления одной из гипотез H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу, то условная вероятность события H_i в предположении, что событие A уже произошло, определяется по *формуле Байеса*:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}.$$

где *P(A)* вычисляют по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i+1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i).$$

Подставляя формулу полной вероятности в знаменатель дроби, запишем формулу гипотез Байеса в следующем виде:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)}.$$

11.7.2. Вычисление вероятностей гипотез

Пример. Два полицейских выстрелили по преступнику, в результате чего он был поражен одной пулей. Вероятность попадания первым полицейским равна 0,8; а вторым – 0,7. Каковы вероятности того, что преступник был поражен первым или вторым полицейским?

Введем обозначения событий.

A – поражение преступника;

H_1 - в цель попал только первый полицейский;

H_2 - в цель попал только второй полицейский.

По условию задачи вероятности поражения преступника p_1 и p_2 двумя полицейскими соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}8; \quad p_2 = 0{,}7.$$

Тогда вероятности промахов q_1 и q_2 первым и вторым полицейскими будут равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}3.$$

Вероятности поражения цели только первым или только вторым полицейскими будут равны:

$$P(H_1) = p_1 q_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24;$$

$$P(H_2) = p_2 q_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14.$$

Из условия задачи мы знаем, что преступник был поражен одной пулей, следовательно, события A/H_1 и A/H_2 являются достоверными и, следовательно:

$$P(A/H_1) = 1; \quad P(A/H_2) = 1.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = 0{,}24 \cdot 1 + 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}38.$$

Тогда вероятность поражения преступника только первым полицейским равна:

$$P(H_1/A)\frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}24}{0{,}38} = \frac{12}{19};$$

а вероятность поражения преступника только вторым полицейским равна:

$$P(H_2/A)\frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}14}{0{,}38} = \frac{7}{19}.$$

Таким образом, вероятности того, что преступник был поражен первым или вторым полицейским равны соответственно $\frac{12}{19}$ и $\frac{7}{19}$.

Пример. Литье в болванках для дальнейшей обработки поступает из двух цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго – 20%. Найти вероятность того, что наудачу взятая не имеющая дефектов болванка была взята из первого цеха.

Введем обозначения:

A – взятая болванка оказалась без дефектов;

H_1 – заготовка получена из первого цеха;

H_2 – заготовка получена из второго цеха.

Тогда по условию задачи вероятности того, что болванки получены из первого или второго цеха равны соответственно:

$$P(H_1) = 0{,}7; \quad P(H_2) = 0{,}3.$$

А вероятности события А при условии наступления гипотез H_1 и H_2 будут соответственно равны:

$$P(A/H_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9; \quad P(A/H_2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

По формуле полной вероятности определим вероятность события А.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}87.$$

Тогда по формуле Байеса проверим первую гипотезу:

$$P(H_1/A)\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}9}{0{,}87} = \frac{0{,}63}{0{,}87} \approx 0{,}724138.$$

Таким образом, вероятность того, что наудачу взятая не имеющая дефектов болванка была взята из первого цеха приближенно равна 0,724138.

Пример. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 - во втором, остальные - в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью – 0,9; второй цех - с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе?

Введем обозначения.

А – выбрана деталь отличного качества;

гипотеза H_1 – выбранная деталь изготовлена в первом цехе;

гипотеза H_2 – выбранная деталь изготовлена во втором цехе;

гипотеза H_3 – выбранная деталь изготовлена в третьем цехе.

Вероятности изготовления выбранной детали в первом, втором или третьем цехе будут равны:

$$P(H_1) = \frac{18}{50}; \quad P(H_2) = \frac{20}{50}; \quad P(H_1) = \frac{12}{50}.$$

Из условия задачи мы знаем, первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью – 0,9; второй цех - с вероятностью 0,6.

Таким образом выпишем вероятности события А, при условии, что выбранная деталь изготовлена в первом, втором или третьем цехе:

$$P(A/H_1)=0{,}9;\quad P(A/H_2)=0{,}6;\quad P(A/H_3)=0{,}9.$$

Тогда по формуле Байеса найдем решение задачи, вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{0{,}9\cdot\frac{18}{50}}{0{,}9\cdot\frac{18}{50}+0{,}6\cdot\frac{20}{50}+0{,}9\cdot\frac{12}{50}}=\frac{9\cdot 18}{9\cdot 18+6\cdot 20+9\cdot 12}=\frac{162}{390}\approx 0{,}415385.$$

Таким образом, вероятность того, что взятая наудачу деталь отличного качества изготовлена в первом цехе равна примерно 0,415385.

Пример. Три стрелка одновременно стреляют в цель, причем обнаруживаются только 2 попадания. Найти вероятность того, что первый и второй стрелки попали в цель, если вероятность попадания первым стрелком равна 0,4; вторым – 0,5; третьим – 0,45.

Введем обозначения:

А – цель поражена двумя пулями;

H_1 – только первый и второй стрелки попали в цель;

H_2 – только первый и третий стрелки попали в цель;

H_3 – только второй и третий стрелки попали в цель.

По условию задачи вероятности p_1, p_2 и p_3 попадания в цель стрелками равны соответственно:

$$p_1=0{,}4;\quad p_2=0{,}5;\quad p_3=0{,}45.$$

Тогда вероятности промахов q_1, q_2 и q_3 первым, вторым и третьим полицейскими будут равны:

$$q_1=1-p_1=0{,}62;\quad q_2=1-p_2=0{,}5;\quad q_3=1-p_3=0{,}55.$$

Найдем вероятности наступления гипотез H_1, H_2 и H_3:

$$P(H_1)=p_1p_2q_3=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}55=0{,}11;$$

$$P(H_2) = p_1 q_2 p_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}45 = 0{,}09;$$

$$P(H_3) = q_2 p_2 p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}45 = 0{,}135.$$

Условные вероятности поражения цели, при условии, что выполняются гипотезы H_1, H_2, H_3 равны:

$$P(A/H_1) = 1; \quad P(A/H_2) = 1; \quad P(A/H_3) = 1.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность того, что цель будет поражена двумя стрелками:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}11 \cdot 1 + 0{,}09 \cdot 1 + 0{,}135 \cdot 1 = 0{,}335.$$

Тогда по формуле гипотез Байеса вероятность поражения цели только первым и вторым стрелком равна:

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1/\mathrm{A}) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}11 \cdot 1}{0{,}335} = \frac{110}{335} = \frac{22}{67} \approx 0{,}328359.$$

Таким образом, вероятность поражения цели только первым и вторым стрелком приближенно равна 0,328359.

Пример. Из тридцати стрелков 12 попадает в цель с вероятностью 0,6, восемь – с вероятностью 0,5 и десять – с вероятностью 0,7. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

Введем обозначения:

A – выбранный стрелок попал в мишень;

H_1 – выбранный стрелок принадлежал первой группе;

H_2 – выбранный стрелок принадлежал второй группе;

H_3 – выбранный стрелок принадлежал третьей группе.

Согласно классическому определению вероятности гипотез H_1, H_2 и H_3 соответственно равны:

$$P(H_1) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}; \quad P(H_2) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}; \quad P(H_3) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Из условия задачи выпишем вероятности события A при условии

наступления гипотез H_1, H_2 и H_3:

$$P(A/H_1)=0{,}6;\quad P(A/H_2)=0{,}5;\quad P(A/H_3)=0{,}7.$$

По формуле полной вероятности найдем вероятность наступления события А:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 0{,}6+\frac{4}{15}\cdot 0{,}5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}7=\frac{6\cdot 6+4\cdot 5+5\cdot 7}{150}=\frac{91}{150}.$$

Теперь формуле Байеса найдем вероятности того, что стрелок принадлежал *i*-ой группе, если он попал в цель:

$$\mathrm{P(H_1/A)}=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}6}{\frac{91}{150}}=\frac{1{,}2\cdot 150}{5\cdot 91}=\frac{180}{455}=\frac{36}{91}\approx 0{,}395604.$$

$$\mathrm{P(H_2/A)}=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{15}\cdot 0{,}5}{\frac{91}{150}}=\frac{2\cdot 150}{15\cdot 91}=\frac{300}{1365}=\frac{20}{91}\approx 0{,}219780.$$

$$\mathrm{P(H_3/A)}=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}7}{\frac{91}{150}}=\frac{0{,}7\cdot 150}{3\cdot 91}=\frac{105}{273}=\frac{35}{91}\approx 0{,}384615.$$

Сравним полученные значения. Наибольшим значением является условная вероятность первой гипотезы $\mathrm{P(H_1/A)}\approx 0{,}395604$. Значит, вероятнее всего стрелок принадлежал первой группе.

Вопросы для самоконтроля

1. Определите понятия достоверных, невозможных, случайных, неопределенных событий. Приведите примеры.

2. Дайте подробную классификацию событий. Приведите примеры различных событий.

3. В чем отличие совместных событий от несовместных? Приведите примеры совместных и несовместных событий.

4. Сформулируйте понятия зависимых и независимых событий. Приведите примеры зависимых и независимых событий.

5. Какие математические операции можно совершать над элементарными событиями?

6. Сформулируйте понятие суммы двух или нескольких событий. Приведите примеры суммы событий.

7. Приведите примеры произведения двух или нескольких событий. Приведите примеры произведения событий.

8. Что такое вероятность события? Какие виды вероятностей вы знаете?

9. Перечислите и на примерах продемонстрируйте основные свойства вероятностей.

10. Дайте определение классическому определение вероятности события. Приведите примеры нахождения вероятностей.

11. Что такое сумма событий? Объясните принципы нахождения вероятностей суммы двух или более несовместных событий.

12. Дайте определение произведения событий. Чему равна вероятность произведения двух или более несовместных событий?

13. Приведите примеры использования теорем для определения суммы совместных независимых событий.

14. Продемонстрируйте методы нахождения вероятностей произведения совместных независимых событий. Чему равна эта вероятность?

15. Дайте определение условной вероятности. Приведите примеры использования условной вероятности.

16. Каковы алгоритмы нахождения вероятностей совместного наступления двух и более зависимых событий?

17. Приведите примеры использования теорем для определения суммы совместных зависимых событий.

18. Дайте определение полной вероятности событий.

19. Напишите формулу полной вероятности. В каких случаях данную формулу можно использовать?

20. Охарактеризуйте понятия полной группы и гипотез в формуле полной вероятности. Приведите примеры.

21. В каких случаях используется формула полной вероятности? Приведите примеры.

22. Продемонстрируйте на различных примерах метод использования формулы полной вероятности. В чем сходство и различие приведенных примеров?

23. Напишите формулу гипотез Байеса. В каких случаях данную формулу можно использовать?

24. Для чего и каким образом применяется формула гипотез Байеса?

25. Приведите примеры использования формулы гипотез Байеса.

Глава 12. Повторные испытания

В исследованиях часто приходится сталкиваться с такими задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний, в результате каждого из которых может появиться или не появиться событие A. При этом интерес представляет исход не каждого «отдельного» испытания, а общее количество появлений события A в результате определенного количества испытаний.

В подобных задачах нужно уметь определять вероятность любого числа m появлений события A в результате n испытаний. Рассмотрим случай, когда испытания являются независимыми и вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Такие испытания называются *повторными независимыми испытаниями*.

В настоящей главе мы рассмотрим важнейшие методы нахождения вероятностей событий при повторных испытаниях. Мы познакомимся с основными понятиями повторных испытаний, а также с теоремой Бернулли, позволяющей вычислять вероятности событий для относительно небольшого числа испытаний.

Использование формулы Бернулли при больших значениях количества испытаний вызывает большие трудности. Это связано с громоздкими вычислениями. Как решить такие проблемы, мы увидим из содержания нашей главы. Она включает вопросы, посвященные предельным теоремам схеме Бернулли. Здесь мы изучим методы нахождения вероятностей с помощью формулы Пуассона, рассмотрим принципы использования локальной теоремы Муавра-Лапласа, интегральной теоремы Муавра-Лапласа, а также детально разберем следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

И в заключении главы часто задаваемый вопрос: каково будет наивероятнейшее число наступления событий в схеме Бернулли. Здесь будет описан алгоритм нахождения наивероятнейшего числа появления события в повторных испытаниях, а также основные принципы использования этого алгоритма.

12.1. Формула Бернулли

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях.

Если вероятность наступления события A в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются *независимыми относительно события A*.

Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события A в каждом испытании одна и та же. Описанная последовательность независимых испытаний получила название схемы Бернулли (Якоб Бернулли 1655 – 1705).

Теорема 12.1. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p, то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях ровно m раз можно вычислить по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p.$$

Пример. По мишени производится 5 выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена 3 выстрелами?

По условию задачи

$$n = 5;\ p = 0{,}8;\ m = 3.$$

Подставляя значения в формулу Бернулли, получим:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot (1 - 0{,}8)^{5-3} = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdot 3} \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}008 = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}04 = 0{,}2048.$$

Таким образом, вероятность того, что мишень будет поражена тремя выстрелами из пяти произведенных равна 0,2048.

Пример. Вероятность выиграть по лотерейному билету равна $\frac{1}{7}$. Найти вероятность выигрыша по двум билетам из пяти купленных лотерейных билетов.

По условию задачи

$$p=\frac{1}{7};\quad n=5;\quad k=2;\quad q=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}.$$

Подставляя значения в формулу Бернулли, получим:

$$P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^3=\frac{5!}{(5-3)!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{49}\cdot\frac{216}{343}=$$

$$=\frac{4\cdot 5}{2}\cdot\frac{216}{16807}\approx 0{,}128518\ .$$

Таким образом, вероятность выигрыша по двум билетам из пяти купленных лотерейных билетов приближенно равна 0,128518.

В ряде случаев требуется определить вероятности появления события A менее m раз, более m раз, не менее m раз, не более m раз. В этих случаях могут быть использованы формулы:

$$\textit{менее } m \textit{ раз}\quad P(X<m)=P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(m-1);$$

$$\textit{более } m \textit{ раз}\quad P(X>m)=P_n(m+1)+P_n(m+2)+\ldots+P_n(n);$$

$$\textit{не менее } m \textit{ раз}\quad P(X\ge m)=P_n(m)+P_n(m+1)+\ldots+P_n(n);$$

$$\textit{не более } m \textit{ раз}\quad P(X\le m)=P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(m).$$

Пример. Найти вероятность того, что при шести бросках игрального кубика шестерка выпадет: а) менее 3 раз, б) не менее 3 раз.

В случае а) шестерка на игральном кубике может выпасть 0, 1 и 2 раза. Найдем соответствующие вероятности:

$$P_6(0)=C_6^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6=1\cdot 1\cdot\frac{15625}{46656}=\frac{15625}{46656}\approx 0{,}334898;$$

$$P_6(1)=C_6^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3125}{7776}=\frac{3125}{7776}\approx 0{,}401878;$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{15}{36} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{3125}{15552} \approx 0{,}200939 .$$

Для нахождения вероятности того, что шестерка на игральном кубике может выпасть 0, 1 и 2 раза сложим полученные значения $P_6(0)$, $P_6(1)$ и $P_6(2)$:

$$P(X < 3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) \approx 0{,}334898 + 0{,}401878 + 0{,}200939 \approx 0{,}937714 .$$

В случае б) шестерка на игральном кубике может выпасть 3, 4, 5 и 6 раз, тогда это событие является противоположным событию из случая а):

$$P(X \geq 3) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = 1 - P(X < 3) \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}937714 \approx 0{,}062286 .$$

Таким образом, вероятность того, что при шести бросках игрального кубика шестерка выпадет менее 3 раз равна 0,937714; не менее 3 раз вероятность равна 0,062286.

12.2. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Использование формулы Бернулли при больших значениях n и m вызывает большие трудности. Это связано с громоздкими вычислениями.

Пример. По мишени производится 10000 выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена 7000 раз?

$$P_{10000}(7000) = C_{10000}^{7000}(0{,}8)^{7000}(0{,}2)^{3000} = \frac{10000!}{7000!\cdot 3000!} \cdot (0{,}8)^{7000} \cdot (0{,}2)^{3000} .$$

Вычисление $P_n(m)$ вызывает затруднения также при малых значениях p. Возникает необходимость в поиске приближенных формул для вычисления $P_n(m)$, обеспечивающих необходимую точность.

Такие формулы дают нам предельные теоремы. Они содержат так называемые асимптотические формулы, которые при больших значениях испытаний дают сколь угодно малую относительную погрешность. Рассмотрим три предельные теоремы, содержащие асимптотические формулы для вычисления биноминальной вероятности $P_n(m)$ при $n \to \infty$.

12.2.1. Формула Пуассона

Теорема 12.2. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$), при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ ($np \to \lambda$), то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Данное выражение называется *асимптотической формулой Пуассона*.

Из предельного равенства при больших n и малых p вытекает *приближенная формула Пуассона:*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{где } \lambda = np,\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Формулу Пуассона применяют, если

1) вероятность p успеха крайне мала, то есть сам по себе успех (появление события A) является редким событием, но количество испытаний n велико, среднее число успехов $\lambda = np$ незначительно;

2) $n \geq 50$;

3) $np \leq 10$.

Формула Пуассона часто находит применение в *теории массового обслуживания*.

Пример. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность звонка одного абонента в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

По условию задачи:

$$n = 2000; \quad p = 0{,}003; \quad m = 5.$$

Тогда

$$\lambda = np = 2000 \cdot 0{,}003 = 6.$$

Применим формулу Пуассона

$$P_{2000}(5)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=\frac{(2000\cdot 0{,}003)^5 e^{-20000{,}003}}{5!}=\frac{6^5 e^{-6}}{5!}\approx 0{,}160623.$$

Таким образом, вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов равна 0,160623.

Пример. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность, что он обнаружит ровно 3 бракованных детали? Какова вероятность, что контролер обнаружит не меньше 3-х бракованных деталей?

По условию задачи мы имеем 1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p=0,005, и произведением np <5.

Применяя пуассоновское приближение с np=5, рассчитаем вероятность, что контролер обнаружит ровно 3 бракованных детали:

$$\mathrm{P1000}(3)\approx\frac{5^3\cdot e^{-5}}{3!}\approx 0{,}140374.$$

Вероятность того, что контролер обнаружит не меньше трех бракованных деталей, рассчитаем, как разность между единицей и вероятностью обнаружения менее трех бракованных деталей:

$$P_{1000}(m\ \geq 3)=1-P_{1000}(m<3)=\ 1-(P_{1000}(0)+P_{1000}(1)+P_{1000}(2)).$$

Найдем вероятности $p_{1000}(0)$, $p_{1000}(1)$, $p_{1000}(2)$:

$$\mathrm{P1000}(0)\approx\frac{5^0\cdot e^{-5}}{0!}\approx 0{,}006738;\qquad \mathrm{P1000}(1)\approx\frac{5^1\cdot e^{-5}}{1!}\approx 0{,}033680;$$

$$\mathrm{P1000}(2)\approx\frac{5^2\cdot e^{-5}}{2!}\approx 0{,}084224.$$

Подставляя полученные значения в формулу для $P_{1000}(m\ \geq 3)$ получим:

$$P_{1000}(m\ \geq 3)\approx 1-(0{,}006738\ +0{,}033680\ +0{,}084224\ )=0{,}875358\ .$$

Таким образом, вероятность того, что контролер обнаружит ровно три бракованных детали равна 0,140374, а вероятность того, что контролер обнаружит не меньше трех бракованных деталей равна 0,875358.

12.2.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 12.3. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функция Гаусса, обладающая следующими свойствами:

1) функция $\varphi(x)$ является четной, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) при $x \geq 4$ функция $\varphi(x) = 0$.

Для упрощения расчетов ниже представлена таблица значений функции Гаусса φ(x) (Таблица 12.1).

Пример. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

По условию задачи $n = 100$, $m = 75$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$. Применим локальную теорему Муавра-Лапласа.

Найдем значение аргумента x:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-5}{\sqrt{16}} = -1{,}25 .$$

Используя Таблицу 1, определим значение функции Гаусса $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826 .$$

Найдем вероятность $P_{100}(75)$:

$$P_{100}(75) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot \varphi(-1{,}25) = \frac{1}{\sqrt{16}} \cdot 0{,}1826 = 0{,}04565 .$$

Таким образом, вероятность того, что что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз равна 0,04565.

