

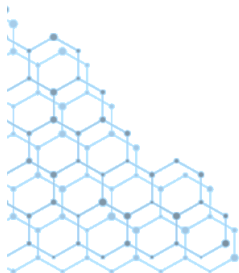
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство внутренних дел Российской Федерации

Московский университет Министерства внутренних дел
Российской Федерации имени В.Я. Кикотя



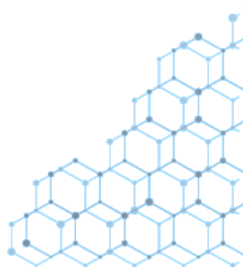
СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Учебное пособие



Москва
Московский университет
МВД России имени В.Я. Кикотя

2025



УДК 519.2
ББК 22.172
С78

Рецензенты:

доцент кафедры информационных технологий Академии управления
МВД России кандидат юридических наук **В. В. Баранов**; доцент кафедры
информационно-компьютерных технологий в деятельности органов
внутренних дел Белгородского юридического института МВД России
имени И.Д. Путилина кандидат технических наук **Е. Г. Ковалева**

Авторский коллектив:

Н. В. Задохина, Н. М. Дубинина, А. А. Страхов, В. В. Бубнов

Статистические методы в психолого-педагогических исследованиях : учебное пособие / [Н. В. Задохина и др.]. – М. : Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя, 2025. – 70 с.
ISBN 978-5-9694-1621-5

Настоящее учебное пособие нацелено на повышение качества освоения обучающимися методов статистического доказательства эффективности педагогических и психологических методик и программ, а также технологии обработки статистических данных посредством электронных таблиц.

Издание подготовлено в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования и предназначено для курсантов, слушателей, адъюнктов и преподавателей образовательных организаций МВД России, а также для всех, сталкивающихся с необходимостью статистической обработки результатов психолого-педагогических исследований.

УДК 519.2
ББК 22.172

ISBN 978-5-9694-1621-5

© Московский университет
МВД России имени В.Я. Кикотя, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Основы статистической обработки данных	5
§ 1.1. Эксперимент в психолого-педагогических исследованиях	5
§ 1.2. Шкалы измерений	8
§ 1.3. Выборочный метод	13
§ 1.4. Описательная статистика	18
Глава 2. Статистическая проверка статистических гипотез	26
§ 2.1. Этапы проверки статистических гипотез	26
§ 2.2. Параметрические критерии различий	28
§ 2.3. Непараметрические критерии различий	41
§ 2.4. Многофункциональный критерий Фишера – F	48
Глава 3. Анализ статистических зависимостей	50
§ 3.1. Понятие корреляционной связи	50
§ 3.2. Коэффициент корреляции Пирсона	54
§ 3.3. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена	58
Библиографический список	61
Приложение 1	63
Приложение 2	64
Приложение 3	65
Приложение 4	66
Приложение 5	68

ВВЕДЕНИЕ

Внедрение статистических методов в различные области научного познания обусловлено тем, что они располагают понятийным аппаратом, который по своей широте и универсальности приближается к философскому, отражая общие закономерности качественно различных явлений и процессов¹.

Необходимость применения данных методов в психолого-педагогических исследованиях продиктована их качеством не только отражать количественные характеристики анализируемых объектов и явлений, определять степень влияния на них различных факторов, но и оценивать эффективность педагогических и психологических методик и программ.

В связи с этим основной целью настоящего пособия является доступное изложение алгоритмов применения методов математической статистики для решения типовых задач анализа данных в психолого-педагогических исследованиях. Более полное представление о статистических методах можно получить, ознакомившись с перечисленной в библиографическом списке литературой, содержащей как обширный теоретический материал, так и анализ решений разнообразных задач прикладного характера.

Кроме того, реализация статистических методов непосредственно связана с процессом использования современных информационных технологий, в частности с технологией обработки данных посредством электронных таблиц. Именно такой синтез лежит в основе решения прикладных задач психолого-педагогической сферы.