Таблица 12.1.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ГАУССА															
0	0,398942	0,5	0,352065	1	0,241971	1,5	0,129518	2	0,053991	2,5	0,017528	3	0,004432	3,5	0,000873
0,01	0,398922	0,51	0,350292	1,01	0,239551	1,51	0,127583	2,01	0,052919	2,51	0,017095	3,01	0,004301	3,51	0,000843
0,02	0,398862	0,52	0,348492	1,02	0,237132	1,52	0,125665	2,02	0,051864	2,52	0,016670	3,02	0,004173	3,52	0,000814
0,03	0,398763	0,53	0,346668	1,03	0,234714	1,53	0,123763	2,03	0,050824	2,53	0,016254	3,03	0,004049	3,53	0,000785
0,04	0,398623	0,54	0,344818	1,04	0,232297	1,54	0,121878	2,04	0,049800	2,54	0,015848	3,04	0,003928	3,54	0,000758
0,05	0,398444	0,55	0,342944	1,05	0,229882	1,55	0,120009	2,05	0,048792	2,55	0,015449	3,05	0,003810	3,55	0,000732
0,06	0,398225	0,56	0,341046	1,06	0,227470	1,56	0,118157	2,06	0,047800	2,56	0,015060	3,06	0,003695	3,56	0,000706
0,07	0,397966	0,57	0,339124	1,07	0,225060	1,57	0,116323	2,07	0,046823	2,57	0,014678	3,07	0,003584	3,57	0,000681
0,08	0,397668	0,58	0,337180	1,08	0,222653	1,58	0,114505	2,08	0,045861	2,58	0,014305	3,08	0,003475	3,58	0,000657
0,09	0,397330	0,59	0,335213	1,09	0,220251	1,59	0,112704	2,09	0,044915	2,59	0,013940	3,09	0,003370	3,59	0,000634
0,1	0,396953	0,6	0,333225	1,1	0,217852	1,6	0,110921	2,1	0,043984	2,6	0,013583	3,1	0,003267	3,6	0,000612
0,11	0,396536	0,61	0,331215	1,11	0,215458	1,61	0,109155	2,11	0,043067	2,61	0,013234	3,11	0,003167	3,61	0,000590
0,12	0,396080	0,62	0,329184	1,12	0,213069	1,62	0,107406	2,12	0,042166	2,62	0,012892	3,12	0,003070	3,62	0,000569
0,13	0,395585	0,63	0,327133	1,13	0,210686	1,63	0,105675	2,13	0,041280	2,63	0,012558	3,13	0,002975	3,63	0,000549
0,14	0,395052	0,64	0,325062	1,14	0,208308	1,64	0,103961	2,14	0,040408	2,64	0,012232	3,14	0,002884	3,64	0,000529
0,15	0,394479	0,65	0,322972	1,15	0,205936	1,65	0,102265	2,15	0,039550	2,65	0,011912	3,15	0,002794	3,65	0,000510
0,16	0,393868	0,66	0,320864	1,16	0,203571	1,66	0,100586	2,16	0,038707	2,66	0,011600	3,16	0,002707	3,66	0,000492
0,17	0,393219	0,67	0,318737	1,17	0,201214	1,67	0,098925	2,17	0,037878	2,67	0,011295	3,17	0,002623	3,67	0,000474
0,18	0,392531	0,68	0,316593	1,18	0,198863	1,68	0,097282	2,18	0,037063	2,68	0,010997	3,18	0,002541	3,68	0,000457
0,19	0,391806	0,69	0,314432	1,19	0,196520	1,69	0,095657	2,19	0,036262	2,69	0,010706	3,19	0,002461	3,69	0,000441
0,2	0,391043	0,7	0,312254	1,2	0,194186	1,7	0,094049	2,2	0,035475	2,7	0,010421	3,2	0,002384	3,7	0,000425
0,21	0,390242	0,71	0,310060	1,21	0,191860	1,71	0,092459	2,21	0,034701	2,71	0,010143	3,21	0,002309	3,71	0,000409
0,22	0,389404	0,72	0,307851	1,22	0,189543	1,72	0,090887	2,22	0,033941	2,72	0,009871	3,22	0,002236	3,72	0,000394
0,23	0,388529	0,73	0,305627	1,23	0,187235	1,73	0,089333	2,23	0,033194	2,73	0,009606	3,23	0,002165	3,73	0,000380
0,24	0,387617	0,74	0,303389	1,24	0,184937	1,74	0,087796	2,24	0,032460	2,74	0,009347	3,24	0,002096	3,74	0,000366
0,25	0,386668	0,75	0,301137	1,25	0,182649	1,75	0,086277	2,25	0,031740	2,75	0,009094	3,25	0,002029	3,75	0,000353
0,26	0,385683	0,76	0,298872	1,26	0,180371	1,76	0,084776	2,26	0,031032	2,76	0,008846	3,26	0,001964	3,76	0,000340
0,27	0,384663	0,77	0,296595	1,27	0,178104	1,77	0,083293	2,27	0,030337	2,77	0,008605	3,27	0,001901	3,77	0,000327
0,28	0,383606	0,78	0,294305	1,28	0,175847	1,78	0,081828	2,28	0,029655	2,78	0,008370	3,28	0,001840	3,78	0,000315
0,29	0,382515	0,79	0,292004	1,29	0,173602	1,79	0,080380	2,29	0,028985	2,79	0,008140	3,29	0,001780	3,79	0,000303
0,3	0,381388	0,8	0,289692	1,3	0,171369	1,8	0,078950	2,3	0,028327	2,8	0,007915	3,3	0,001723	3,8	0,000292
0,31	0,380226	0,81	0,287369	1,31	0,169147	1,81	0,077538	2,31	0,027682	2,81	0,007697	3,31	0,001667	3,81	0,000281
0,32	0,379031	0,82	0,285036	1,32	0,166937	1,82	0,076143	2,32	0,027048	2,82	0,007483	3,32	0,001612	3,82	0,000271
0,33	0,377801	0,83	0,282694	1,33	0,164740	1,83	0,074766	2,33	0,026426	2,83	0,007274	3,33	0,001560	3,83	0,000260
0,34	0,376537	0,84	0,280344	1,34	0,162555	1,84	0,073407	2,34	0,025817	2,84	0,007071	3,34	0,001508	3,84	0,000251
0,35	0,375240	0,85	0,277985	1,35	0,160383	1,85	0,072065	2,35	0,025218	2,85	0,006873	3,35	0,001459	3,85	0,000241
0,36	0,373911	0,86	0,275618	1,36	0,158225	1,86	0,070740	2,36	0,024631	2,86	0,006679	3,36	0,001411	3,86	0,000232
0,37	0,372548	0,87	0,273244	1,37	0,156080	1,87	0,069433	2,37	0,024056	2,87	0,006491	3,37	0,001364	3,87	0,000223
0,38	0,371154	0,88	0,270864	1,38	0,153948	1,88	0,068144	2,38	0,023491	2,88	0,006307	3,38	0,001319	3,88	0,000215
0,39	0,369728	0,89	0,268477	1,39	0,151831	1,89	0,066871	2,39	0,022937	2,89	0,006127	3,39	0,001275	3,89	0,000207
0,4	0,368270	0,9	0,266085	1,4	0,149727	1,9	0,065616	2,4	0,022395	2,9	0,005953	3,4	0,001232	3,9	0,000199
0,41	0,366782	0,91	0,263688	1,41	0,147638	1,91	0,064378	2,41	0,021862	2,91	0,005782	3,41	0,001191	3,91	0,000191
0,42	0,365263	0,92	0,261286	1,42	0,145564	1,92	0,063157	2,42	0,021341	2,92	0,005616	3,42	0,001151	3,92	0,000184
0,43	0,363714	0,93	0,258881	1,43	0,143505	1,93	0,061952	2,43	0,020829	2,93	0,005454	3,43	0,001112	3,93	0,000177
0,44	0,362135	0,94	0,256471	1,44	0,141460	1,94	0,060765	2,44	0,020328	2,94	0,005296	3,44	0,001075	3,94	0,000170
0,45	0,360527	0,95	0,254059	1,45	0,139431	1,95	0,059595	2,45	0,019837	2,95	0,005143	3,45	0,001038	3,95	0,000163
0,46	0,358890	0,96	0,251644	1,46	0,137417	1,96	0,058441	2,46	0,019356	2,96	0,004993	3,46	0,001003	3,96	0,000157
0,47	0,357225	0,97	0,249228	1,47	0,135418	1,97	0,057304	2,47	0,018885	2,97	0,004847	3,47	0,000969	3,97	0,000151
0,48	0,355533	0,98	0,246809	1,48	0,133435	1,98	0,056183	2,48	0,018423	2,98	0,004705	3,48	0,000936	3,98	0,000145
0,49	0,353812	0,99	0,244390	1,49	0,131468	1,99	0,055079	2,49	0,017971	2,99	0,004567	3,49	0,000904	3,99	0,000139

Рассмотрим еще один пример.

Пример. Монета подбрасывается 2020 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет 1000 раз?

По условию задачи $n = 2020$, $m = 1000$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$. Применим локальную теорему Муавра-Лапласа.

Найдем значение аргумента x:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1000 - 2020 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2020 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \frac{-10}{\sqrt{505}} = -0{,}445 .$$

Используя Таблицу 1, определим значение функции Гаусса $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(-0{,}445) = \varphi(0{,}445) = 0{,}3621 .$$

Найдем вероятность $P_{2020}(1000)$:

$$P_{2020}(1000) = \frac{1}{\sqrt{505}} \cdot 0{,}3621 = 0{,}0161 .$$

Таким образом, вероятность того, что герб выпадет 1000 раз рана 0,0161.

12.2.3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, т.е. $P_n(m_1 \le m \le m_2)$, используют интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Теорема 12.4. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ может быть вычислена по приближенной формуле:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) ,$$

где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ –

функция Лапласа, обладающая следующими свойствами:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
2) при $x \ge 5$ функция $\Phi(x) = 0{,}5$.

Для упрощения расчетов ниже представлена таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (Таблица 12.2).

Таблица 12.2.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА

0	0,000000	0,5	0,191500	1	0,341377	1,5	0,433219	2	0,477272	2,5	0,493809	3	0,498670	3,5	0,499787	4	0,499988
0,01	0,004029	0,51	0,195012	1,01	0,343784	1,51	0,434505	2,01	0,477807	2,51	0,493983	3,01	0,498713	3,51	0,499796	4,01	0,499990
0,02	0,008018	0,52	0,198506	1,02	0,346168	1,52	0,435771	2,02	0,478331	2,52	0,494151	3,02	0,498756	3,52	0,499804	4,02	0,499991
0,03	0,012006	0,53	0,201981	1,03	0,348527	1,53	0,437018	2,03	0,478844	2,53	0,494316	3,03	0,498797	3,53	0,499812	4,03	0,499992
0,04	0,015953	0,54	0,205439	1,04	0,350862	1,54	0,438246	2,04	0,479347	2,54	0,494477	3,04	0,498837	3,54	0,499820	4,04	0,499993
0,05	0,019939	0,55	0,208877	1,05	0,353172	1,55	0,439455	2,05	0,479840	2,55	0,494633	3,05	0,498876	3,55	0,499827	4,05	0,499994
0,06	0,023922	0,56	0,212297	1,06	0,355459	1,56	0,440646	2,06	0,480323	2,56	0,494786	3,06	0,498913	3,56	0,499834	4,06	0,499995
0,07	0,027903	0,57	0,215698	1,07	0,357722	1,57	0,441818	2,07	0,480796	2,57	0,494934	3,07	0,498949	3,57	0,499841	4,07	0,499996
0,08	0,031881	0,58	0,219079	1,08	0,359960	1,58	0,442972	2,08	0,481259	2,58	0,495079	3,08	0,498985	3,58	0,499848	4,08	0,499997
0,09	0,035856	0,59	0,222441	1,09	0,362174	1,59	0,444108	2,09	0,481713	2,59	0,495220	3,09	0,499019	3,59	0,499855	4,09	0,499998
0,1	0,039828	0,6	0,225783	1,1	0,364365	1,6	0,445226	2,1	0,482153	2,6	0,495358	3,1	0,499052	3,6	0,499861	4,1	0,499999
0,11	0,043795	0,61	0,229106	1,11	0,366531	1,61	0,446326	2,11	0,482589	2,61	0,495492	3,11	0,499084	3,61	0,499867	4,11	0,500000
0,12	0,047759	0,62	0,232407	1,12	0,368674	1,62	0,447409	2,12	0,483015	2,62	0,495623	3,12	0,499116	3,62	0,499873	4,12	0,500000
0,13	0,051717	0,63	0,235689	1,13	0,370792	1,63	0,448474	2,13	0,483432	2,63	0,495750	3,13	0,499146	3,63	0,499878	4,13	0,500000
0,14	0,055670	0,64	0,238950	1,14	0,372887	1,64	0,449523	2,14	0,483841	2,64	0,495874	3,14	0,499175	3,64	0,499884	4,14	0,500000
0,15	0,059657	0,65	0,242190	1,15	0,374958	1,65	0,450554	2,15	0,484240	2,65	0,495995	3,15	0,499203	3,65	0,499889	4,15	0,500000
0,16	0,063599	0,66	0,245409	1,16	0,377006	1,66	0,451568	2,16	0,484632	2,66	0,496112	3,16	0,499231	3,66	0,499894	4,16	0,500000
0,17	0,067535	0,67	0,248607	1,17	0,379030	1,67	0,452565	2,17	0,485015	2,67	0,496227	3,17	0,499258	3,67	0,499899	4,17	0,500000
0,18	0,071463	0,68	0,251784	1,18	0,381030	1,68	0,453546	2,18	0,485389	2,68	0,496338	3,18	0,499283	3,68	0,499903	4,18	0,500000
0,19	0,075385	0,69	0,254939	1,19	0,383007	1,69	0,454511	2,19	0,485756	2,69	0,496447	3,19	0,499308	3,69	0,499908	4,19	0,500000
0,2	0,079299	0,7	0,258072	1,2	0,384960	1,7	0,455459	2,2	0,486115	2,7	0,496552	3,2	0,499333	3,7	0,499912	4,2	0,500000
0,21	0,083206	0,71	0,261183	1,21	0,386890	1,71	0,456392	2,21	0,486466	2,71	0,496655	3,21	0,499356	3,71	0,499916	4,21	0,500000
0,22	0,087104	0,72	0,264273	1,22	0,388797	1,72	0,457308	2,22	0,486809	2,72	0,496755	3,22	0,499379	3,72	0,499920	4,22	0,500000
0,23	0,090993	0,73	0,267340	1,23	0,390681	1,73	0,458209	2,23	0,487145	2,73	0,496853	3,23	0,499401	3,73	0,499924	4,23	0,500000
0,24	0,094874	0,74	0,270385	1,24	0,392541	1,74	0,459095	2,24	0,487473	2,74	0,496947	3,24	0,499422	3,74	0,499928	4,24	0,500000
0,25	0,098746	0,75	0,273408	1,25	0,394379	1,75	0,459965	2,25	0,487794	2,75	0,497040	3,25	0,499443	3,75	0,499931	4,25	0,500000
0,26	0,102607	0,76	0,276408	1,26	0,396194	1,76	0,460820	2,26	0,488108	2,76	0,497129	3,26	0,499463	3,76	0,499935	4,26	0,500000
0,27	0,106459	0,77	0,279385	1,27	0,397987	1,77	0,461661	2,27	0,488415	2,77	0,497217	3,27	0,499482	3,77	0,499938	4,27	0,500000
0,28	0,110300	0,78	0,282339	1,28	0,399756	1,78	0,462486	2,28	0,488715	2,78	0,497302	3,28	0,499501	3,78	0,499941	4,28	0,500000
0,29	0,114131	0,79	0,285271	1,29	0,401503	1,79	0,463297	2,29	0,489008	2,79	0,497384	3,29	0,499519	3,79	0,499945	4,29	0,500000
0,3	0,117950	0,8	0,288179	1,3	0,403228	1,8	0,464094	2,3	0,489294	2,8	0,497464	3,3	0,499536	3,8	0,499948	4,3	0,500000
0,31	0,121758	0,81	0,291064	1,31	0,404930	1,81	0,464876	2,31	0,489574	2,81	0,497542	3,31	0,499553	3,81	0,499950	4,31	0,500000
0,32	0,125555	0,82	0,293926	1,32	0,406611	1,82	0,465644	2,32	0,489848	2,82	0,497618	3,32	0,499570	3,82	0,499953	4,32	0,500000
0,33	0,129339	0,83	0,296765	1,33	0,408269	1,83	0,466399	2,33	0,490116	2,83	0,497692	3,33	0,499586	3,83	0,499956	4,33	0,500000
0,34	0,133111	0,84	0,299580	1,34	0,409905	1,84	0,467139	2,34	0,490377	2,84	0,497764	3,34	0,499601	3,84	0,499958	4,34	0,500000
0,35	0,136869	0,85	0,302371	1,35	0,411520	1,85	0,467867	2,35	0,490632	2,85	0,497834	3,35	0,499616	3,85	0,499961	4,35	0,500000
0,36	0,140615	0,86	0,305139	1,36	0,413113	1,86	0,468581	2,36	0,490881	2,86	0,497901	3,36	0,499630	3,86	0,499963	4,36	0,500000
0,37	0,144347	0,87	0,307883	1,37	0,414684	1,87	0,469281	2,37	0,491125	2,87	0,497967	3,37	0,499644	3,87	0,499965	4,37	0,500000
0,38	0,148066	0,88	0,310604	1,38	0,416234	1,88	0,469969	2,38	0,491362	2,88	0,498031	3,38	0,499657	3,88	0,499968	4,38	0,500000
0,39	0,151770	0,89	0,313300	1,39	0,417763	1,89	0,470644	2,39	0,491595	2,89	0,498093	3,39	0,499670	3,89	0,499970	4,39	0,500000
0,4	0,155460	0,9	0,315973	1,4	0,419271	1,9	0,471307	2,4	0,491821	2,9	0,498154	3,4	0,499683	3,9	0,499972	4,4	0,500000
0,41	0,159135	0,91	0,318622	1,41	0,420757	1,91	0,471957	2,41	0,492043	2,91	0,498212	3,41	0,499695	3,91	0,499974	4,41	0,500000
0,42	0,162795	0,92	0,321247	1,42	0,422223	1,92	0,472594	2,42	0,492259	2,92	0,498269	3,42	0,499707	3,92	0,499976	4,42	0,500000
0,43	0,166440	0,93	0,323847	1,43	0,423669	1,93	0,473220	2,43	0,492469	2,93	0,498325	3,43	0,499718	3,93	0,499977	4,43	0,500000
0,44	0,170069	0,94	0,326424	1,44	0,425093	1,94	0,473833	2,44	0,492675	2,94	0,498379	3,44	0,499729	3,94	0,499979	4,44	0,500000
0,45	0,173683	0,95	0,328977	1,45	0,426498	1,95	0,474435	2,45	0,492876	2,95	0,498431	3,45	0,499740	3,95	0,499981	4,5	0,500000
0,46	0,177280	0,96	0,331505	1,46	0,427882	1,96	0,475025	2,46	0,493072	2,96	0,498481	3,46	0,499750	3,96	0,499982	4,7	0,500000
0,47	0,180860	0,97	0,334009	1,47	0,429246	1,97	0,475604	2,47	0,493263	2,97	0,498531	3,47	0,499760	3,97	0,499984	4,8	0,500000
0,48	0,184424	0,98	0,336489	1,48	0,430590	1,98	0,476171	2,48	0,493450	2,98	0,498578	3,48	0,499769	3,98	0,499985	4,9	0,500000
0,49	0,187971	0,99	0,338945	1,49	0,431914	1,99	0,476727	2,49	0,493632	2,99	0,498625	3,49	0,499778	3,99	0,499987	5	0,500000

Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа применяются, когда $npq \geq 20$, причем чем больше n, тем точнее формулы.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

По условию задачи $n = 400$, $m_1 = 70$, $m_2 = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 0{,}8$.

Решим задачу с использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Найдем значение аргументов x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-10}{\sqrt{64}} = -1{,}25 ;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{20}{\sqrt{64}} = 2{,}5 .$$

Используя Таблицу 2, определим значения функции Лапласа $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(-1{,}25) = -0{,}3944 ;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}5) = 0{,}4938 .$$

Определим вероятность $P_{400}(70 \le m \le 100)$:

$$P_{400}(70 \le m \le 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}8882 .$$

Таким образом, вероятность того, что что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей, равна 0,8882.

Пример. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятности того, что событие появится не менее 75 раз.

По условию задачи $n = 100$, $m_1 = 75$, $m_2 = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$.

Снова применим интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-5}{\sqrt{16}} = -1{,}25 ;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{20}{\sqrt{16}} = 5 .$$

Используя Таблицу 2, определим значения функции Лапласа $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(-1{,}25) = -0{,}3944;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(5) = 0{,}5.$$

Рассчитаем вероятность $P_{100}(75 \le m \le 100)$:

$$P_{100}(75 \le m \le 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}5 - (-0{,}3944) = 0{,}8944.$$

Таким образом, вероятности того, что событие появится не менее 75 раз равна 0,8944.

12.2.4. Следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа

Вероятность отклонения относительной частоты n_A от вероятности p в n независимых испытаниях вычисляется по формуле:

$$P_n\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое число.

Пример. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 1200 независимых испытаниях отклонение частоты от вероятности по модулю не превышает 0,05.

В нашей задаче $n = 1200$; $p = 0{,}6$; $q = 1 - p = 0{,}4$; $\varepsilon = 0{,}05$. Тогда используя следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа получим:

$$P_{1200}\left(\left|\frac{n_A}{n} - 0{,}6\right| \le 0{,}05\right) = 2\Phi\left(0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{1200}{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = 2\Phi(3{,}54) = 0{,}9996.$$

Таким образом, вероятность того, что при 1200 независимых испытаниях отклонение частоты от вероятности по модулю не превышает 0,05, равна 0,9996.

12.3. Наивероятнейшее число

Наивероятнейшее число появлений k события A в n испытаниях можно определить из двойного неравенства:

$$np - q \le k \le np + p,$$

где p – вероятность появления в одном испытании, $q = 1 - p$.

Следует знать, что:

1) если значение $np - q$ является дробным, то двойное неравенство имеет единственное целое решение;

2) если значение $np - q$ – целое, то двойное неравенство имеет два целых решения.

Пример. Игральный кубик подбросили 120 раз. Найти наиболее вероятное число выпавшей грани с числом «6».

Введем обозначения:

A – выпадение грани с числом «6» при одном бросании кубика.

Тогда по условию:

$$p = P(A) = \frac{1}{6}, \qquad q = 1 - p = \frac{5}{6}, \qquad n = 120.$$

Подставим эти значения в неравенство и получим:

$$120 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le k \le 120 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{120 - 5}{6} \le k \le \frac{120 + 1}{6}$$

$$19\frac{1}{6} \le k \le 20\frac{1}{6}.$$

Из полученного неравенства можно сделать вывод, что k однозначно определяется числом 20.

Таким образом, наиболее вероятное число выпавшей грани с числом «6» равно 20.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие повторных независимых испытаний.
2. Определите понятие схемы Бернулли. Перечислите случаи применения теоремы Бернулли.
3. Каким образом используется формула Бернулли для определения вероятностей появления события A менее m раз, более m раз, не менее m раз, не

более *m* раз?

4. Почему нельзя использовать теорему Бернулли для нахождения вероятностей для большого количества повторных независимых испытаний?

5. Какое выражение называется асимптотической формулой Пуассона?

6. Определите условия использования предельной формулы Пуассона для нахождения вероятности при повторных испытаниях.

7. Какие ограничения должны выполняться для параметров *n* и *np* при использовании предельной формулы Пуассона?

8. Какие типы задач решаются с помощью схемы Бернулли? Какое значение в схеме повторных испытаний имеют предельные теоремы?

9. По какой формуле вычисляется вероятность события, если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико?

10. В каких случаях можно использовать локальную теорему Муавра-Лапласа?

11. Приведите пример применения локальной теоремы Муавра-Лапласа в определениях вероятностей при повторных испытаниях.

12. Объясните принципы использования интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

13. Каким образом определяется вероятность отклонения относительной частоты n_A от вероятности p в n независимых испытаниях?

14. Каким образом можно найти наивероятнейшее число появления события при повторных испытаниях?

Глава 13. Случайные величины

Случайная величина – это величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определёнными вероятностями. Примером случайной величины может служить число, выпавшее на игральной кости или расстояние от точки падения снаряда до цели. Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей.

Роль случайной величины, как одного из основных понятий теории вероятностей, впервые была чётко осознана Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821 – 1894), который в 1867 году обосновал общепринятую на сегодня точку зрения на это понятие. Понимание случайной величины как частного случая общего понятия функции, пришло значительно позднее, в первой трети 20 века. Впервые полное формализованное представление основ теории вероятностей на базе теории меры было ы 1933 году разработано Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903 – 1987), после которого стало ясным, что случайная величина представляет собой измеримую функцию, определённую на вероятностном пространстве.

13.1. Понятия и определения случайных величин

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Рассмотрим основные законы распределения дискретных случайных величин, используемые для построения теоретико-вероятностных моделей реальных социально-экономических явлений. Нами будут рассматриваться распределения случайных величин, используемые в качестве вспомогательного технического средства при решении различных задач статистического анализа.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от различных случайных причин.

Введем более точное определение случайной величины.

Случайной величиной X называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий), т.е. , где *w* – элементарный исход (или элементарное событие).

Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами *X, Y, Z, …*, а их значения – соответственными строчными буквами $x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots, z_1, z_2, z_2, \ldots$.

Случайные величины делятся на *дискретные* и *непрерывные*.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Число значений дискретной случайной величины может быть конечным или счетным.

13.1.1 Законы распределения дискретной случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретных случайных величин закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде формулы) или графически.

При табличном законе распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины, а вторая – соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно значение, то события $X=x_1$, $X=x_2$, …, $X=x_n$ образуют полную группу, следовательно, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Если множество значений *X* бесконечно, то ряд: $p_1 + p_2 + \ldots$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения случайной величины, заданной в виде таблицы, где каждому возможному значению сопоставлена его вероятность, называется *рядом распределения*.

Пример. Вероятности того, что курсант сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам *А* и *Б*, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить ряд распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст курсант.

Пусть случайная величина X – число сданных экзаменов. В сессию курсант может не сдать ни одного экзамена, может сдать толь один экзамен, а может сдать и все два. Тогда возможные значения случайной величины X равны $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$. Введем обозначения:

A_1 – курсант сдает первый экзамен;

A_2 – курсант сдает второй экзамен.

Вероятности того, что наступят события A_1 и A_2 соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}9,$$

а, значит, вероятности не наступления событий A_1 и A_2 равны:

$$q_1 = 0{,}3; \quad q_2 = 0{,}1.$$

Учитывая это, найдем вероятности появления значений $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$:

$$P(X=0) = P\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03.$$

$$P(X=1) = P\left(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2\right) = P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2) = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}34.$$

$$P(X=2) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$$

Составим ряд распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст курсант:

x_i	*0*	*1*	*2*
p_i	*0,03*	*0,34*	*0,63*

Осуществим контроль значений нижней строки таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}03 + 0{,}34 + 0{,}63 = 1.$$

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно значение, то события $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$ образуют полную группу, следовательно, сумма их вероятностей будет равна единице.

Пример. Испытуемый прибор состоит из трёх малонадёжных элементов. Отказы элементов независимы, а их вероятности соответственно равны 0,1; 0,2; 0,25. Составить закон распределения числа отказавших элементов.

Пусть дискретная случайная величина X – число отказавших элементов. Она может принимать следующие возможные значения:

X = 0 – ни один из элементов не отказал;

$X = 1$ – отказал только один элемент;

$X = 2$ – отказали только два элемента;

$X = 3$ – отказали все три элемента.

По условию задачи вероятности отказа элементов:

$$p_1 = 0{,}1; \quad p_2 = 0{,}2; \quad p_3 = 0{,}25 .$$

Тогда вероятности работы этих же элементов будут равны:

$$q_1 = 0{,}9; \quad q_2 = 0{,}8; \quad q_3 = 0{,}75 .$$

Поскольку отказы элементов независимы один от другого, то, используя теоремы сложения и умножения, получим:

$$P(X = 0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}54 .$$

$$P(X = 1) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}375 .$$

$$P(X = 2) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0.08 .$$

$$P(X = 3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}005 .$$

Составим ряд распределения числа отказавших элементов:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	0,54	0,375	0,08	0,005

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}54 + 0{,}375 + 0{,}08 + 0{,}005 = 1.$$

Пример. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Составить закон распределения числа попаданий мяча в корзину.

Пусть случайная величина X – число попаданий мяча в корзину.

Эта величина может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3. Поскольку броски независимы один от другого и вероятности попадания равны между собой, применима формула Бернулли.

По условию задачи

$$n = 3; \quad p = 0{,}7; \quad q = 0{,}3 .$$

Используя этот факт, рассчитаем вероятности значений случайной величины *X*:

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{0!\cdot 3!} \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}027 ;$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}189 ;$$

$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1 = 0{,}441 ;$$

$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{3!\cdot 0!} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^0 = 0{,}343 .$$

Составим ряд распределения числа отказавших элементов:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	0,027	0,189	0,441	0,343

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1.$$

13.1.2. Математические операции над случайными величинами

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Пусть даны две случайные величины X и Y:

x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

y_1	y_2	…	y_i	…	y_m
p_1	p_2	…	p_i	…	p_m

Введем операции над случайными величинами.

Произведением случайной величины X на постоянную k называется случайная величина kX, которая принимает значения $kx_1, kx_2, ..., kx_n$ с теми же вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$.

m-той *степенью* случайной величины X, называется случайная величина X^m, принимающая значения $x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m$ с теми же вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$.

Пример. Случайная величина X задана с помощью ряда распределения:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: $Y = 3X$ и $Z = X^2$.

Случайную величину $Y = 3X$ получим, умножая все значения случайной величины на число 3:

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(-6) + P(3) + P(6) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1.$$

Случайную величину $Z = X^2$ получим, возведя все значения случайной величины во вторую степень:

z_i	4	1	4
p_i	0,5	0,3	0,2

Однако, мы видим, что в таблице оказалось два одинаковых значения $z_1 = z_3 = 4$ случайной величины Z. Объединив столбы, окончательно получим:

z_i	*1*	*4*
p_i	0,3	0,7

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(1)+P(4)=0{,}3+0{,}7=1.$$

Суммой (*разностью* или *произведением*) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида x_i+y_j (x_i-y_j или $x_i\cdot y_j$), где $i=1,2,...,n, i=1,2,...,m,$ с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y – значение y_j:

$$p_{ij}=P\left[(X=x_i)(Y=y_j)\right].$$

Если случайные величины X и Y независимы, то есть независимы любые события $X=x_i$ и $Y=y_i$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий:

$$p_{ij}=P\left[(X=x_i)P(Y=y_j)\right]=p_ip_j.$$

Пример. Независимые случайные величины X и Y заданы таблично:

x_i	*0*	*2*
p_i	0,4	0,6

y_i	*1*	*3*	*4*
p_i	0,2	0,3	0,5

Найдем закон распределения случайной величины $Z=X+Y$.

Используя определение суммы случайных величин X и Y найдем всевозможные значения случайной величины $Z=X+Y$ и соответствующие этим значения вероятности. Для этого в верхней строке таблицы запишем всевозможные суммы значений случайных величин X и Y: x_1+y_1, x_1+y_2, …, x_2+y_3, а в нижней – произведения соответствующих им вероятностей $p_1\cdot p_1$, $p_1\cdot p_2$, …, $p_2\cdot p_3$:

x_i+y_j	*0+1*	*0+3*	*0+4*	*2+1*	*2+3*	*2+4*
p_i	0,4·0,2	0,4·0,3	0,4·0,5	0,6·0,2	0,6·0,3	0,6·0,5

Рассчитаем значения выражений в таблице:

z_i	1	3	4	3	5	6
p_i	0,08	0,12	0,2	0,12	0,18	0,3

Заметим, что значение 3 повторяется. Объединим столбцы, содержащие значение 3, сложив вероятности появления трех:

z_i	1	3	4	5	6
p_i	0,08	0,24	0,2	0,18	0,3

Осуществим контроль значений таблицы:

$$P(1)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=0{,}08+0{,}24+0{,}2+0{,}18+0{,}3=1.$$

13.2. Функция распределения дискретных случайных величин

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, численно равная вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее наперед заданного произвольного действительного числа x:

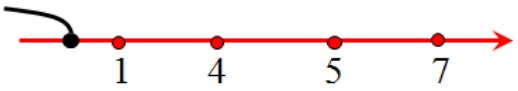
$$F(x)=P(X<x)$$

Пример. Дан ряд распределения случайной величины. Найти и изобразить графически ее функцию распределения.

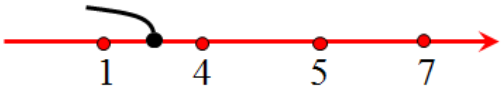
x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найдем значения функции распределения.

1. Если $x\le 1$, то $F(x)=P(X<1)=0$.



2. Если $1<x\le 4$, то $F(x)=P(X<4)==0{,}4$.

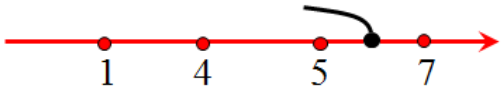


3. Если $4<x\le 5$, то $F(x)=P(X<5)==P(X=1)+P(X=4)=0{,}4+0{,}1=0{,}5$.



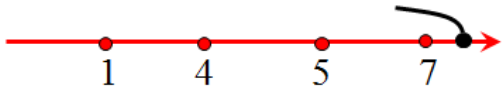
4. Если $5<x\le 7$, то $F(x)=P(X<7)==P(X=1)+P(X=4)+P(X=5)=$

$$= 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}8 .$$



5. Если $7 < x$, то $F(x) = P(X > 7) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7) =$

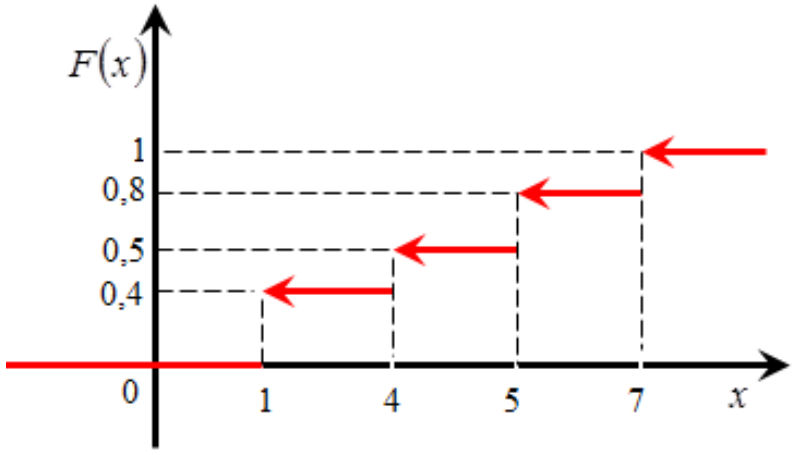
$$0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1 .$$



Таким образом, функцию распределения можно выразить аналитически:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 0{,}4 & 1 < x \le 4 \\ 0{,}5 & 4 < x \le 5 \\ 0{,}8 & 5 < x \le 7 \\ 1 & x > 7 \end{cases}$$

Построим график функции распределения случайной величины:



Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

Сумма всех скачков функции распределения равна 1.

Рассмотрим основные свойства функции распределения дискретной случайной величины:

Свойства функции распределения

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, значения которой заключены между нулем и единицей.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.

$$F(x_2) \ge F(x_1).$$

3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности – единице.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению ее функции распределения на этом интервале.

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

13.3. Числовые характеристики случайных величин

13.3.1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием (или средним значением) $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

В том случае, когда дискретная случайная величина X принимает бесконечное, но счетное множество значений, математическим ожиданием, или средним значением, такой случайной величины называется сумма ряда (если он сходится абсолютно).

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Если ряд расходится, то дискретная случайная величина X не будет иметь математического ожидания.

Пример. Вычислить математическое ожидание дискретной случайной величины *X*, заданной таблично:

x_i	*1*	*4*	*5*	*7*
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Используя определение математического ожидания найдем значение математического ожидания дискретной случайной величины *X*:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 =$$

$$= 1\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}3 + 7\cdot 0{,}2 = 3{,}7\,.$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины Z равно 3,7.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Пример. Известны законы распределений случайных величин числа очков, выбиваемых первым и вторым стрелками.

Для первого стрелка:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,1	0,1	0,04	0,05	0,12	0,2

Для второго стрелка:

y_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,1	0,1	0,04	0,02

Какой из двух стрелков стреляет лучше?

Очевидно, что из двух стрелков стреляет тот лучше, кто в среднем выбивает большее количество очков.

$$M(X) = 0\cdot 0{,}15 + 1\cdot 0{,}11 + 2\cdot 0{,}04 + 3\cdot 0{,}05 + 4\cdot 0{,}04 + 5\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}1 +$$
$$+ 7\cdot 0{,}04 + 8\cdot 0{,}05 + 9\cdot 0{,}12 + 10\cdot 0{,}2 = 5.36$$
$$M(Y) = 0\cdot 0{,}01 + 1\cdot 0{,}03 + 2\cdot 0{,}05 + 3\cdot 0{,}09 + 4\cdot 0{,}11 + 5\cdot 0{,}24 + 6\cdot 0{,}21 +$$
$$+ 7\cdot 0{,}1 + 8\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}04 + 10\cdot 0{,}02 = 5.36\,.$$

Таким образом, среднее число выбиваемых очков у двоих стрелков одинаковое.

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C$, где C – произвольная постоянная величина.
2. $M(CX) = CM(X)$, где C – произвольная постоянная величина.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. $M(XY) = M(X)M(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.
5. $M(X \pm C) = M(X) \pm C$, где C – произвольная постоянная величина.
6. $M[X - M(X)] = 0$

Пример. Пусть $M(X) = 3,\ M(Y) = 2,\ Z = 8X - 5Y + 7$. Найти: $M(Z)$.

Используя свойства математического ожидания для дискретных случайных величин получим:

$$M(Z) = M(8X - 5Y + 7) = M(8X) - M(5Y) + M(7) = 8M(X) - 5M(Y) + 7 =$$

$$= 8 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 7 = 21.$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины Z равно 21.

13.3.2. Дисперсия

Рассеяние случайной величины около среднего значения характеризует дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Для дискретной случайной величины с конечным числом принимаемых значений дисперсию можно рассчитать сумму квадратов разности между значениями случайной величины и математическим ожиданием случайной величины, умноженных на вероятности появления соответствующих значений:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Пример. Вычислить дисперсию дискретной случайной величины *X*, заданной таблично:

x_i	*1*	*4*	*5*	*7*
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

В одном из предыдущих примеров мы уже рассчитали математическое ожидание случайной величины *X*. По расчетам оно было равно 3,5.

Используя формулу для дискретной случайной величины с конечным числом принимаемых значений, получим дисперсию:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i=(1-3{,}7)^2\cdot 0{,}4+(4-3{,}7)^2\cdot 0{,}1+(5-3{,}7)^2\cdot 0{,}3+$$
$$+(7-3{,}7)^2\cdot 0{,}2=7{,}29\cdot 0{,}4+0{,}09\cdot 0{,}1+1{,}69\cdot 0{,}3+10{,}89\cdot 0{,}2=5{,}61.$$

Таким образом, дисперсия случайной величины равно 5,61.

Рассмотрим основные свойства дисперсии.

Свойства дисперсии

1. $D(C)=0$, где C – произвольная постоянная величина.
2. $D(CX)=C^2D(X)$, где C – произвольная постоянная величина.
3. $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$.
4. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.

13.3.3. Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением, стандартом) случайной величины *X* называется арифметическое значение корня квадратного из дисперсии:

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. Используя свойства дисперсии, вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины *X*.

x_i	*1*	*4*	*5*	*7*
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Математическое ожидание случайной величины X ранее мы уже нашли. . По расчетам оно было равно 3,5.

Для расчета дисперсии будем использовать свойство дисперсии 3:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Найдем математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}3 + 7^2 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 0{,}4 + 1{,}6 + 7{,}5 + 9{,}8 = 19{,}3 .$$

Тогда значение дисперсии будет равно:

$$D(X) = 19{,}3 - (3{,}7)^2 = 19{,}3 - 13{,}69 = 5{,}61 .$$

А среднее квадратическое отклонение найдем, как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}61} \approx 2{,}368544 .$$

13.4. Законы распределения дискретных случайных величин

13.4.1. Биномиальный закон распределения

Дискретная случайная величина X имеет *биномиальный закон распределения*, если она принимает значения *0, 1, 2, ..., m, ..., n* с вероятностями

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} ,$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m=0,1,..., n$.

Биномиальный закон распределения представляет собой закон распределения числа $X=m$ наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	*1*	*2*	...	*m*	...	*n*
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\cdots$	p^n

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + .. + C_n^m p^m q^{n-m} + .. + p^n = (q+p)^n = 1 .$$

Теорема 13.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X*, определенной по биномиальному закону вычисляются по формулам:

$$M(X) = np\,; \quad D(X) = npq\,.$$

Пример. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого заемщика. Составить таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Итак, случайная величина X – это количество заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования.

По условию задачи $n = 5;\quad p = 0{,}2;\quad q = 0{,}8.$ Найдем вероятности всех значений, принимаемых случайной величиной:

$$P(X=0) = C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{5-0} = 0{,}32768\,;$$

$$P(X=1) = C_5^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{5-1} = 0{,}4096\,;$$

$$P(X=2) = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{5-2} = 0{,}2048\,;$$

$$P(X=3) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{5-3} = 0{,}0512\,;$$

$$P(X=4) = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{5-4} = 0{,}0064\,;$$

$$P(X=5) = C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^{5-5} = 0{,}00032\,.$$

Составим таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании кредитования.

x_i	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
p_i	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8\,; \quad D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}64\,.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины равно 0,8, а дисперсия 0,64.

13.4.2. Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет *закон распределения Пуассона*, если она принимает значения (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями:

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$, $m=0, 1, 2, \ldots$.

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	*1*	*2*	...	*m*	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1 .$$

Теорема 13.2. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ:

$$M(X) = \lambda ; \quad D(X) = \lambda .$$

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Необходимо составить закон распределения отказавших за время t элементов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

По условию задачи случайная величина X – это число отказавших за время t элементов. Здесь $n = 1000;\ p = 0{,}002;\ \ q = 0{,}998;\ \ \lambda = \ \ 2.$ Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$$P(X=0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0{,}13534 ; \qquad P(X=1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0{,}27067 ;$$

$$P(X=2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0{,}27067 ; \qquad P(X=3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0{,}18045 .$$

Составим таблицу закона распределения.

x_i	0	*1*	*2*	*3*	…
p_i	0,13534	0,27067	0,27067	0,18045	…

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = 2; \quad D(X) = 2.$$

13.4.3 Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина *X* имеет *геометрическое распределение*, если она принимает значения *1,2,3, ...* (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = pq^{m-1},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m=0,1, 2, 3, \ldots$.

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид:

x_i	*1*	*2*	*3*	…	*m*	…
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{m-1}	…

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_i = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Теорема 13.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X*, имеющей геометрическое распределение с параметром *p,* вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Пример. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Необходимо составить закон распределения числа сделанных выстрелов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

По условию задачи случайная величина *X* – количество сделанных выстрелов. Параметры закона распределения $p = 0,05$; $q = 0,95$. Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$P(X = 1) = p = 0,05;$

$P(X=2)=qp=0{,}95\cdot 0{,}05=0{,}0475$;

$P(X=3)=qqp=0{,}95\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05=0{,}04513$;

$P(X=4)=qqqp=0{,}95\cdot 0{,}95\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05=0{,}04287$;

…

Составим таблицу закона распределения.