¹ Задохина Н. В. Статистические методы в деятельности эксперта-криминалиста // Образование. Наука. Научные кадры. 2020. № 3. С. 195.

ГЛАВА 1

Основы статистической обработки данных

§ 1.1. Эксперимент

в психолого-педагогических исследованиях

Эксперимент (от лат. *experimentum* – «опыт») – осуществление некоторого комплекса условий, в результате которого происходят или не происходят определенные события (факты).

Эксперимент, обычно являющийся составной частью любого научного исследования в области педагогики или психологии, служит эмпирическим обоснованием для принятия или отклонения гипотезы, выдвинутой исследователем.

Проанализируем модель психолого-педагогического эксперимента. Пусть посредством эксперимента требуется исследовать изменение выраженности наблюдаемого признака некоторого объекта. Признак – свойство, характерная черта или иная особенность объекта. Объектом же может служить, например, один или группа обучающихся, а признаком – например, стратегия поведения в конфликте (качественный признак) или скорость чтения (количественный признак). В отличие от количественных, качественные признаки не выражаются числовыми значениями.

Эксперимент можно рассматривать как целенаправленное воздействие на объект, т. е. как реализацию комплекса мер, призванную изменить объект соответствующим образом. Таким воздействием могут служить, например, новые формы и методы обучения и др.

Вместе с тем при проведении эксперимента возникает необходимость доказать, что именно данный комплекс мер (далее – экспериментальная методика) вызвал изменения исследуемого объекта в требуемую сторону¹.

Рассмотрим, например, в качестве исследуемого признака успеваемость. Тогда утверждение о том, что применение экспериментальной методики повысило успеваемость обучающихся не является бесспорным, так как она могла повыситься и по другим причинам (иные воздействия или взросление обучающихся). Кроме того, утверждение, что успеваемость обучающихся по экспериментальной методике выше, чем успеваемость обучающихся по традиционной методике, также требует доказательств, ведь, возможно, успеваемость первых была однозначно выше (до применения экспериментальной методики).

Таким образом, для того чтобы выделить в явном виде результат целенаправленного воздействия на исследуемый объект, необходимо взять аналогичный объект и посмотреть, что происходит с ним в отсутствие воздействий².

В психолого-педагогических исследованиях объект, который подвергается воздействию экспериментальной методики, принято называть *экспериментальной группой* (далее – ЭГ), а объект, на который не осуществляется воздействие экспериментальной методики (реализуется традиционная методика) – *контрольной группой* (далее – КГ).

Ниже (рис. 1.1) представлена в общем виде модель психолого-педагогического эксперимента³.

¹ Задохина Н. В. Эксперимент в психолого-педагогических исследованиях // Образование. Наука. Научные кадры. 2024. № 4. С. 275.

² Новиков Д. А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типичные случаи). М. : МЗ-Пресс, 2004. С. 10–11.

³ Задохина Н. В. Эксперимент в психолого-педагогических исследованиях. С. 276.



Рис. 1.1. Модель психолого-педагогического эксперимента

Согласно данной модели, опишем алгоритм действий исследователя:

- 1) установить отсутствие статистически значимых различий по исследуемому признаку у ЭГ и КГ до реализации экспериментальной методики;
- 2) осуществить целенаправленное воздействие на ЭГ (реализовать экспериментальную методику);
- 3) установить статистически значимые различия по исследуемому признаку у ЭГ и КГ после реализации экспериментальной методики.

Следует заметить, что обосновать статистически значимые различия (или совпадения) по исследуемому признаку у ЭГ и КГ можно только посредством методов математической статистики, которые будут рассмотрены далее.

Однако для корректного применения статистических методов необходимо прежде всего разобраться с вопросом, каким же образом можно измерить исследуемый признак¹.

¹ Задохина Н. В. Эксперимент в психолого-педагогических исследованиях. С. 276.

§ 1.2. Шкалы измерений

Измерение – это процесс нахождения числового значения физической величины. Физическая величина – характеристика одного из свойств физического объекта (системы, явления или процесса).