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	…
p_i	0,05	0,075	0,04513	0,04287	…

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X)=\frac{1}{0{,}05}=20;\quad D(X)=\frac{0{,}95}{(0{,}05)^2}=380.$$

Пример. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Случайная величина X - число проверенных деталей до обнаружения бракованной - имеет геометрическое распределение с параметром $p=0{,}1$.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	…
p_i	*0,1*	*0,09*	*0,081*	*0,0729*	…

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}1}=10;\quad D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{0{,}9}{0{,}1^2}=90.$$

13.4.4. Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет *гипергеометрическое распределение*, если она принимает значения *1, 2, 3, ..., min (n, M)* с вероятностями

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $M \le N$, $n \le N$, n, M, N – натуральные числа.

Теорема 13.4. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами n, M, N, вычисляется по формуле:

$$M(X)=n\frac{M}{N};\quad D(X)=n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

Пример. В лотерее денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 чисел из отобранных случайно 6 из 45 вариантов. Найти закон распределения случайной величины X — числа угаданных чисел среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

По условию задачи случайная величина X – количество угаданных чисел. Параметры закона распределения $n = 6$, $M = 6$, $N = 45$. Рассчитаем вероятности появления значений случайной величины:

$$P(X=0)=\frac{C_6^0 C_{39}^6}{C_{45}^6}=0{,}40056;\qquad P(X=1)=\frac{C_6^1 C_{39}^5}{C_{45}^6}=0{,}42413;$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^2 C_{39}^4}{C_{45}^6}=0{,}15147;\qquad P(X=3)=\frac{C_6^3 C_{39}^3}{C_{45}^6}=0{,}02244;$$

$$P(X=4)=\frac{C_6^4 C_{39}^2}{C_{45}^6}=0{,}00137;\qquad P(X=5)=\frac{C_6^5 C_{39}^1}{C_{45}^6}=0{,}00003;$$

$$P(X=6)=\frac{C_6^6 C_{39}^0}{C_{45}^6}=0{,}0000001.$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,40056	0,42413	0,15147	0,02244	0,00137	0,00003	0,0000001

Тогда вероятность получения денежного приза будет равна:

$$P(3 \le X \le 6) = \sum_{i=3}^{6} P(X = i) = 0{,}02244 + 0{,}00137 + 0{,}00003 + 0{,}0000001 \approx 0{,}02384 .$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = 6 \cdot \frac{6}{45} = 0{,}8 ; \quad D(X) = 6 \cdot \frac{39}{44}\left(1 - \frac{39}{45}\right)\left(1 - \frac{6}{45}\right) = 0{,}6145 .$$

Таким образом, а вероятность выигрыша равна 0,02384, математическое ожидание 0,8, а дисперсия равна 0,6145.

13.5. Непрерывные случайные величины

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

13.5.1. Функция распределения непрерывной случайной величины

Функцией распределения случайной величины X называется функция *F(x)*, выражающая для каждого *x* вероятность того, что случайной величины *X* примет значение, меньшее чем *x*.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию *F(x)* иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения. На рисунке 18.1 представлен график функции распределения непрерывной случайной величины *X*.

Случайная величина *X* называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

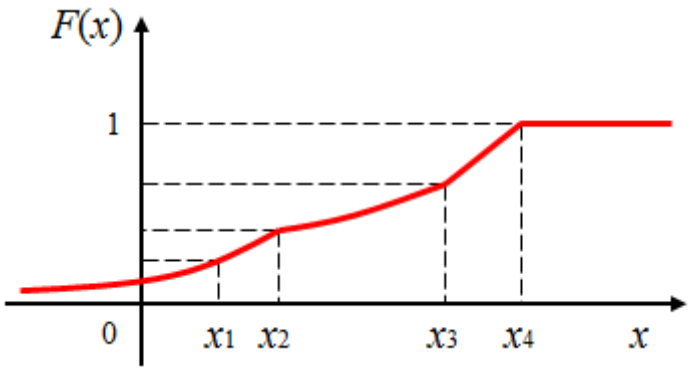


Рис.13.1. График функции распределения непрерывной случайной величины.

Свойства функции распределения непрерывной случайной величины

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функции распределения *F(x)* – неубывающая функция:

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

3. Вероятность того, случайная величина примет значение, заключенное в интервале (*a, b*), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение конкретное значение равна нулю.

5. Если *X* – непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (*a, b*) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым.

6. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Пример. Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/2, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение в интервале [1;3).

Решение найдем, используя третье свойство функции распределения непрерывной случайной величины:

$$P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

13.5.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины $f(x)$ называется первая производная от функции распределения непрерывной случайной величины *X*:

$$f(x) = F'(X).$$

График плотности распределения называют *кривой распределения*.

Пример. Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Найти плотность распределения непрерывной случайной величины.

Дифференцируя функцию распределения непрерывной случайной величины, найдем ее плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 2x-4, & 2 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}.$$

Свойства плотности распределения

1. Плотность вероятности – неотрицательная функция:

$$f(x) \ge 0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал (*a*, *b*) равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от *a* до *b*:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность распределения по формуле:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

4. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения непрерывной случайной величины равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1\,.$$

Замечание. Геометрически 4-е свойство означает, что площадь фигуры, ограниченной осью *Ox,* кривой распределения *f*(*x*) равна единице (рис. 18.2):

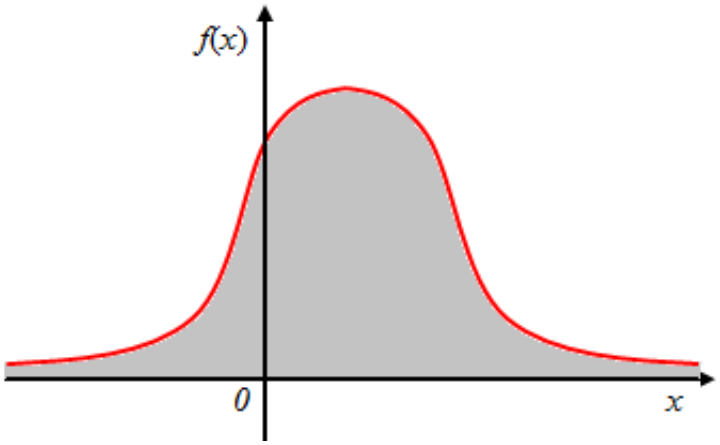


Рис. 13.2. Площадь фигуры, ограниченной осью *Ox,* кривой распределения *f*(*x*)

Пример. Плотность распределения случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ a(x+1)^2, & -1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}.$$

Требуется найти параметр *a* и функцию распределения *F(x)*.

Найдем несобственный интеграл от плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{2} a(x+1)^2dx=a\int_{-1}^{2}(x+1)^2dx=a\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=a\frac{(2+1)^3}{3}-a\frac{(-1+1)^3}{3}=a\left(\frac{3^3}{3}-0\right)=9a\,.$$

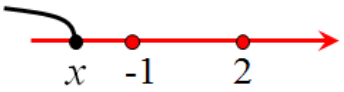
Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения непрерывной случайной величины равен 1, следовательно, $9a=1$, а значит $a=\frac{1}{9}$.

Таким образом, плотность распределения непрерывной случайной величины будет имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & -1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}.$$

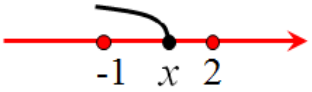
Найдем функцию распределения.

1. Если $x\le -1$, то



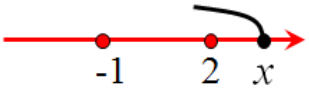
$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0.$$

2. Если $-1\le x\le -1$, то



$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt+\int_{-1}^{x}\frac{1}{9}(t+1)^2\,dt==0+\frac{1}{9}\frac{(t+1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{x}=\frac{(t+1)^3}{27}.$$

3. Если $x\ge 2$, то



$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt+\int_{-1}^{2}\frac{1}{9}(t+1)^2\,dt+\int_{2}^{x} 0\,dt=0+\frac{1}{9}\frac{(t+1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}+0=0+1+0=1.$$

Таким образом, образом функция распределения непрерывной случайной величины будет иметь вид:

$$F(X)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \frac{(x+1)^3}{27}, & -1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}.$$

13.5.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx .$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx .$$

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C,\ C - const$.
2. $M(CX) = CM(X),\ C - const$.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. $M(XY) = M(X)M(Y)$, X и Y независимы.
5. $M(X \pm C) = M(X) \pm C,\ C - const$.
6. $M[X - M(X)] = 0$.

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx .$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx .$$

Замечание. Для вычисления дисперсии удобно использовать формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 ,\ \text{где}$$

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx .$$

Свойства дисперсии

1. $D(C)=0$;
2. $D(CX)=C^2D(X)$;
3. $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$;
4. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

Среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$\sigma=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1.\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Найдем сначала математическое ожидание:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=2\int_0^1 x^2dx=2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=2\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{2}{3}.$$

Рассчитаем значение дисперсии. Найдем ее по формуле:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Определим математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M(X)=\int_a^b x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=2\int_0^1 x^3dx=2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=2\left(\frac{1}{4}-0\right)=\frac{1}{2}.$$

Подставим полученное выражение в формулу дисперсии:

$$D(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

Вычислим среднеквадратическое отклонение случайной величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}.$$

13.6. Законы распределения непрерывных случайных величин

В данной главе мы изучим основные законы распределения непрерывной случайной величины: равномерный, показательный и нормальный.

13.6.1. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный закон распределения* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его.

Плотность распределения случайной величины в этом случае определяется следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a,\quad x>b\end{cases}.$$

Построим график плотности распределения случайной величины.

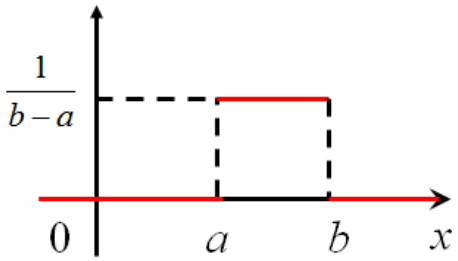


Рис. 13.3. График плотности распределения случайной величины, имеющей равномерный закон распределения.

Вычислим функцию распределения случайной величины в случае распределения по равномерному закону:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

1. Если $x \le a$, то

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0\,.$$

2. Если a $\le x \le b$, то

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} 0\,dt+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=0+\frac{t}{b-a}\Bigg|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}\,.$$

3. Если $x \ge b$, то

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} 0\,dt+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int_{b}^{x} 0\,dt=\frac{t}{b-a}\Bigg|_{a}^{b}=\frac{b-a}{b-a}=1\,.$$

Выпишем функцию распределения случайной величины, соответствующей равномерному закону распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \\ 1, & x>b \end{cases}.$$

Построим график функции распределения случайной величины (рис. 18.4).

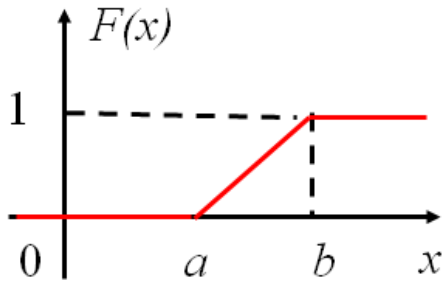


Рис. 13.4. График функции распределения случайной величины, имеющей равномерный закон распределения.

Вычислим математическое ожидание случайной величины:

$$M(x)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{2(b-a)}\left(b^2-a^2\right)=\frac{a+b}{2}.$$

Для нахождения дисперсии рассчитаем математическое ожидание квадрата случайной величины:

$$M\left(x^2\right)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{1}{3(b-a)}\left(b^3-a^3\right)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Теперь можно рассчитать выражение для дисперсии:

$$D(X)=M\left(x^2\right)-\left(M(x)\right)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Теорема 13.5. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по равномерному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по равномерному закону, примет значение из интервала (α, β), вычисляется по формуле:

$$P\left(X \in (\alpha, \beta)\right) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Пример. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты. Найти математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Случайная величина X распределена равномерно, следовательно, плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2},\ x \in (0;2);\quad f(x) = 0,\ x \notin (0;2).$$

Вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты:

$$P\left(a \le X \le b\right) = \int_a^b f(x)dx = P(X \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{0{,}5} = \frac{1}{4}.$$

Согласно теореме, математическое ожидание равно:

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1,$$

Рассчитаем дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины:

$$D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3};\quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0{,}58.$$

13.6.2. Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *показательный* (экспоненциальный) закон распределения с параметром λ, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Число $\lambda>0$ – называют параметром распределения.

Функция распределения случайной величины, распределенной по показательному закону имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Построим графики плотности распределения и функции распределения для случайной величины, распределенной по показательному закону (рис. 18.5).

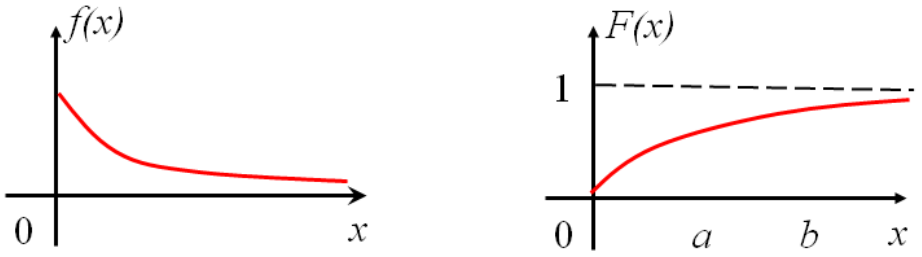


Рис. 13.5. Графики плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей показательный закон распределения.

Теорема 18.6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по показательному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по показательному закону, примет значение из интервала $(\alpha;\ \beta)$, вычисляется по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Пример. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизора 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение.

Из условия задачи следует, что $M(X)=15,$ тогда $\frac{1}{\lambda}=15,$ и $\lambda=\frac{1}{15}$. Тогда $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}225$, а $\sigma_x=\sqrt{D(X)}=15$.

Найдем плотность распределения случайной величины. В виду того, что случайная величина распределена по показательному закону:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}, \text{ следовательно, } f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Определим функцию распределения.

Так как $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, то $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{15}x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$.

Определим вероятность того, что на ремонт потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизора 15 дней:

$$P(X\geq 20)=1-P(X<20)=1-F(20)=1-(1-e^{-\frac{20}{15}})=e^{-\frac{20}{15}}=e^{-\frac{4}{3}}\approx 0{,}264.$$

13.6.3. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения* (закон Гаусса) с параметрами a и σ^2 ($\sigma>0$), если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет следующий вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Кривую нормального закона распределения называют нормальной кривой или гауссовой кривой:

Построим графики функции распределения и плотности распределения для случайной величины, распределенной по нормальному закону (рис. 18.6).

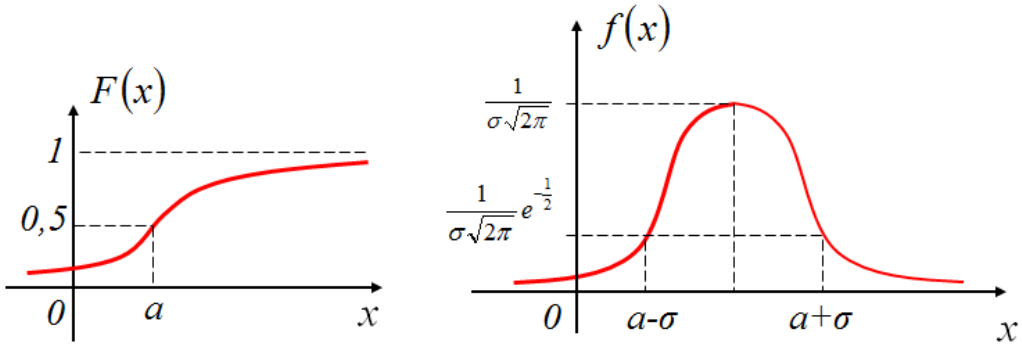


Рис. 13.6. Графики функции и плотности распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Теорема 13.7. Математическое ожидание случайной величины *X,* распределенной по нормальному закону, равно параметру *a*, а среднее квадратическое отклонение равно параметру *σ* этого параметра *a*, а среднее квадратическое отклонение равно параметру *σ* этого закона:

$$M(X) = a\,; \quad D(X) = \sigma^2\,.$$

Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины *X* заданной плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}\,.$$

Согласно вышеприведенной теореме $M(X) = a\,;\ \ D(X) = \sigma^2$, следовательно: $M(X) = a = 1$, $\sigma = 5$, а $D(X) = \sigma^2 = 25$.

Рассмотрим влияние параметров распределения на форму нормальной кривой. Если $\sigma = const$ и менять параметр a $(a_1 < a_2 < a_3)$, т.е. центр симметрии распределения, то нормальная кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы (рис. 18.7).

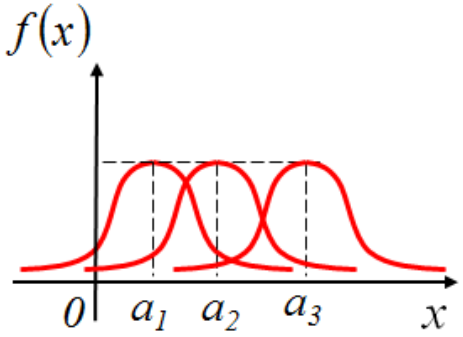


Рис. 13.7. Влияние параметра *a* на форму нормальной кривой.

Если $a = const$ и менять параметр σ $(\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3)$, то меняется ордината точки максимума нормальной кривой (рис. 18.8).

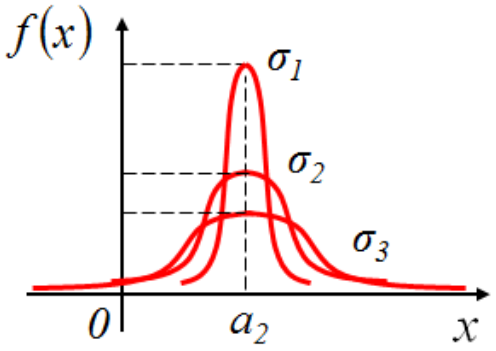


Рис. 13.8. Влияние параметра σ на форму нормальной кривой.

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, нормальное распределение с такими параметрами называют *стандартным*.

Плотность стандартной случайной величины имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Функция распределения случайной величины $X \sim N(0,1)$ имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$ – функция Лапласа.

Теорема 13.8. Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа по формуле

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Свойство 1. Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1, x_2]$ равна

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \qquad t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma};\ \ t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

Свойство 2. Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a на превысит величину $\delta>0$ (по абсолютной величине), равна

$$P\left(|X - a| \le \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм. Если случайная величина имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, т.е. значения случайной величины заключены в интервале

$(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Пример. Пусть X – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами a = 1,6 и σ = 1. Какова вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал (1, 2)?

Вероятность попадания в заданный интервал при одном испытании равна

$$P(1 < X < 2) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{2-1{,}6}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-1{,}6}{1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}6)\right) \approx$$
$$\approx 0{,}1554 + 0{,}2257 = 0{,}3811.$$

Тогда, вероятность непопадания при одном испытании будет равна:

$$q = 1 - p = 1 - 0.3811 = 0.6189,$$

а при четырех испытаниях – $0.6189^4 \approx 0{,}1467$.

$$P(X = 4) = 1 - 0{,}1467 = 0{,}8533.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение случайной величины. Какие из величин являются дискретными?
2. Какие операции осуществляются над случайными величинами?
3. Сформулируйте свойства операций над дискретными случайными величинами.
4. Дайте определение и определите основные свойства функции распределения дискретной случайной величины.
5. Какие числовые характеристики дискретных случайных величин изучены в лекции?
6. Перечислите числовые характеристики дискретных случайных величин.
7. Выпишите свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин.
8. Приведите пример использования биномиального закона распределения для дискретных случайных величин.
9. В каких случаях можно использовать закон распределения Пуассона дискретных случайных величин?
10. Каковы принципы использования геометрического распределения дискретных случайных величин.
11. Приведите пример использования гипергеометрического распределения дискретных случайных величин.
12. Дайте понятие функции распределения непрерывной случайной величины.
13. Опишите основные свойства функции распределения непрерывной случайной величины.
14. Дайте формулировку плотности распределения непрерывной случайной величины.
15. Каковы основные свойства плотности распределения непрерывной случайной величины?
16. Какие числовые характеристики непрерывных случайных величин вы знаете?
17. Опишите основные свойства математического ожидания и дисперсии непрерывных случайных величин.

18. Приведите примеры равномерного закона распределения непрерывных случайных величин.

19. Как определяются числовые характеристики для случайных величин, распределенных по показательному закону.

20. Чему равна вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1, x_2]$?

Раздел 4. Введение в математическую статистику

Глава 14. Основные понятия математической статистики

Основной задачей математической статистики является разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах из данных наблюдений и экспериментов. Эти выводы и заключения относятся не к отдельным испытаниям, из повторения которых складывается данное массовое явление, а представляют собой утверждения об общих вероятностных характеристиках данного процесса, то есть о вероятностях, законах распределения, математических ожиданиях, дисперсиях. Такое использование фактических данных как раз и является отличительной чертой статистического метода.

Статистические проблемы возникают тогда, когда мы на основе той же информации начинаем делать выводы относительно более широкого круга явлений. Так, например, нас может интересовать качество технологического процесса, для чего мы оцениваем вероятность получения в нем дефектного изделия или среднюю долговечность изделия. В этом случае мы рассматриваем собранный материал не ради его самого, а лишь как некую пробную группу или выборку, представляющую только серии из возможных результатов, которые мы могли бы встретить при продолжении наблюдений массового процесса в данной обстановке.