Различают истинное и измеренное значения физической величины:

1. *Истинное значение* – значение, которое идеально отражает в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство объекта. Истинное значение физической величины может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений¹, оно лишь приближенно отражает свойство объекта.

2. *Измеренное значение* – значение, которое найдено экспериментально с помощью соответствующих средств и методов измерения. Например, длину гильзы измеряют штангенциркулем, а температуру воздуха – термометром. Кроме того, каждый вид измерения оперирует определенными единицами измерения (метры, градусы и т. п.).

Однако измерения, связанные с исследованиями в области психологии или педагогики, часто не имеют собственных единиц (например, психологические свойства личности).

Поэтому будет вполне справедливым утверждение С. Стивенса о том, что измерение в психолого-педагогических исследованиях следует рассматривать как приписывание числовых значений объектам или событиям в соответствии с определенными правилами².

При определении значений признака в психолого-педагогических исследованиях используются специальные измерительные

¹ Левин С. Ф. Философские проблемы и статистические методы фундаментальной метрологии // Метафизика. 2012. № 3 (5). С. 93–94.

² Кричевец А. Н., Корнеев А. А., Рассказова Е. И. Математическая статистика для психологов : учебник. М. : Академия, 2012. С. 8.

шкалы. С. Стивенс предложил выделить следующие измерительные шкалы (шкалы состоят из одних и тех же чисел, но различаются по набору операций, которые с ними можно производить):

- 1) номинативную;
- 2) порядковую;
- 3) интервальную;
- 4) равных отношений.

Рассмотрим каждую шкалу подробно.

Номинативная шкала (от лат. *potep* – «название, наименование») позволяет проводить классификацию по названиям (наименованиям), отличающим один объект от другого (номинативную шкалу называют также номинальной или шкалой наименований). Пункты (категории) номинативной шкалы, соответствующие названиям каждого класса, обозначаются, как правило, вербально и их нельзя ранжировать, т. е. располагать в порядке возрастания или убывания. Кроме того, нельзя определить более (или менее) значимый пункт¹.

Простейшей номинативной шкалой является дихотомическая шкала, состоящая из двух пунктов – альтернатив: «ложь – истина»; «аттестованный – неаттестованный»; «поразил цель – промахнулся» и т. п. Признак, измеряемый по данной шкале, называется альтернативным.

Более сложной номинативной шкалой является шкала, состоящая из трех и более пунктов. Например, при исследовании темперамента можно выделить четыре пункта на шкале наименований: сангвиник, холерик; флегматик; меланхолик, а при исследовании поведения людей в конфликтной ситуации – пять пунктов на шкале наименований, которые соответствуют пяти стратегиям, предложенным К. Томасом:

¹ Задохина Н. В. Эксперимент в психолого-педагогических исследованиях. С. 276.

- 1) соперничество;
- 2) сотрудничество;
- 3) компромисс;
- 4) избегание;
- 5) приспособление.

Номинативная шкала используется для представления качественных признаков. Никаких операций, кроме проверки тождества или различия, она не предусматривает. Однако классификация объектов по названиям дает возможность перейти к числовым значениям, если подсчитать, какое количество объектов принадлежит тому или иному классу.

Например, в некотором подразделении поведение в конфликтной ситуации по типу «соперничество» выявлено у 7 сотрудников, по типу «сотрудничество» – у 11 сотрудников, а по типу «избегание» – у 5 сотрудников.

Таким образом, с помощью номинативной шкалы можно подсчитать частоту встречаемости разных наименований признака, а затем работать с этими частотами с помощью статистических методов.

Порядковая (ранговая) шкала позволяет проводить классификацию объектов по степени выраженности признака. Пункты (категории) порядковой шкалы, которых должно быть не менее трех, образуют последовательность от «самого малого» значения до «самого большого» и их можно ранжировать, т. е. располагать в порядке возрастания или убывания. Однако истинное расстояние между пунктами неизвестно, хотя можно определить более (или менее) значимый пункт¹.