В математической статистике рассматриваются две основные категории задач: оценивание и статистическая проверка гипотез. Первая задача разделяется на точечное оценивание и интервальное оценивание параметров распределения. Например, может возникнуть необходимость по наблюдениям получить точечные оценки параметров $M\xi$ и $D\xi$. Если мы хотим получить некоторый интервал, с той или иной степенью достоверности содержащий истинное значение параметра, то это задача интервального оценивания.

Вторая задача – проверка гипотез – заключается в том, что мы делаем предположение о распределении вероятностей случайной величины (например,

о значении одного или нескольких параметров функции распределения) и решаем, согласуются ли в некотором смысле эти значения параметров с полученными результатами наблюдений.

В первом вопросе главы мы рассмотрим предмет и основные задачи математической статистики, а также историю развития математической статистики и внедрения статистических методов в естественно-научные и социально-экономические исследования.

Второй вопрос посвящен основным понятиям математической статистики. Здесь мы дадим определения выборочной и генеральной совокупности, объем выборки, дадим краткую классификацию выборок, введем ряд понятий и характеристик статистического распределения: варианты, частоты, относительные частоты, накопленные частоты, медиана, мода, размах выборки. В этом вопросе мы определим понятия дискретных и интервальных вариационных рядов, алгоритмы перехода из дискретных рядов в интервальные и обратно.

В третьем вопросе мы рассмотрим определение и принципы построения эмпирической функции распределения и ее графика. В четвертом вопросе лекции мы рассмотрим принципы изображения графического статистического распределения вариационных рядов. Наиболее часто в этом случае применяются полигон, гистограмма и кумулятивная кривая.

Пятый вопрос посвящен числовым характеристикам статистического распределения. Здесь мы представим основные определения и формулы нахождения значений выборочного среднего, выборочной дисперсии и исправленной выборочной дисперсии, выборочного среднего квадратического отклонения и исправленного среднего квадратического отклонения.

И, наконец, в шестом вопросе мы опишем понятия и методы расчета начального выборочного момента порядка k, центрального выборочного момента порядка k, выборочного коэффициента асимметрии и выборочного коэффициента эксцесса.

14.1. Предмет и история развития математической статистики

Математическая статистика – это раздел прикладной математики, в котором изучаются методы сбора, изучения, систематизации и обработки количественных показателей результатов наблюдений массовых случайных событий для выявления существующих закономерностей, построения математических моделей и прогнозирования.

Предметом математической статистики является исследование наблюдаемых случайных величин. Основные задачи математической статистики сводятся к упорядочиванию получаемых данных, представлению их в удобном для дальнейшего анализа виде, оценке характеристик случайных величины, установлению математических зависимостей между изучаемыми факторами, верификации параметров полученных статистических моделей, прогнозированию состояний исследуемых явлений.

История математической статистики начинается на заре человеческой цивилизации. Первые упоминания об использовании простейших статистических расчетов можно увидеть в «Истории Пелопонесской войны» греческого историка Фукидида (460 – 400 до н.э.). В научных трудах арабских математиков Аль-Кинди (801 – 873) и Ибн Адлана (1187 – 1268) описаны основыне методы выборки и частотного анализа. Использование элементов математической статистики можно увидеть в работах банкира Джованни Виллани (1276 – 1348), астронома Тихо Браге (1546 – 1601), картографа Эдварда Райта (1561 – 1615), демографа Джона Граунта (1620 – 1674), экономиста Уильяма Петти (1623 – 1687).

Предпосылкой формирования математической статистики как раздела математики послужили открытия в области теории вероятностей и теории ошибок Пьера Ферма (1607 – 1665), Блеза Паскаля (1623 – 1662), Якоба Бернулли (1655 – 1705), Абрахама Муавра (1667 – 1754), Роджера Котса (1682 – 1716), Томаса Симпсона (1710 – 1761).

Большой вклад в становление и развитие математической статистики внесли Пьер-Симон Лаплас (1749 – 1827), Томас Байес (1701 – 1761), Жозеф-

Луи Лагранж (1736 – 1813), Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855), российские ученые Пафнутий Чебышев (1821 – 1894), Андрей Марков (1856 – 1922).

В XX веке выдающиеся ученые Ежи Нейман (1894-1977), Карл Пирсон (1857 – 1936), Уильям Госсет (1876 – 1937), Артур Боули (1869 – 1957), Чарльз Спирман(1863 – 1945), и Рональд Фишер (1890 – 1962) развили общую теорию оценок и параметров, статистических решений, планирования экспериментов, проверки статистических гипотез, внедрили статистические методы в естественно-научные и социально-экономические исследования, Абрахам Вальд (1902-1950) построил теорию последовательного статистического анализа, а советские математики Андрей Колмогоров (1903-1987) и Николай Смирнов (1900-1966) заложили основы непараметрической статистики и теории предельных распределений порядковых статистик. В это время были сформированы современные фундаментальные положения современной статистики, изучены и классифицированы предельные распределения непараметрических критериев, теории вероятностей больших уклонений и предельные распределения членов вариационного ряда.

В двадцать первом веке можно выделить четыре принципиально новых направления исследований:

- разработка и внедрение математических методов планирования экспериментов;

- развитие статистики объектов нечисловой природы как самостоятельного направления в прикладной математической статистике;

- развитие статистических методов, устойчивых по отношению к малым отклонениям от используемой вероятностной модели;

- широкое развертывание работ по созданию компьютерных пакетов программ, предназначенных для проведения статистического анализа данных.

В настоящее время математическая статистика – мощный аналитический инструмент для исследований в различных областях естественнонаучных, социально-экономических наук, имеет огромное прикладное значение в

промышленности, технических разработках, поиске полезных ископаемых, медицине, сельском хозяйстве и многих других направлениях человеческой деятельности.

14.2. Основные понятия и определения

14.2.1. Основные определения

Совокупность всех объектов, подлежащих исследованию называется генеральной совокупностью. Генеральная совокупность может быть *конечной* или *бесконечной* в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих ее объектов.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Выборка называется *репрезентативной (представительной)*, если ее объекты достаточно хорошо отражают свойства генеральной совокупности.

Повторной называется выборка, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называется выборка, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Применяют различные способы получения выборки.

1) *Простой отбор* – случайное извлечение объектов из генеральной совокупности с возвратом или без возврата.

2) *Типический отбор* – объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из ее «типической» части.

3) *Серийный отбор* – объекты отбираются из генеральной совокупности не по одному, а сериями.

4) *Механический отбор* – генеральная совокупность «механически» делится на столько частей, сколько объектов должно войти в выборку и из каждой части выбирается один объект.

Число N объектов генеральной совокупности и число n объектов выборочной совокупности называют *объемами* генеральной и выборочной

совокупностей соответственно. При этом предполагают, что N значительно больше n.

14.2.2. Понятие вариационного ряда

Полученные различными способами отбора данные образуют выборку. Как правило, это множество чисел, расположенных в произвольном порядке. По такой выборке трудно выявить какую-либо закономерность их изменения (*варьирования*).

Для обработки данных используют операцию *ранжирования*, то есть расположение наблюдаемых значений в порядке возрастания.

После проведения операции ранжирования значения случайной величины объединяют в группы, то есть группируют так, чтобы в каждой отдельной группе значения случайной величины были бы одинаковыми. Каждое такое значение называется *вариантом.* Варианты обозначаются строчными буквами латинского алфавита с индексами, соответствующими порядковому номеру группы x_i , y_j , ….

Изменение значения варианта называется *варьированием*.

Последовательность вариантов выборки, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*.

Число, которое показывает, сколько раз встречаются соответствующие значения вариантов в ряде наблюдений, называется *частотой* или *весом варианта* и обозначается n_i ($i = 1,2,...,k$), где i – номер варианта, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем выборки.

Отношение частоты данного варианта к общему числу наблюдений n называется *относительной частотой* или *частостью* (*долей*) соответствующего варианта и обозначается $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ ($\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$, $i = 1,2,...,k$), где k – число вариантов, n – объем выборки. Частость ω_i является статистической вероятностью появления варианта x_i. Она является аналогом вероятности p_i появления значения x_i случайной величины X.

Накопленная частота $n_i^{нак}$ показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим x. Отношение накопленной частоты $n_i^{нак}$ к общему числу наблюдений n называется *накопленной частостью* $\omega_i^{нак}$.

Дискретным статистическим рядом называется ранжированная совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или частостями ω_i.

Дискретный статистический ряд удобно записывать в виде таблицы:

Таблица 14.1

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

x_i	x_1	x_2	…	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	…	ω_k

Определим основные характеристики дискретного статистического ряда:

1. *Размах варьирования* $R = x_{\max} - x_{\min}$.

2. *Мода* M_0 – вариант, имеющий наибольшую частоту.

3. *Медиана* M_e – вариант, приходящийся на середину ранжированной выборки.

Пусть n – объем выборки. Тогда:

1) если $n = 2k$, то есть ряд имеет четное число членов, то $M_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$;

2) если $n = 2k + 1$, то есть ряд имеет нечетное число членов, то $M_e = x_{k+1}$.

Пример. Сотрудниками полиции зарегистрирована подростковая преступность в возрасте: 14, 16, 12, 13, 14, 15, 14, 16, 14, 15, 15, 16, 14, 15, 13, 14, 15, 15, 16, 13.

Составить дискретный ряд распределения числа преступлений по возрасту. Найти объем, размах, моду и медиану выборки.

Для решения задачи ранжируем исходные данные:

12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16.

Объем выборки: $n = 20$.

Наименьшее значение варианты: $x_{\min} = 12$.

Наибольшее значение варианты: $x_{\max} = 16$.

Размах: $R = x_{\max} - x_{\min} = 16 - 12 = 4$.

Мода: $M_0 = 14$, так как вариант $x_i = 14$ встречается наибольшее количество раз $n_i = 7$.

Так как $n = 20$, то медиана $M_e = \dfrac{x_{10} + x_{11}}{2} = \dfrac{14 + 14}{2} = \dfrac{28}{2} = 14$.

Составим вариационный ряд:

Таблица 14.2

x_i	12	13	14	15	16
n_i	1	3	7	5	4

14.2.3. Дискретные и интервальные вариационные ряды

Если изучаемая случайная величина X является непрерывной или число ее значений достаточно велико, то составляют *интервальный статистический ряд.*

Весь интервал наблюдаемых значений разбивается на k частичных интервалов $[x_1, x_2)$, $[x_2, x_3), \ldots$, $[x_k, x_{k+1}]$ одинаковой длины h. Затем подсчитывают количество попаданий наблюдений в каждый интервал. Эти числа принимают за частоты n_i. Согласно формуле Стерджеса рекомендуемое число интервалов разбиений $k \approx 1 + \log_2 n$, а длины частичных интервалов $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}$, n – объем выборки. Если шаг окажется дробным, то за длину интервала берут ближайшее целое число или ближайшую простую дробь.

За начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{нач} = x_{\min} - \dfrac{h}{2}$, а конец последнего должен удовлетворять условию $x_{кон} - h \le x_{\max} < x_{кон}$. Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала шаг h.

Сгруппированный ряд представляется в виде таблицы (*интервальный статистический ряд*):

Таблица 14.3

$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_k - x_{k+1}$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Пример. Органами МВД за отчетный период зарегистрировано следующее количество преступлений: 178, 160. 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155, 157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169, 179, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172. Построить интервальный статистический ряд.

Произведем ранжирование полученные данные:

153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172, 173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.

Объем выборки: $n = 30$.

Наименьшее значение варианты: $x_{\min} = 153$.

Наибольшее значение варианты: $x_{\max} = 186$.

По формуле Стерджеса находим число интервалов разбиений: $k \approx 1 + \log_2 30 \approx 5{,}9069 \approx 6$.

Длина частичных интервалов: $h = \dfrac{186 - 153}{1 + \log_2 30} \approx \dfrac{33}{6} \approx 5{,}5 \approx 6$.

Начальное значение: $x_{нач} = 153 - \dfrac{6}{2} = 150$.

Составляем интервальный статистический ряд.

Таблица 14.4

$x_i - x_{i+1}$	150–156	156–162	162–168	168–174	174–180	180–186
n_i	4	5	6	7	5	3

Иногда интервальный статистический ряд необходимо заменить дискретным. В этом случае серединное значение i-го интервала принимают за вариант x_i, а соответствующую интервальную частоту n_i – за частоту этого варианта.

Пример. Дан интервальный вариационный ряд:

Таблица 14.5

$x_i - x_{i+1}$	150–156	156–162	162–168	168–174	174–180	180–186
n_i	4	5	6	7	5	3

Построить дискретный вариационный ряд.

Для решения задачи найдем середины частичных интервалов, получим числа: 153, 159, 165, 171, 177, 183. Запишем дискретный вариационный ряд.

Таблица 14.6

x_i	153	159	165	171	177	183
n_i	4	5	6	7	5	3

14.2.4. Эмпирическая функция распределения

Пусть получено статистическое распределение выборки и каждому варианту x_i из этой выборки поставлена в соответствие его частость ω_i.

Эмпирической функцией (*функцией распределения выборки*) называется относительная частота (частость) того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заданного x, т.е.

$$F_n(x) = w(X < x) = w_x^{нак} = \frac{n_x^{нак}}{n}, \qquad (14.1)$$

где n – объем выборки.

Из определения следует, что значения эмпирической функции распределения при каждом x являются случайными величинами. Она обладает теми же свойствами, что и обычная функция распределения вероятностей:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$;

2. $F^*(x)$ – неубывающая функция;

3. $F^*(x)$ – непрерывна слева;

3. $F^*(x) = 0$, при $x \le x_{\min}$ и $F^*(x) = +\infty$, при $x > x_{\max}$.

Пример. Построить эмпирическую функцию распределения по данному вариационному ряду:

Таблица 14.7

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1

Объем выборки: $n = 20$.

Составим таблицу, в которой найдем относительные частоты и накопленные относительные частоты.

Таблица 14.8

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
ω_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05
$\omega_i^{нак}$	0,15	0,45	0,7	0,85	0,95	1

На основе полученной таблицы запишем эмпирическую функцию распределения:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 0;\\ 0{,}15, & при \quad 0<x\le 1;\\ 0{,}45, & при \quad 1<x\le 2;\\ 0{,}7, & при \quad 2<x\le 3;\\ 0{,}85, & при \quad 3<x\le 4;\\ 0{,}95, & при \quad 4<x\le 5;\\ 1, & при \quad x>5.\end{cases}$$

Ее график будет иметь вид:

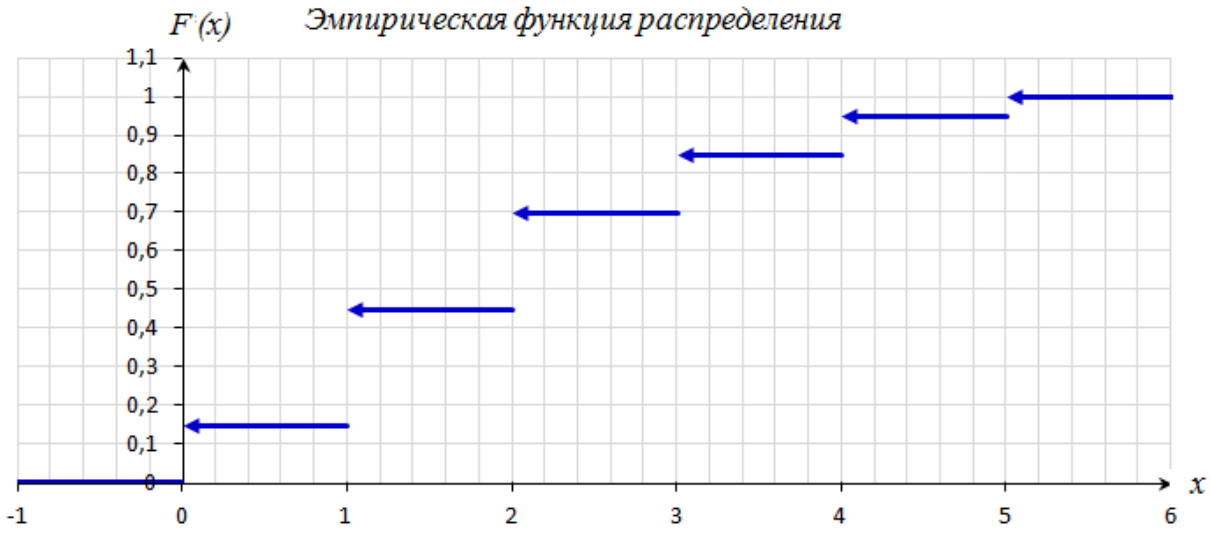


Рис. 14.1. Эмпирическая функция распределения.

14.3. Графическое изображение статистического распределения

Для графического изображения вариационных рядов наиболее часто применяются *полигон, гистограмма* и *кумулятивная кривая*.

Полигон частот или *относительных частот* служит для изображения дискретного вариационного ряда и представляет собой ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_i;\ n_i)$ или $(x_i;\ \omega_i)$,

$i = 1, 2, ..., k$. Полигон относительных частот является аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

Гистограмма частот или *относительных частот* служит только для изображения интервальных вариационных рядов и представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями, равными частичным интервалам значений признака $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, ..., k$, и высотами, равными частотам n_i или относительным частотам ω_i. Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, то можно получить полигон того же распределения.

Кумулятивная кривая (*кумулята*) – кривая накопленных частот (частостей). Для дискретного вариационного ряда кумулята представляет ломаную линию, соединяющую точки $\left(x_i; n_i^{нак}\right)$ или $\left(x_i; \omega_i^{нак}\right)$, $i = 1,\ 2, ...,\ k$. Для интервального вариационного ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината – накопленной частоте (частости), равной нулю. Другие точки этой ломаной соответствуют концам интервалов.

Пример. В результате некоторого эксперимента получены следующие данные:

2, 4, 9, 5, 4, 8, 3, 6, 7, 2,
8, 7, 5, 3, 7, 4, 4, 3, 4, 6.

Найти размах варьирования R, моду M_0, медиану M_e. Построить полигон и кумуляту частот и относительных частот.

Сначала найдем требуемые характеристики R, M_0, медиану M_e.

Для получения объема выборки посчитаем количество полученных значений в выборке. Таким образом, $n = 20$.

Размах варьирования рассчитаем вычитая из наибольшего варианта 9 наименьший вариант 2, а значит $R = 7$.

Наиболее повторяемое значение полученных данных равно 4, следовательно, $M_0 = 4$.

Количество элементов в выборке 20, следовательно, возьмем полусумму десятого и одиннадцатого значений выборки. Таким образом, $M_e = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

Для нахождения дискретного вариационного ряда ранжируем исходные данные: 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9.

Составим дискретный вариационный ряд, выписав в таблицу ранжированные варианты и соответствующие им частоты (Таблица 1).

Таблица 14.9.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	3	5	2	2	3	2	1

Найдем относительные частоты, накопленные частоты и накопленные относительные частоты и составим таблицу 2:

Таблица 14.10.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	3	5	2	2	3	2	1
ω_i	0,1	0,15	0,25	0,1	0,1	0,15	0,1	0,05
$n_i^{нак}$	2	5	10	12	14	17	19	20
$\omega_i^{нак}$	0,1	0,25	0,5	0,6	0,7	0,85	0,95	1

На основе значений полученной таблицы строим полигон частот и относительных частот, кумуляту частот и относительных частот (рис. 14.2).





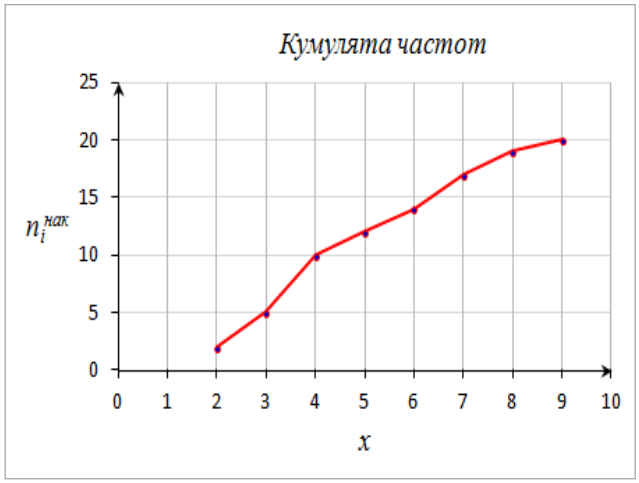




Рис. 14.2. Графическое представление дискретного вариационного ряда.

Пример. Дан интервальный вариационный ряд:

Таблица 14.11.

$x_i - x_{i+1}$	1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21
n_i	10	20	50	12	8

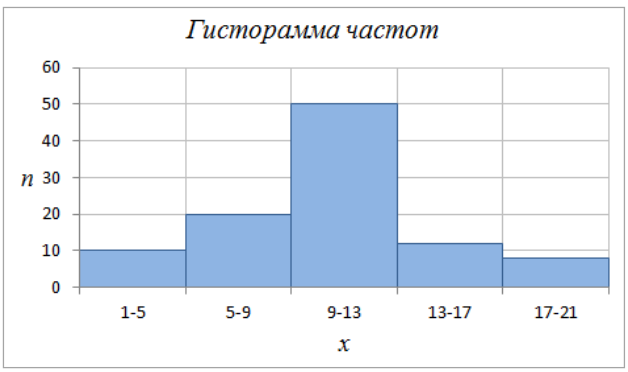
Построить гистограмму и кумуляту частот и относительных частот.

Найдем относительные частоты, накопленные частоты и накопленные относительные частоты. Составим таблицу:

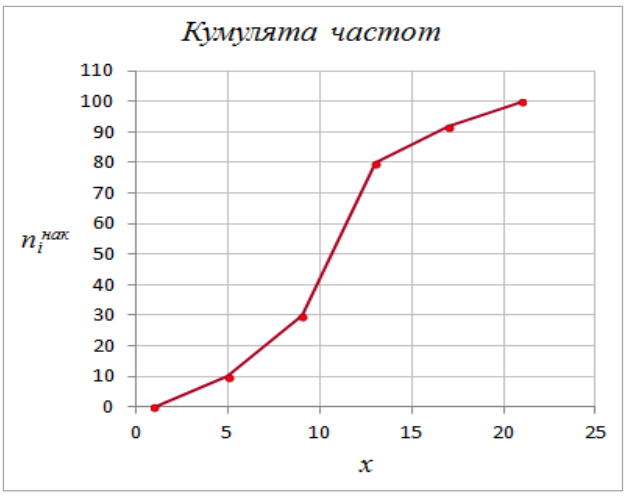
Таблица 14.12.

$x_i - x_{i+1}$	1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21
n_i	10	20	50	12	8
ω_i	0,1	0,2	0,5	0,12	0,08
$n_i^{нак}$	10	30	80	92	100
$\omega_i^{нак}$	0,1	0,3	0,8	0,92	1

На основе полученной таблицы строим гистограмму частот и относительных частот, кумуляту частот и относительных частот (рис. 14.3).









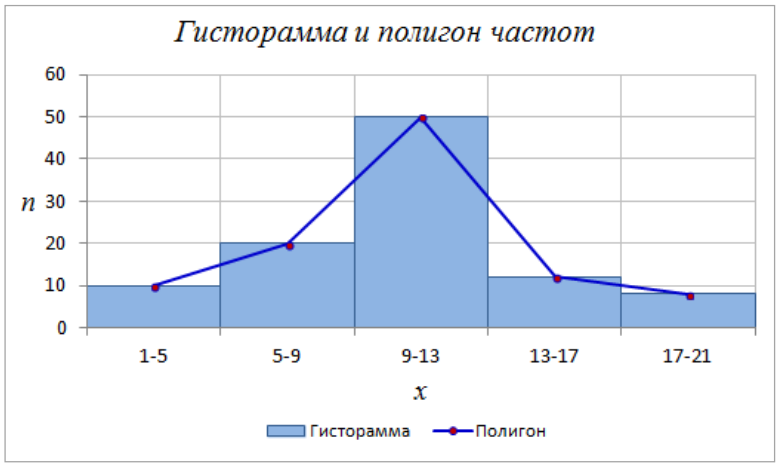


Рис. 14.3. Графическое представление интервального вариационного ряда.

14.4. Числовые характеристики статистического распределения

14.4.1. Выборочное среднее

Пусть дано статистическое распределение выборки объема n:

Таблица 14.13.

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

Выборочным средним $\overline{x_в}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i \,. \qquad (14.1)$$

Так как $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, то для вычисления выборочной средней можно использовать формулу:

$$\overline{x_в} = \sum_{i=1}^{m} x_i \omega_i \,. \qquad (14.2)$$

В случае интервального вариационного ряда в качестве x_i берут середины интервалов, а n_i – соответствующие им частоты.

Пример. Дан статистический ряд распределения частот:

Таблица 14.1.

x_i	1	3	4	5	6
n_i	3	5	7	2	3

Вычислить среднюю выборочную ($\overline{x_в}$).

Из таблицы 6 рассчитаем объем выборки:

$$n = 3 + 5 + 7 + 2 + 4 = 20 \,.$$

Тогда выборочная средняя будет равна:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i = \frac{1\cdot 3 + 3\cdot 5 + 4\cdot 7 + 5\cdot 2 + 6\cdot 3}{20} = 3{,}7 \,.$$

14.4.2. Выборочная дисперсия

Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i . \qquad (14.3)$$

Выборочная дисперсия может быть вычислена по формуле:

$$D_в = \overline{x_в^{\,2}} - \left(\overline{x_в}\right)^2 , \text{ где } \overline{x_в^{\,2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i . \qquad (14.4)$$

Так как $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, то для вычисления выборочной дисперсии можно использовать формулу:

$$D_в = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot \omega_i . \qquad (14.5)$$

При решении практических задач используется *исправленная выборочная дисперсия* S^2:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в . \qquad (14.6)$$

Замечание. Формулы для вычисления выборочной дисперсии и исправленной дисперсии отличаются только знаменателями. При достаточно большом объеме выборки n выборочная $D_в$ и исправленная S^2 дисперсии мало отличаются друг от друга, поэтому на практике исправленной дисперсией пользуются, если $n \le 30$.

Пример. Рассчитаем значение выборочной дисперсии и исправленной значение выборочной дисперсии для представленного в таблице 6 статистического ряда распределения частот.

Выборочную дисперсию будем находить по формуле 4. Найдем значение выборочной средней квадрата значений выборки:

$$\overline{x_в^{\,2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i = \frac{1^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 7 + 5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 3}{20} = 15{,}9 .$$

Тогда значение выборочной дисперсии найдем как разность $\overline{x_в^2}$ и квадрата выборочной средней $\left(\overline{x_в}\right)^2$:

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 15{,}9 - (3{,}7)^2 = 2{,}21.$$

Исправленную выборочную дисперсию будем находить по формуле 6:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{20}{20-1} \cdot 2{,}21 \approx 2{,}3263 .$$

14.4.3. Выборочное среднее квадратическое отклонение

Выборочное среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} . \qquad (14.7)$$

Особенность $\sigma_в$ состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и данные выборки.

Исправленное среднее квадратическое отклонение S определяется, как квадратный корень из исправленной выборочной дисперсии:

$$S = \sqrt{S^2} . \qquad (14.8)$$

Пример. Рассчитаем значение выборочного среднего квадратического отклонения и исправленного среднего квадратического отклонения для представленного в таблице 6 статистического ряда распределения частот.

Значение выборочного среднего квадратического отклонения будем находить по формуле 19.7:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{2{,}21} \approx 1{,}4866 .$$

А исправленное среднее квадратическое отклонение по формуле 8:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2{,}3263} \approx 1{,}5252 .$$

Средняя выборочная и выборочная дисперсия являются частными случаями *моментов статистического распределения*.

14.5. Выборочные моменты и коэффициенты

14.5.1. Выборочные начальные и центральные моменты

Начальным выборочным моментом порядка k называется среднее арифметическое k-х степеней всех значений выборки:

$$\widetilde{\nu}^k = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^k \cdot n_i}{n} \quad \text{или} \quad \widetilde{\nu}^k = \sum_{i=1}^{m} x_i^k \cdot \omega_i . \tag{14.9}$$

Замечание. Средняя арифметическая является начальным выборочным моментом первого порядка: $\widetilde{\nu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^1 \cdot n_i = \overline{x_в}$.

Центральным выборочным моментом порядка k называется среднее арифметическое k-х степеней отклонений наблюдаемых значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$:

$$\widetilde{\mu}^k = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^k \cdot n_i}{n} \quad \text{или} \quad \widetilde{\mu}^k = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^k \cdot \omega_i . \tag{14.10}$$

Замечание. Центральный выборочный момент первого порядка равен нулю: $\widetilde{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^1 \cdot n_i = 0$, так как $\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right) \cdot n_i = 0$.

Замечание. Выборочная дисперсия является центральным выборочным моментом второго порядка: $\widetilde{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i = D_в$.

14.5.2. Выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса

Выборочным коэффициентом асимметрии называется число $\widetilde{A}$, вычисляемое по формуле:

$$\widetilde{A} = \frac{\widetilde{\mu}_3}{\sigma_в^3} . \tag{14.11}$$

Выборочный коэффициент асимметрии служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда. Если $\widetilde{A} = 0$, то распределение

имеет симметричную форму, т.е. варианты равноудаленные от x, имеют одинаковую частоту (средняя арифметическая, мода и медиана совпадают). Если это равенство нарушается, то распределение ассиметрично.

Если $\widetilde{A} < 0$, то наблюдается положительная (правосторонняя) асимметрия, т.е. более пологий «спуск» полигона наблюдается справа. Если $\widetilde{A} > 0$, то наблюдается отрицательная (левосторонняя) асимметрия, т.е. более пологий «спуск» полигона наблюдается слева.

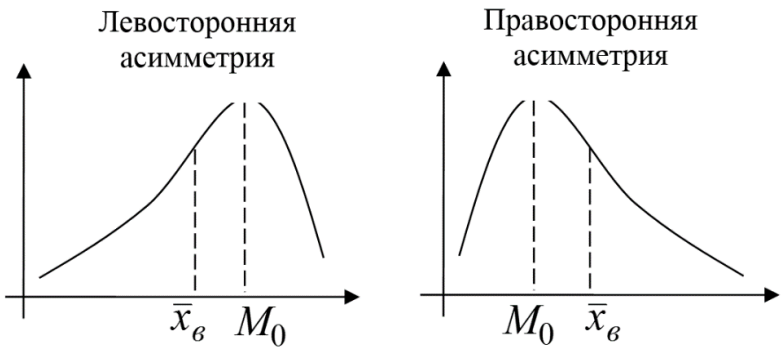


Рис. 14.4. Левосторонняя и правосторонняя асимметрии.

Выборочным коэффициентом эксцесса или *коэффициентом крутости* называется число $\widetilde{E}$, вычисляемое по формуле:

$$\widetilde{E} = \frac{\widetilde{\mu}^4}{\sigma_в^4} - 3. \qquad (14.12)$$

Выборочный коэффициент эксцесса служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным распределением.

Коэффициент эксцесса для случайной величины, распределенной по нормальному закону, равен нулю.

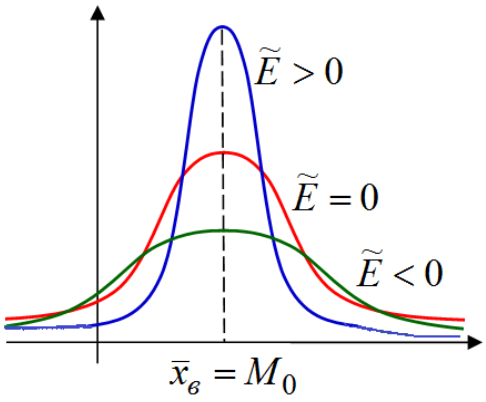


Рис. 14.5. Значения коэффициента эксцесса.

Поэтому за стандартное значение выборочного коэффициента эксцесса принимают $\widetilde{E}=0$. Если $\widetilde{E}>0$ ($\widetilde{E}<0$), то полигон вариационного ряда имеет более крутую (пологую) вершину по сравнению с нормальной кривой.

Пример. Вычислить коэффициент асимметрии и эксцесс по данным представленным в таблице:

Таблица 14.15.

№	Значения	Частота
1	94-100	3
2	100-106	7
3	106-112	11
4	112-118	20
5	118-124	28
6	124-130	19
7	130-136	10
8	136-142	2

Объем выборки: $n=3+7+11+20+28+19+10+2=100$.

Составим дискретный вариационный ряд распределения частот:

Таблица 14.16.

№	x_i	n_i
1	97	3
2	103	7
3	109	11
4	115	20
5	121	28
6	127	19
7	133	10
8	139	2

Значение выборочной средней составит:

$$\overline{x_в}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i n_i=\frac{1}{20}\cdot(97\cdot 3+103\cdot 7+109\cdot 7+115\cdot 20+121\cdot 28+127\cdot 19+$$

$$+133\cdot 10+139\cdot 2)=119{,}2.$$

Для определения выборочной дисперсии рассчитаем значение $\overline{x_в^{\,2}}$:

$$\overline{x_в^{\,2}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i^2 n_i=\frac{1}{20}\cdot(97^2\cdot 3+103^2\cdot 7+109^2\cdot 7+115^2\cdot 20+121^2\cdot 28+$$

$$+127^2 \cdot 19 + 133^2 \cdot 10 + 139^2 \cdot 2) = 14296,1 .$$

Тогда значение выборочной дисперсии будет равно:

$$D_в = \overline{x_в^{\,2}} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 14296,1 - (119,2)^2 = 87,48 .$$

Найдем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{87,48} \approx 9,353 .$$

А затем центральный выборочный момент 3-го порядка:

$$\widetilde{\mu}^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^3 \cdot n_i = \frac{1}{100} \cdot ((97-119,2)^3 \cdot 3 + (103-119,2)^3 \cdot 7 +$$

$$+(109-119,2)^3 \cdot 7 + (115-119,2)^3 \cdot 20 + (121-119,2)^3 \cdot 28 +$$

$$+(127-119,2)^3 \cdot 19 + (133-119,2)^3 \cdot 10 + (139-119,2)^3 \cdot 2) \approx -247,54.$$

Центральный выборочный момент 4-го порядка будет равен:

$$\widetilde{\mu}^4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^4 \cdot n_i = \frac{1}{100} \cdot ((97-119,2)^4 \cdot 3 + (103-119,2)^4 \cdot 7 +$$

$$+(109-119,2)^4 \cdot 7 + (115-119,2)^4 \cdot 20 + (121-119,2)^4 \cdot 28 +$$

$$+(127-119,2)^4 \cdot 19 + (133-119,2)^4 \cdot 10 + (139-119,2)^4 \cdot 2) \approx 20767,8$$

Найдем коэффициент асимметрии:

$$\widetilde{A} = \frac{\widetilde{\mu}_3}{\sigma_в^3} = \frac{-247,54}{9,353^3} = -0,3025 .$$

Рассчитаем значение эксцесса:

$$\widetilde{E} = \frac{\widetilde{\mu}^4}{\sigma_в^4} - 3 = \frac{20767,8}{9,353^4} - 3 = -0,2862 .$$

Так как коэффициент асимметрии $\widetilde{A}$ отрицателен, то наблюдается левосторонняя асимметрия. Поскольку эксцесс $\widetilde{E}$ отрицательный, то рассматриваемое распределение имеет пологую вершину по сравнению с нормальной кривой.

Вопросы для самоконтроля

1. Определите предмет и задачи математической статистики.
2. Как называется выборка, если ее объекты достаточно хорошо

отражают свойства генеральной совокупности?

3. Чем отличаются повторная и бесповторная выборка?

4. Какие различные способы получения выборки применяют в статистических исследованиях?

5. Дайте определение статистического распределения выборки.

6. Перечислите основные характеристики дискретного статистического ряда? Опишите эти понятия.

7. Опишите принципы построения дискретного и интервального дискретных рядов.

8. Каким образом осуществляется переход от дискретного вариационного ряда к интервальному?

9. Как осуществляется переход от интервального вариационного ряда к дискретному?

10. Продемонстрируйте на примере методы построения эмпирической функции распределения.

11. Дайте определение статистического распределения выборки.

12. Перечислите основные характеристики дискретного статистического ряда? Опишите эти понятия.

13. Опишите принципы построения дискретного и интервального дискретных рядов.

14. Каким образом осуществляется переход от дискретного вариационного ряда к интервальному?

15. Как осуществляется переход от интервального вариационного ряда к дискретному?

16. Продемонстрируйте на примере методы построения эмпирической функции распределения.

17. Какие виды графиков используются для изображения статистического распределения?

18. Каким образом гистограмма и кумулята отображают статистические распределения?

19. Какие расчеты необходимо произвести для построения кумуляты статистического распределения?

20. Назовите основные числовые характеристики статистического

распределения.

21. Укажите методы, позволяющие рассчитать выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение.

22. Каким образом можно получить исправленное среднее квадратическое отклонение?

23. Как осуществляется расчет выборочных начальных и центральных моментов k-го порядка?

24. Для чего служат выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса?

Глава 15. Основы регрессионного анализа

В криминологических и социально-экономических исследованиях между значениями наблюдаемых факторов существуют различные зависимости, в которых каждому значению одного фактора соответствует множество возможных значений других переменных, то есть их определенное распределение. Такая зависимость получила название статистической зависимости.

Если каждому значению одной переменной соответствует определенное условное математическое ожидание другой, то такая статистическая зависимость называется корреляционной. Ставя цель дать количественное описание взаимосвязей между такими изучаемыми объектами (процессами), используемый математический аппарат, прежде всего, связан с методами регрессионного анализа.

Одним из главных компонентов процесса управления в правоохранительной сфере является аналитическая деятельность. От обоснованности выводов, полученных в результате анализа и прогнозирования социально-экономических процессов, во многом зависит качество управленческих решений, а, следовательно, и эффективность управляющих воздействий в сфере охраны общественного порядка, безопасности и борьбы с преступностью.

Вместе с тем выявление корреляционных зависимостей не является достаточным основанием для формирования достоверных выводов о наличии устойчивой социальной или экономической закономерности. Несмотря на полученное сколь угодно высокое значение коэффициента корреляции, аналитик еще не имеет достаточных оснований утверждать, что независимая переменная является причиной, а зависимая – следствием. Поэтому современное направление развития математических методов анализа социально-правовых явлений часто связывается с построением и практической реализацией математических моделей, учитывающих специфику и эволюцию преступности.

15.1. Введение в регрессионный анализ

В регрессионном анализе исследуется односторонняя зависимость случайной переменной y от одной или нескольких независимых переменных x_1, x_2,…, x_p. Такая зависимость называется регрессионной и может быть представлена в виде уравнения

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

При этом данное уравнение называется модельным уравнением регрессии, функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ – модельной функцией регрессии, а ее график – модельной линией регрессии. Зависимую переменную y называют объясняемой, выходной, эндогенной, результирующим признаком, а независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p$ – объясняющими, входными, экзогенными, факторными признаками.

Задачами регрессионного анализа являются установление функциональной зависимости между факторами исследуемых явлений, оценка полученной регрессионной модели, прогноз значений зависимой переменной.

15.1.1. Регрессионные модели

Для построения статистической математической модели, используются два типа исходных данных:

1) данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент (период) времени;

2) данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени.

Модели, построенные по данным первого типа, называются пространственными моделями. Модели, построенные на основе второго типа данных, называются моделями временных рядов.

В зависимости от количества факторов, включенных в уравнение регрессии, принято различать парную и множественную регрессии.

Парная регрессия представляет собой регрессию между двумя переменными y и x, т. е. модель вида

$$y = f(x),$$

где y – зависимая переменная (результативный признак); x – независимая, или объясняющая, переменная (признак-фактор).

Множественная регрессия соответственно представляет собой регрессию результативного признака с двумя или большим числом факторов, то есть модель вида

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Любое статистическое исследование начинается со спецификации модели, т.е. с формулировки вида модели, исходя из соответствующей теории связи между переменными. Иными словами, исследование начинается с подбора математической модели, устанавливающей связь между явлениями.

Из круга факторов, влияющих на результативный признак, необходимо выделить наиболее существенно влияющие факторы. Парная регрессия достаточна, если имеется единственный доминирующий признак-фактор, который и используется в качестве объясняющей переменной.

Предположим, что выдвигается гипотеза о том, что количественный показатель y изучаемого социально-криминологического явления находится в функциональной зависимости от численного значения заранее известного фактора x:

$$y = f(x).$$

В этом случае необходимо знать, что остальные объясняющие факторы предполагаются неизменными или малозначимыми, т.е. ими в создаваемой модели можно пренебречь.

Уравнение парной регрессии характеризует связь между двумя признаками, которая проявляется как некоторая закономерность лишь в среднем в целом по совокупности наблюдений. Так, если зависимость значения исследуемого фактора y от фактора x характеризуется, например, уравнением

$$y = a + bx,$$

то это означает, что с ростом значения фактора x на одну единицу значение фактора y в среднем увеличивается на b единиц.

В уравнении регрессии корреляционная зависимость признаков представляется в виде функциональной связи, выраженной соответствующей математической функцией. Практически в каждом отдельном случае величина y складывается из двух слагаемых:

$$y_j = y(x_j) + \varepsilon_j, \qquad (15.1)$$

где y_j – фактическое значение результативного признака; $y(x_j)$ – теоретическое значение результативного признака, найденное исходя из математической функциональной связи y и x; ε_j – случайная величина, характеризующая отклонения реального значения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

Случайная величина ε называется также возмущением. Она включает влияние неучтенных в модели факторов, случайных ошибок и особенностей измерения. Ее присутствие в модели порождено тремя источниками: спецификацией модели, выборочным характером исходных данных, особенностями измерения переменных.

Регрессионные модели не всегда используют для описания связи факторов линейной зависимости. Класс математических функций для описания связи двух переменных достаточно широк.

15.1.2. Виды уравнений парной регрессии

Различают линейные и нелинейные регрессии.

Линейная регрессия представляет собой линейную функцию вида:

$$y = a + bx + \varepsilon \ . \qquad (15.2)$$

Нелинейные регрессии делятся на два класса.

1) Регрессии, нелинейные относительно включенной в анализ объясняющей переменной, но линейные по оцениваемым параметрам. К ним относятся:

полиномы различных степеней

$$y = a + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \varepsilon; \qquad (15.3)$$

гиперболические функции

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon . \qquad (15.4)$$

2) Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам:
степенная функция

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon ; \qquad (15.5)$$

показательная функция

$$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon ; \qquad (15.6)$$

логарифмическая функция

$$y = a \log_b x \cdot \varepsilon ; \qquad (15.7)$$

экспоненциальная функция

$$y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon . \qquad (15.8)$$

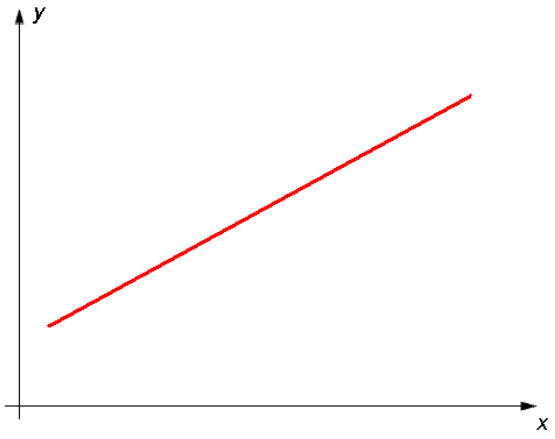
От правильно выбранной спецификации модели зависит величина случайных ошибок: они тем меньше, чем в большей мере теоретические значения результативного признака $y(x)$ подходят к фактическим данным.

К ошибкам спецификации будут относиться не только неправильный выбор той или иной математической функции $y=f(x)$, но и недоучет в уравнении регрессии какого-либо существенного фактора, т.е. использование парной регрессии вместо множественной модели.

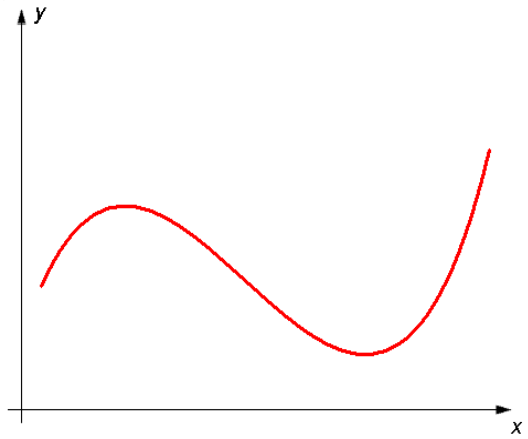
Наряду с ошибками спецификации могут иметь место ошибки выборки, поскольку исследователь чаше всего имеет дело с выборочными данными при установлении закономерной связи между признаками. Ошибки выборки имеют место и в силу неоднородности данных в исходной статистической совокупности, что, как правило, бывает при изучении сложных социальных процессов.

Если ошибки спецификации можно уменьшить, изменяя форму модели (вид математической формулы), а ошибки выборки – увеличивая объем исходных данных, то ошибки измерения практически лишают возможности дать количественную оценку связи между признаками. Статистическое измерение социально-криминологических показателей сопряжено с рядом трудностей и не лишено возможных ошибок, например, в результате наличия незарегистрированных событий.

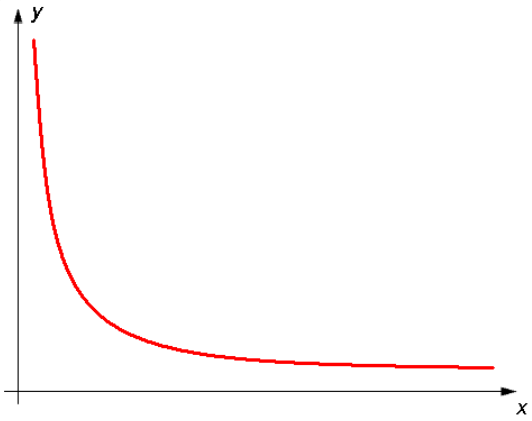
Предполагая, что ошибки измерения сведены к минимуму, основное внимание в статистических исследованиях уделяется ошибкам спецификации.



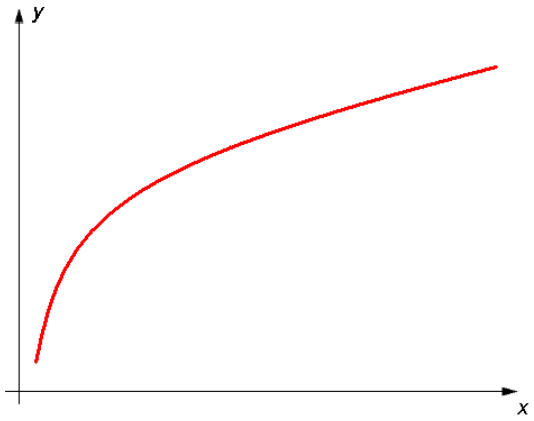
$$y = a + bx$$



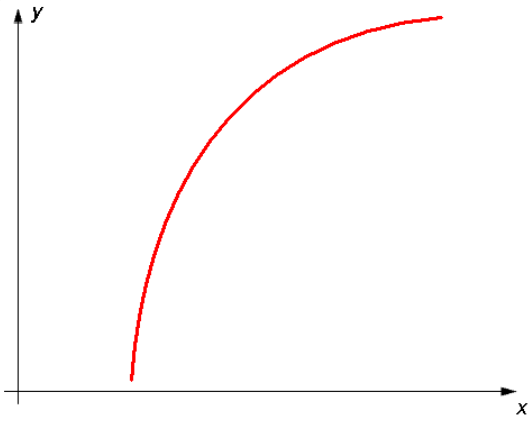
$$y = a + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \varepsilon$$



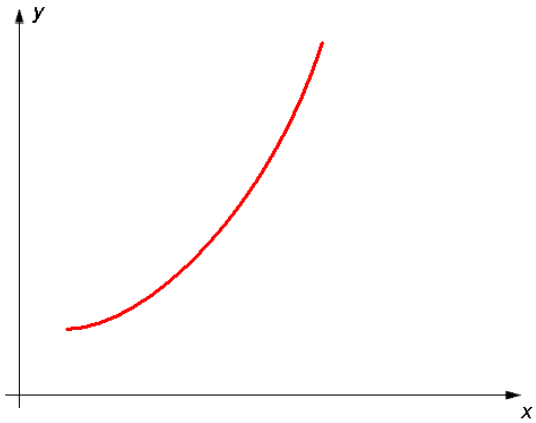
$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$$



$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$$



$$y = a \log_b x \cdot \varepsilon$$



$$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$$

Рис. 15.1. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей между двумя переменными.

В парной регрессии выбор вида математической функции $y=f(x)$ может быть осуществлен тремя методами: графическим, аналитическим и

экспериментальным. При изучении зависимости между признаками *графический метод* подбора вида уравнения регрессии достаточно нагляден.

Метод основан на поле корреляции. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей, представлены на рис. 15.1.

Значительный интерес представляет *аналитический метод* выбора типа уравнения регрессии. Он основан на изучении материальной природы связи исследуемых признаков.

Однако при обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется *экспериментальным методом*, т.е. путем сравнения оценок полученных уравнений, рассчитанных при разных типах уравнений.

Если уравнение регрессии проходит через все точки корреляционного поля, что возможно только при функциональной связи, когда все точки лежат на линии регрессионной функции $y=f(x)$ фактические значения результативного признака совпадают с теоретическими $y(x_i)=y_i$, т.е. они полностью обусловлены влиянием фактора x. В практических исследованиях, как правило, имеет место некоторое рассеяние точек относительно линии регрессии. Оно обусловлено влиянием прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов.

Результаты исследований подтверждают, что число наблюдений должно в 6 – 7 раз превышать число рассчитываемых параметров при переменной x. Это означает, что искать линейную регрессию, имея менее 7 наблюдений, вообще не имеет смысла. Если вид функции усложняется, то требуется увеличение объема наблюдений, ибо каждый параметр при x должен рассчитываться хотя бы по 7 наблюдениям. Значит, если мы выбираем параболу второй степени

$$y = a + bx + cx^2 + \varepsilon, \qquad (15.9)$$

то требуется объем информации уже не менее 14 наблюдений.

15.2. Построение и верификация парной линейной регрессии

Рассмотрим в качестве примера следующую регрессионную зависимость. По восьми исследуемым регионам известны значения двух социально-криминологических признаков (Таблица 15.1).

Таблица 15.1

№ региона	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y_i	42,5	81,2	52,3	58,2	76,2	48,8	69,9	72,8
x_{i1}	39,9	17,2	37,1	31,8	10,3	32,9	21,8	7,8

Можно предположить корреляционную зависимость значений фактора y от фактора x. Для наглядности изобразим эту зависимость графически точками на координатной плоскости. Такое графическое отображение статистической зависимости называется полем корреляции.

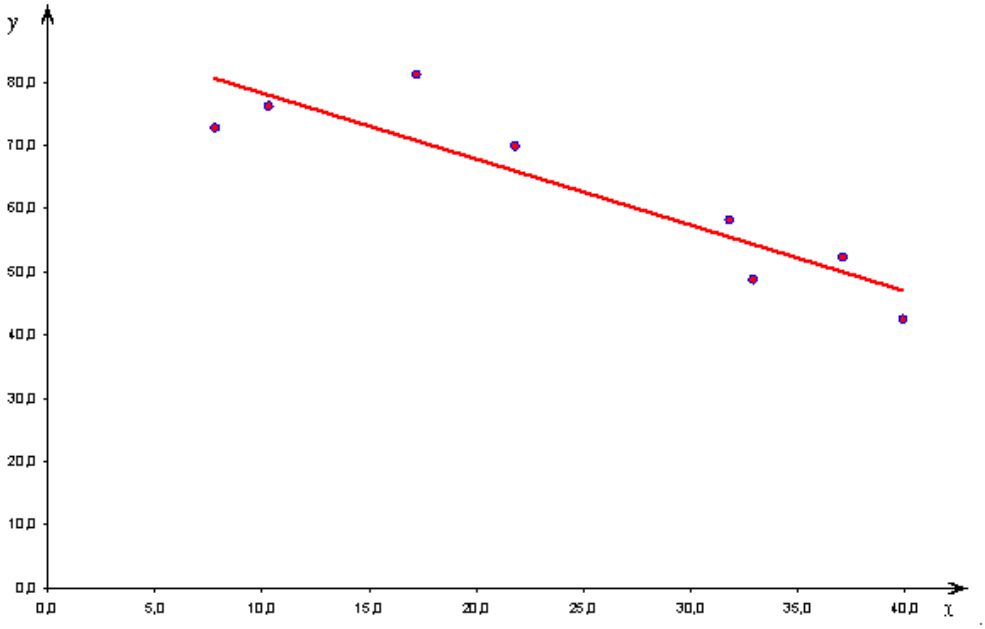


Рис. 15.2. Поле корреляции регрессионной зависимости.

По расположению эмпирических точек можно предположить наличие линейной регрессионной (корреляционной) зависимости между переменными x и y. В нашем случае точки на плоскости лежат в близи от некоторой прямой, поэтому уравнение регрессии будем искать в виде линейного уравнения

$$y = a + bx \ .$$

Построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров – a и b. Оценки параметров линейной регрессии могут быть найдены разными методами. Можно обратиться к полю корреляции и, выбрав на графике две точки, провести через них прямую линию. Далее по графику можно определить значения параметров. Параметр a определим, как точку пересечения линии регрессии с осью OY, а параметр b оценим, исходя из угла наклона линии регрессии, как dy/dx, где dy – приращение результата y, а dx – приращение фактора x.

15.2.1. Метод наименьших квадратов

Классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии основан на методе наименьших квадратов (МНК). МНК позволяет получить такие оценки параметров a и b, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y_i от расчетных (теоретических) $y(x_i)$ минимальна:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y(x_i))^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a+bx_i))^2\to\min. \qquad (15.10)$$

На основании необходимого условия экстремума функции двух переменных $S(a,b)$ приравниваем к нулю ее частные производные. Получим:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)x_i=0\end{cases}, \qquad (15.11)$$

откуда после преобразований получим систему нормальных уравнений для определения параметров линейной регрессии:

$$\begin{cases}na+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i.\end{cases} \qquad (15.12)$$

Разделив обе части системы на n, получим систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y}, \\ a\bar{x} + b\overline{x^2} = \overline{xy}, \end{cases} \quad (15.13)$$

где соответствующие средние определяются по формулам:

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \text{ – среднее значение квадрата фактора } x_i, \quad (15.14)$$

$$\bar{x}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^2 \text{ – квадрат среднего значения фактора } x_i, \quad (15.15)$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} \text{ – среднее значение квадрата фактора } y, \quad (15.16)$$

$$\bar{y}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \right)^2 \text{ – квадрат среднего значения фактора } y. \quad (15.17)$$

15.2.2. Определение параметров уравнения линейной модели

Для расчета параметров модели построим таблицу:

Таблица 15.2

№ региона	y_i	x_i	y_i^2	$x_i y_i$	x_i^2
1	42,5	39,9	1806,25	1695,75	1592,01
2	81,2	17,2	6593,44	1396,64	295,84
3	52,3	37,1	2735,29	1940,33	1376,41
4	58,2	31,8	3387,24	1850,76	1011,24
5	76,2	10,3	5806,44	784,86	106,09
6	48,8	32,9	2381,44	1605,52	1082,41
7	69,9	21,8	4886,01	1523,82	475,24
8	72,8	7,8	5299,84	567,84	60,84
Σ	**501,9**	**198,8**	**32895,95**	**11365,52**	**6000,08**
Ср. зн.	**62,7375**	**24,85**	**4111,99375**	**1420,69**	**750,01**

Таблица заполняется следующим образом. В первом столбце расчетной таблицы вводятся идентификаторы исследуемых объектов. В нашем случае это

номера исследуемых регионов. По каждому объекту в столбец y_i вносятся соответствующие значения $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ наблюдаемого фактора y, а в столбец x_i – значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ наблюдаемого фактора x. Затем столбец y_i^2 заполняется квадратами значений $y_1^2, y_2^2, y_3^2, \ldots, y_n^2$, столбец $x_i y_i$ – произведениями значений по соответствующей строке $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \ldots, x_n y_n$, столбец x_i^2 заполняется квадратами значений $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots, x_n^2$.

Например, для первого региона (при i=1) вписываем значение y_1, равное 42,5, в следующий столбец вставляем значение x_1, равное 39,9. Произведем вычисления по региону в третьем, четвертом и пятом столбцах расчетной таблицы:

y_1^2=42,5^2=1806,25;

$x_1 y_1^2$=42,5·39,9=1695,75;

x_1^2=39,9^2=1592,01.

После соответствующих заполнений по каждому объекту необходимо суммировать элементы таблицы по каждому столбцу, а затем рассчитать средние значения этих элементов.

Рассчитаем выборочные дисперсии $\sigma^2{}_x = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ и $\sigma^2{}_y = \overline{y^2} - \bar{y}^2$ переменных x и y, используя средние значения, полученные в расчетной таблице:

σ^2_x=750,01–24,85^2=750,01–617,52=132,4875;

σ^2_y=4111,99375–62,7375^2=4111,99375–3935,9939=175,99985.

Найдем значения средних квадратичных отклонений:

$\sigma_x = \sqrt{132,4875} = 11,5104$;

$\sigma_y = \sqrt{175,99985} = 13,2665$.

Произведем оценку коэффициентов линейного регрессионного уравнения $y = a + bx$.

Коэффициент b называется выборочным коэффициентом регрессии y по x. Он показывает, на сколько единиц в среднем изменяется переменная y при

увеличении переменной x на одну единицу. Выборочный коэффициент регрессии можно найти по формуле:

$$b = \frac{Cov(x, y)}{\sigma^2{}_x}, \tag{15.18}$$

где

$$Cov(x, y) = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y} \tag{15.19}$$

– выборочный корреляционный момент или выборочная ковариация.

Рассчитаем выборочную ковариацию:

$Cov(x,y)$=1420,69–24,85·62,7375=1420,69–1559,0269=–138,3369.

Тогда выборочный коэффициент регрессии будет равен:

$$b = \frac{Cov(x, y)}{\sigma^2{}_x} = \frac{-138{,}336875}{132{,}4875} = 1{,}044131.$$

Коэффициент a линейного регрессионного уравнения получим, подставляя в уравнение средние значения факторов x и y:

$$\bar{y} = a + b\bar{x}. \tag{15.20}$$

Откуда можно выразить и коэффициент a:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \tag{15.21}$$

Оценим коэффициент a.

a=62,7375–1,044131·24,85=88,684628.

Таким образом, линейная регрессионная модель будет выглядеть следующим образом:

y=88,684628–1,044131$\boldsymbol{x}$.

Из полученного уравнения регрессии следует, что при увеличении значения фактора x**,** значение фактора y будет уменьшаться в 1,044131 раз. Таким образом, регрессионную зависимость между исследуемыми факторами следует считать обратной.

После нахождения коэффициентов уравнения линейной регрессионной модели, для определения его пригодности для использования в исследованиях проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров. Оценка значимости уравнения регрессии сводится к установлению

соответствия математической модели, выражающей зависимость между факторами, экспериментальным данным.

15.2.3. Верификация построенной регрессионной модели

Одним из наиболее простых способов проверки качества полученной модели является нахождение средней ошибки аппроксимации.

Средняя ошибка аппроксимации – это среднее отклонение расчетных значений результирующей переменной регрессионного уравнения от фактически наблюдаемых значений зависимого фактора. Эту оценку можно получить в процентном выражении с помощью следующей формулы:

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y(x_i)}{y_i}\right| \cdot 100\%. \qquad (15.22)$$

Воспользуемся предложенной формулой, предварительно рассчитав все значения $y(x_i)$:

$y(x_1)$=88,684628–1,044131x_1=88,684628–1,044131·39,9=47,023043;
$y(x_2)$=88,684628–1,044131x_2=88,684628–1,044131·17,2=70,725248;
$y(x_3)$=88,684628–1,044131x_3=88,684628–1,044131·37,1=49,946663;
$y(x_4)$=88,684628–1,044131x_4=88,684628–1,044131·31,8=55,480658;
$y(x_5)$=88,684628–1,044131x_5=88,684628–1,044131·10,3=77,929883;
$y(x_6)$=88,684628–1,044131x_6=88,684628–1,044131·32,9=54,332093;
$y(x_7)$=88,684628–1,044131x_7=88,684628–1,044131·21,8=65,922158;
$y(x_8)$=88,684628–1,044131x_8=88,684628–1,044131·7,8=80,540258.

Таблица 15.3

№	y_i	x_i	y_i^2	$x_i y_i$	x_i^2	$y(x_i)$	y_i-$y(x_i)$	A_i
1	42,5	39,9	1806,25	1695,75	1592,01	47,023043	-4,523043	10,6424541%
2	81,2	17,2	6593,44	1396,64	295,84	70,725248	10,474752	12,8999409%
3	52,3	37,1	2735,29	1940,33	1376,41	49,946663	2,353337	4,4996883%
4	58,2	31,8	3387,24	1850,76	1011,24	55,480658	2,719342	4,6724089%
5	76,2	10,3	5806,44	784,86	106,09	77,929883	-1,729883	2,2701877%
6	48,8	32,9	2381,44	1605,52	1082,41	54,332093	-5,532093	11,3362561%
7	69,9	21,8	4886,01	1523,82	475,24	65,922158	3,977842	5,6907611%
8	72,8	7,8	5299,84	567,84	60,84	80,540258	-7,740258	10,6322225%
Σ	**501,9**	**198,8**	**32895,95**	**11365,52**	**6000,08**	**501,900004**		**62,6439%**
Ср. зн.	**62,7375**	**24,85**	**4111,99375**	**1420,69**	**750,01**	**62,737501**		**7,8305%**

Полученные значения регрессионной функции от значений фактора x_i занесем в соответственные строки столбца $y(x_i)$ нашей таблицы. Следующий столбец заполним разностями значений фактора y_i и регрессионной функции $y(x_i)$. Последний столбец расчетной таблицы будет содержать значения ошибки аппроксимирующий функции для каждого значения факторного признака. Среднее значение полученных ошибок регрессионной функции и является искомой оценкой. В таблице 15.3 показана полная расчетная таблица.

Таким образом, средняя ошибка аппроксимации для нашей регрессионной модели составила 7,8305%. На практике можно считать допустимым передел значений средней ошибки аппроксимации не более 8 – 10%. Значит, полученная парная линейная модель удовлетворяет данному критерию.

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. Тесноту связи изучаемых явлений для линейных моделей оценивает линейный коэффициент парной корреляции r_{xy}.

Линейное уравнение регрессии для нахождения теоретических значений модели имеет вид:

$$y(x) = a + bx\,. \tag{15.23}$$

Подставляя значение a из формулы (15.21) в уравнение регрессии (15.23), получим:

$$y(x) = \bar{y} - b\bar{x} + bx$$

или

$$y(x) - \bar{y} = b(x - \bar{x})\,. \tag{15.24}$$

Представим это уравнение в эквивалентном виде:

$$\frac{y(x) - y}{\sigma_y} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}\,. \tag{15.25}$$

В этом уравнении величина

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x\sigma_y}\,. \tag{15.26}$$

показывает, на сколько величин σ_y изменится в среднем *y*, если *x* увеличится на σ_x.

Найдем линейный коэффициент парной корреляции для нашего примера:

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1{,}044131 \cdot \frac{11{,}5104}{13{,}2664935} = 0{,}905919 .$$

Линейный коэффициент изменяется в пределах: $-1 \le r_{xy} \le 1$. Если коэффициент больше нуля, то это отражает прямую зависимость факторов, если меньше нуля, то зависимость факторов обратная.

Обычно в исследованиях связь изучаемых факторов считается высокой, если абсолютное значение r_{xy} близко к единице. Такая оценка является приемлемой для полученных линейных моделей. Рассчитанный линейный коэффициент парной корреляции показывает высокий уровень связи факторов *x* и *y*, что подтверждает приемлемость полученной математической модели.

Еще одной наиболее используемой оценкой значимости уравнения регрессии является *F*-критерий Фишера. Он состоит в проверке гипотезы H_0 о статистической незначимости уравнения построенной регрессионной модели и найденного показателя тесноты связи r_{xy}. Для этого выполняется сравнение фактического $F_{факт}$ и критического $F_{табл}$ значений *F*-критерия Фишера.

Расчетное значение $F_{факт}$ для парной регрессионной модели определяется из соотношений значений факторной и остаточной дисперсий, рассчитанных на одну степень свободы:

$$F_{факт} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2/(n-2)}, \qquad (15.27)$$

где *n* – количество значений исследуемых факторов, а *n-2* – число степеней свободы остаточной суммы квадратов при линейной регрессии.

С использованием линейного коэффициента корреляции формула принимает вид:

$$F_{факт} = \frac{r_{xy}^2(n-2)}{1-r_{xy}^2}. \qquad (15.28)$$

Таблица 15.4

Критические значения *F*-критерия Фишера при уровне значимости α=0,05

	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Найдем расчетное значение критерия $F_{факт}$:

$$F_{факт} = \frac{r_{xy}^2(n-2)}{1-r_{xy}^2} = \frac{0{,}905919^2(8-2)}{1-0{,}905919^2} = \frac{0{,}820689 \cdot 6}{0{,}179311} = 27{,}46146.$$

Критическое значение F-критерия Фишера $F_{табл}$ – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α, то есть вероятности отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно в таблицах критических значений F-критерия Фишера уровень значимости α принимается равным 0,05, реже – 0,01.

Значение $F_{табл}$ возьмем из ячейки первого столбца (по количеству объясняющих переменны) и шестой (по числу степеней свободы) строки таблицы 2.4 критических значений F-критерия Фишера при уровне значимости α=0,05. В нашем случае критическое значение $F_{табл}$ равно 5,99.

Если расчетное значение $F_{факт}$ больше критического значения $F_{табл}$, то H_0 – гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. В противном случае гипотеза H_0 не отвергается и признается статистическая незначимость и ненадежность модели.

Поскольку расчетное значение $F_{факт}$=27,4646 больше критического $F_{табл}$=5,99, то этот факт указывает на необходимость отклонить гипотезу H_0 о случайной природе оцениваемых характеристик выявленной зависимости исследуемых факторов и признать статистическую значимость и надежность построенной парной линейной регрессионной модели.

Если между явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью нелинейных функций.

15.3. Нелинейные модели парной регрессии

15.3.1. Расчет параметров степенной модели

Рассмотрим *степенную модель* для приведенных выше значений двух социально-криминологических признаков из таблицы 15.1

$$y = ax^b . \qquad (15.29)$$

Сведем данную модель к линейной регрессии с ее методами оценивания параметров. Для этого произведем логарифмирование обеих частей указанного уравнения (1.30):

$$\lg y = \lg(ax^b) .$$

Используя основные свойства логарифмов, получим:

$$\lg y = \lg a + b \lg x \qquad (15.30)$$

Произведя соответствующие замены

$$Y = \lg y , \; A = \lg a , B = b , \; X = \lg x , \qquad (15.31)$$

получим новое линейное регрессионное уравнение

$$Y = A + BX . \qquad (15.32)$$

Находим линейные параметры A и B, как и в предыдущей модели, используя замены (15.32). Для этого строим расчетную таблицу 15.5.

Таблица 15.5

№	Y_i	X_i	Y_i^2	$X_i Y_i$	X_i^2
1	1,628389	1,600973	2,651651	2,607007	2,563114
2	1,909556	1,235528	3,646404	2,359311	1,526531
3	1,718502	1,569374	2,953248	2,696972	2,462934
4	1,764923	1,502427	3,114953	2,651668	2,257287
5	1,881955	1,012837	3,541755	1,906114	1,025839
6	1,688420	1,517196	2,850761	2,561664	2,301883
7	1,844477	1,338456	3,402096	2,468752	1,791466
8	1,862131	0,892095	3,467533	1,661197	0,795833
Σ	**14,298353**	**10,668887**	**25,628401**	**18,912685**	**14,724887**
Ср.знач.	**1,787294**	**1,333611**	**3,20355**	**2,364086**	**1,840611**

Из данных таблицы получим:

σ^2_X=1,840611– ,778518=0,062093;

σ^2_Y=3,20355–3,19442=0,00913.

Тогда значения средних квадратичных отклонений равны:

σ_X=0,249184; σ_Y=0,095552.

Рассчитаем выборочную ковариацию:

$Cov(X,Y)$=2,364086–1,787294·1,333611=–0,019469.

Тогда выборочный коэффициент регрессии B будет равен:

$$B = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma^2{}_X} = \frac{-0{,}019469}{0{,}062093} = -0{,}313546\,.$$

Коэффициент A линейного регрессионного уравнения получим, подставляя в уравнение (2.21) средние значения факторов X и Y:

A=1,787294–0,313546·1,333611=2,205442.

Линейное уравнение $Y = A + BX$ будет выглядеть следующим образом:

Y=2,205442–0,313546 X.

Вернемся к степенной модели $y = ax^b$, выполнив потенцирование уравнения $Y = A + BX$. В этом случае

a=10^A=$10^{2,205442}$=160,487791,

b=B=0,313546.

тогда искомое уравнение парной регрессии для степенной модели имеет вид:

$$y = 160{,}487791\ x^{0{,}313546}.$$

Оценим качество построенной модели с помощью средней ошибки аппроксимации. Для этого построим вспомогательную таблицу 15.6.

Таблица 15.6

№	y_i	x_i	$y(x_i)$	y_i-$y(x_i)$	A_i
1	42,5	39,9	50,520001	-8,020001	18,870591%
2	81,2	17,2	65,772901	15,427099	18,998890%
3	52,3	37,1	51,685782	0,614218	1,174413%
4	58,2	31,8	54,245284	3,954716	6,795045%
5	76,2	10,3	77,2451	-1,045100	1,371522%
6	48,8	32,9	53,669963	-4,869963	9,979432%
7	69,9	21,8	61,062463	8,837537	12,643114%
8	72,8	7,8	84,280927	-11,480927	15,770504%
Σ	**501,9**	**198,8**	**498,482421**		**85,603500%**
Ср. знач.	**62,7375**	**24,85**	**62,310303**		**10,700400%**

Согласно формуле (15.22)

$$\overline{A} = \frac{85{,}603500\%}{8} = 10{,}7004\% .$$

Так как средняя ошибка аппроксимации превышает 10%, то данная модель считается непригодной для дальнейшего исследования. Поэтому оценивать модель другими критериями нет смысла.

15.3.2. Показательная регрессионная модель

Рассмотрим *показательную модель* для данных таблицы 2.1

$$y = ab^x . \qquad (15.33)$$

Сведем данную модель к линейной регрессии. Для этого произведем логарифмирование обеих частей указанного уравнения (15.34):

$$\lg y = \lg(ab^x) .$$

Используя основные свойства логарифмов получим:

$$\lg y = \lg a + x \lg b \qquad (15.34)$$

Произведя соответствующие замены

$$Y = \lg y ,\ A = \lg a ,\ B = \lg b ,\ X = x , \qquad (15.35)$$

получим новое линейное регрессионное уравнение

$$Y = A + BX . \qquad (15.36)$$

Таблица 15.7

№	Y_i	X_i	Y_i^2	$X_i Y_i$	X_i^2
1	1,628389	39,9	2,651651	64,972718	1592,01
2	1,909556	17,2	3,646404	32,844364	295,84
3	1,718502	37,1	2,953248	63,756413	1376,41
4	1,764923	31,8	3,114953	56,124551	1011,24
5	1,881955	10,3	3,541755	19,384136	106,09
6	1,688420	32,9	2,850761	55,549012	1082,41
7	1,844477	21,8	3,402096	40,209602	475,24
8	1,862131	7,8	3,467533	14,524625	60,84
Σ	**14,298353**	**198,8**	**25,628401**	**347,365421**	**6000,08**
Ср. знач.	**1,787294**	**24,85**	**3,20355**	**43,420678**	**750,01**

Найдем линейные параметры A и B, как и в линейной модели, используя замены (15.36). Для этого строим расчетную таблицу 15.7.

Из данных таблицы получим:

σ^2_X=750,01–617,5225=132,4875;

σ^2_Y=3,20355–3,19442=0,00913.

Тогда значения средних квадратичных отклонений равны:

σ_X=11,510321;σ_Y=0,095552.

Рассчитаем выборочную ковариацию:

Cov(X,Y)=43,420678–1,787294·24,85=–0,993578.

Тогда выборочный коэффициент регрессии B будет равен:

$$B = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma^2{}_X} = \frac{-0{,}993578}{132{,}4875} = -0{,}007499\,.$$

Коэффициент A линейного регрессионного уравнения получим, подставляя в уравнение (2.21) средние значения факторов X и Y:

A = 1,787294 + 0,007499·24,85 = 1,973644.

Таким образом, линейное уравнение $Y = A + BX$ будет выглядеть следующим образом:

$$Y = 1{,}973644 - 0{,}007499\,\boldsymbol{X}.$$

Вернемся к показательной модели $y = ab^x$, выполнив потенцирование уравнения $Y = A + BX$. В этом случае

$a = 10^{A} = 10^{1{,}973644} = 94{,}111783,$

$b = 10^{B} = 10^{-0{,}007499} = 0{,}982881,$

тогда искомое уравнение парной регрессии для показательной модели имеет вид:

$$y = 94{,}111783 \cdot 0{,}982881^x\,.$$

Оценим качество построенной модели с помощью средней ошибки аппроксимации. Для этого построим вспомогательную таблицу 15.8.

Таблица 15.8

№	y_i	x_i	$y(x_i)$	$y_i-y(x_i)$	A_i	$(y_i - y(x_i))^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	42,5	39,9	47,25323	-4,753230	11,184071%	22,593195	409,556406
2	81,2	17,2	69,929459	11,270541	13,879977%	127,025094	340,863906
3	52,3	37,1	49,593969	2,706031	5,174055%	7,322604	108,941406
4	58,2	31,8	54,346789	3,853211	6,620637%	14,847235	20,588906
5	76,2	10,3	78,77777	-2,577770	3,382900%	6,644898	181,238906
6	48,8	32,9	53,32427	-4,524270	9,271045%	20,469019	194,253906
7	69,9	21,8	64,589882	5,310118	7,596735%	28,197353	51,301406
8	72,8	7,8	82,252921	-9,452921	12,984782%	89,357715	101,253906
Σ	**501,9**	**198,8**	**500,068290**		**70,094200%**	**316,457114**	**1407,998750**
Ср. знач.	**62,7375**	**24,85**	**62,508536**		**8,761800%**		

Согласно формуле (15.22)

$$\bar{A} = \frac{70{,}0942\%}{8} = 8{,}7618\%.$$

Так как средняя ошибка аппроксимации не превышает 10%, то данная модель считается пригодной для дальнейшего исследования.

Тесноту связи наблюдаемых факторов для нелинейных моделей оценивает индекс парной корреляции ρ_{xy}. Он находится по формуле:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}. \qquad (15.37)$$

Найдем индекс парной корреляции для нашего примера:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{316{,}457114}{1407{,}99875}} = \sqrt{0{,}775243} = 0{,}880479.$$

Индекс парной корреляции изменяется в пределах:

$$0 \le \rho_{xy} \le 1.$$

Обычно в исследованиях связь изучаемых факторов считается высокой, если значение ρ_{xy} близко к единице. Такая оценка является приемлемой для всех нелинейных моделей.

Рассчитанный индекс парной корреляции показывает высокий уровень связи факторов x и y, что подтверждает приемлемость полученной математической модели.

Расчетное значение $F_{факт}$ критерия Фишера найдем аналогично формуле (2.28) для линейных моделей:

$$F_{факт} = \frac{\rho_{xy}^2 (n-2)}{1-\rho_{xy}^2} = \frac{0{,}775243(8-2)}{1-0{,}775243} = 20{,}695537 .$$

В нашем случае критическое значение $F_{табл}$ равно 5,99 (табл. 15.4).

Поскольку расчетное значение $F_{факт}$=20,695537 больше критического $F_{табл}$=5,99, то этот факт указывает на необходимость отклонить гипотезу H_0 о случайной природе оцениваемых характеристик выявленной зависимости исследуемых факторов и признать статистическую значимость и надежность построенной показательной регрессионной модели.

15.3.3. Гиперболическая модель парной регрессии

Рассмотрим *гиперболическую модель* для факторов, представленных в таблице 2.1.

$$y = a + \frac{b}{x} . \qquad (15.38)$$

Сведем данную модель к линейной регрессии с ее методами оценивания параметров. Для этого произведем следующие замены:

$$Y = y ,\ A = a , B = b ,\ X = \frac{1}{x} . \qquad (15.39)$$

Получим новое линейное регрессионное уравнение

$$Y = A + BX . \qquad (15.40)$$

Найдем линейные параметры A и B, как и в предыдущей модели, используя замены (15.40). Для этого строим расчетную таблицу:

Таблица 15.9

№	Y_i	X_i	Y_i^2	$X_i Y_i$	X_i^2
1	42,5	0,025063	1806,25	1,065163	0,000628
2	81,2	0,058140	6593,44	4,720930	0,003380
3	52,3	0,026954	2735,29	1,409704	0,000727

4	58,2	0,031447	3387,24	1,830189	0,000989
5	76,2	0,097087	5806,44	7,398058	0,009426
6	48,8	0,030395	2381,44	1,483283	0,000924
7	69,9	0,045872	4886,01	3,206422	0,002104
8	72,8	0,128205	5299,84	9,333333	0,016437
Σ	**501,9**	**0,443162**	**32895,95**	**30,447082**	**0,034614**
Ср. знач.	**62,7375**	**0,055395**	**4111,99375**	**3,805885**	**0,004327**

Из данных таблицы получим:

σ^2_X=0,004327–0,003069=0,001258;

σ^2_Y=4111,99375–3935,993906=175,999844.

Тогда значения средних квадратичных отклонений равны:

σ_X=0,035474; σ_Y=13,266493.

Вопросы для самоконтроля

1. Определите предмет и задачи корреляционного анализа. В каких исследованиях можно применить данный математический метод?
2. Сформулируйте понятия корреляционной зависимости и регрессии между объясняемой и результирующими показателями.
3. Дайте определение парной регрессии. Каким образом осуществляется выбор математической модели парной регрессии?
4. Перечислите этапы регрессионного исследования. Обоснуйте порядок выполнения данных этапов.
5. Какие вы знаете способы оценки параметров регрессии?
6. Какие наиболее часто используемые критерии используются для верификации моделей парной линейной регрессии?
7. Что такое поле корреляционной зависимости?
8. В чем заключается принцип использования метода наименьших квадратов?
9. Продемонстрируйте алгоритм построения линейной модели парной регрессии.
10. Каким образом осуществляется оценка коэффициентов парной регрессии?
11. Какие методы верификации используются для нелинейных моделей?
12. В чем заключаются особенности построения и верификации степенной модели парной регрессии?

13. Каким образом строится показательная модель парной регрессии?

14. Как осуществляется построение гиперболической модели парной регрессии?

15. Каким образом осуществляется оценка коэффициентов нелинейной парной регрессии?

16. Каковы особенности верификации нелинейных парных регрессионных моделей?

17. Расскажите о методах использования средней ошибки аппроксимации, индекса корреляции и F-критерия Фишера для верификации нелинейных регрессионных моделей.

Заключение

Математика играет важнейшую роль в фундаментальных и прикладных исследованиях любого направления, как универсальный инструмент для обработки большого объема количественных результатов опытов и наблюдений, теоретических расчетов значений предполагаемых результатов и параметров, автоматизации вычислений параметров сложных многофакторных процессов.

В нашем издании мы рассмотрели основные элементарные понятия, определения, формулы, методы и алгоритмы линейной алгебры, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики.

В учебнике мы рассмотрели основные классы числовых множеств, определили формы представления, операции и свойства для элементов этих множеств, применили основные положения матричной алгебры, алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, методы векторной алгебры. Средствами математического анализа мы исследовали различные функциональные зависимости одной и нескольких переменных, решали прикладные задачи с использованием неопределенных, определенных, несобственных и кратных интегралов. Изучили комбинаторные конфигурации с повторениями и без повторений, определили вероятности наступления различных событий при однократных и повторных испытаниях, познакомились с дискретными и непрерывными случайными величинами. Методами математической статистики изучали, систематизировали и обрабатывали количественные показатели результатов наблюдений массовых случайных событий для выявления существующих закономерностей, построения математических моделей и прогнозирования.

Методы и алгоритмы, представленные в учебнике, в дальнейшем будут использованы, как универсальный инструмент, в математических, естественнонаучных, информационно-технических, социально-экономических и других дисциплинах и научных исследованиях. Это малая, но необходимая часть математических знаний для дальнейшего освоения профессиональных

знаний, освоения компетенций, использования математических методов в будущей профессиональной деятельности.

Автор учебника благодарен коллективу кафедры информатики и математики Краснодарского университета МВД России, а также рецензентам учебника за творческую помощь и активную поддержку.

Литература

1. Бубнова, О. Ю. Математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб.-метод. пособие / О.Ю. Бубнова, Т.Е. Чикина, С.В. Крыгин. // Труды сотрудников Нижегородской академии МВД России. – Н. Новгород : Нижегородская академия МВД России, 2017. – 86 с.

2. Горошко, И. В. Математические методы исследования социальных систем: курс лекций / И. В. Горошко, Б. А. Торопов, Ш. Х. Гонов. – М.: Академия управления МВД России, 2019. – 80 с.

3. Думачев, В. Н. Математика. Дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление: учеб. / В. Н. Думачев, С. А. Телкова. – Электрон. текстовые дан. – Текст: электронный // Труды сотрудников Воронежского института МВД России. – Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2015.

4. Михайленко, Е. В. Автоматизация обработки табличных данных для сбора и анализа социально–экономических показателей сотрудниками подразделений ОВД: учеб. пособие / Е. В. Михайленко, А. А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 148 с.

5. Михайленко, Е. В. Введение в высшую математику: лекция / Е.В. Михайленко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2008. – 30 с.

6. Михайленко, Е. В. Введение в общую алгебру : учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 400 с.

7. Михайленко, Е. В. Дискретная математика: учеб. пособие / Е. В. Михайленко, А. А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2016. – 104 с.

8. Михайленко, Е. В. Дискретная математика: учеб. пособие / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2016. – 104 с.

9. Михайленко, Е. В. Комбинаторный анализ: лекция / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России,

2015. – 26 с.

10. Михайленко, Е. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. пособие / Е. В. Михайленко, М. А. Жукова. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2010. – 163 с.

11. Михайленко, Е. В. Математика : учебник / Е. В. Михайленко. - Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2023. - 478 с.

12. Михайленко, Е. В. Математика и информатика : курс лекций / Е.В. Михайленко, И.Н. Старостенко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2009. – 420 с.

13. Михайленко, Е. В. Математика: курс лекций. Ч. 1. Элементы общей алгебры / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2019. – 120 с.

14. Михайленко, Е. В. Математика: курс лекций. Ч. 2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2021. – 98 с.

15. Михайленко, Е. В. Математика: курс лекций. Ч. 3. Математический анализ / Е. В. Михайленко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2020. – 90 с.

16. Михайленко, Е. В. Методы оптимизации : сборник задач / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2015. – 140 с.

17. Михайленко, Е. В. Прикладная математика: курс лекций / Е.В. Михайленко, А.А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2014. – 192 с.

18. Михайленко, Е. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Е. В. Михайленко, М. А. Жукова, Ф. Ф. Бараненко. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2011. – 142 с.

19. Михайленко, Е. В. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / Е.В. Михайленко, М.А. Жукова, Ф.Ф. Бараненко. – Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2011.

20. Путилов, А. О. Дискретная математика: логика, теория множеств и комбинаторика : учебное пособие / А. О. Путилов, Э.Р Зарипова. - Электрон. текстовые дан. - Текст : электронный // Труды сотрудников Московского университета МВД России им. В.Я. Кикотя : сб. трудов. - М. : МосУ МВД России им. В.Я. Кикотя, 2022..

21. Путилов, А. О. Интегральное исчисление: учеб. пособие / А. О. Путилов. – Электрон. текстовые дан. – Текст: электронный // Труды сотрудников Московского университета МВД России им. В.Я. Кикотя. – М.: МосУ МВД России им. В.Я. Кикотя, 2015. – http://ebs.libkrumvd.ru/elib/1168/, требуется авторизация.

22. Сандрюкова, Е. А. Математика. Элементы аналитической геометрии : учеб. пособие / Е. А. Сандрюкова. – Электрон. текстовые дан. – Текст: электронный // Труды сотрудников Московского университета МВД России им. В.Я. Кикотя. – М.: МосУ МВД России им. В.Я. Кикотя, 2016.

23. Старостенко, И. Н. Прикладная математика : учебник / И. Н. Старостенко, Е. В. Михайленко, А. А. Хромых. - Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2023. - 346 с.

24. Старостенко, И. Н. Элементы статистической обработки данных: учеб. пособие / И. Н. Старостенко, А. А. Хромых. – Краснодар: Краснодарский университет МВД России, 2020. – 74 с.

25. Старостенко, И.Н. Высшая математика для экономистов. Элементы линейной алгебры : учеб.–практич. пособие / И. Н. Старостенко. - Краснодар : Краснодарский университет МВД России, 2021. - 76 с.

Учебное издание

Михайленко Евгений Владимирович

МАТЕМАТИКА

(для подготовки специалистов подразделений тылового обеспечения органов внутренних дел)

Учебник

В авторской редакции

ISBN 978-5-9266-2242-0



Подписано в печать 27.02.2026. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 26,0. Тираж 100 экз. Заказ 420.

Краснодарский университет МВД России.
350005, г. Краснодар, ул. Ярославская, 128.