Например, оценки обучающихся по предмету «Математика» образуют порядковую шкалу: «2», «3», «4», «5». Анализируя ее, можно с уверенностью утверждать, что обучающийся, получивший оценку

¹ Задохина Н. В. Эксперимент в психолого-педагогических исследованиях. С. 277.

«4», знает данный предмет лучше, чем обучающийся, получивший оценку «3», однако нельзя утверждать, что различия знаний у обучающихся, получивших оценки «4» и «3», такое же, как и у обучающихся, получивших оценки «3» и «2».

Все психолого-педагогические методики, использующие ранжирование, построены на применении шкалы порядка.

Шкала интервалов позволяет проводить классификацию по принципу «больше на определенное количество единиц» – «меньше на определенное количество единиц», т. е. каждое из возможных значений признака отстоит от соседнего на равном расстоянии. Расстояние – величина фиксированная и постоянная на всех участках шкалы.

На шкале интервалов произвольно устанавливается начало отсчета. Например, температурная шкала по Цельсию является интервальной. Разность между температурами воздуха $+20^{\circ}\text{C}$ и $+10^{\circ}\text{C}$ такая же, как и между $+15^{\circ}\text{C}$ и $+5^{\circ}\text{C}$, но нельзя утверждать, что при температуре $+20^{\circ}\text{C}$ в два раза теплее, чем при температуре $+10^{\circ}\text{C}$, как и нельзя утверждать, что при температуре 0°C тепло отсутствует, так как начало отсчета выбрано произвольно¹.

Вместе с тем следует заметить, что большинство измерений в психолого-педагогических исследованиях – порядковые. Однако, согласно определенной договоренности, шкалы некоторых классических (стандартизированных) методик можно рассматривать как интервальные. Например, интервальной является шкала коэффициентов интеллекта IQ. Как было указано выше, можно утверждать, что разница между $\text{IQ} = 110$ и $\text{IQ} = 100$ такая же, как и между $\text{IQ} = 100$ и $\text{IQ} = 90$, но, нельзя утверждать, что человек с $\text{IQ} = 120$ в два раза более интеллектуально развит, чем человек с $\text{IQ} = 60$.

¹ Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. М. : Оникс ; Мир и Образование, 2008. С. 25.

Шкала отношений позволяет проводить классификацию объектов пропорционально степени выраженности измеряемого признака. На ней устанавливается четко фиксированное начало отсчета, т. е. абсолютный ноль, означающий полное отсутствие некоторого признака.

Шкалы отношений в основном применяются при проведении физических (масса, длина и др.), физиологических (пульс и др.) или антропологических измерений (рост, вес и др.). Например, справедливо утверждать, что человек с весом 100 кг в два раза тяжелее человека с весом 50 кг.

В психолого-педагогических же измерениях часто невозможно указать «естественное» начало отсчета.

Статистические методы для обработки данных, представленных в шкале отношений, можно применять без каких-либо ограничений¹.

Подводя итог вышесказанному, заметим, что рассмотренные шкалы образуют иерархию, т. е. каждая последующая шкала включает свойства предыдущих. Упрощенно различия между шкалами можно представить следующим образом:

1. Номинативная шкала позволяет утверждать, что некоторый объект отличается от другого объекта (Это чай. Это кофе).
2. Порядковая шкала позволяет утверждать, что некоторый объект превосходит в чем-то другой объект (Кофе дороже чая).
3. Интервальная шкала позволяет утверждать, что некоторый объект на сколько-то единиц превосходит в чем-то другой объект (Кофе дороже чая на 100 р.).
4. Шкала отношений позволяет утверждать, что некоторый объект в какое-то количество раз превосходит в чем-то другой объект (Кофе дороже чая в три раза).

¹ Задохина Н. В. Эксперимент в психолого-педагогических исследованиях. С. 277.

§ 1.3. Выборочный метод

В психолого-педагогических исследованиях экспериментальному воздействию обычно подвергают выборку объектов (людей), называемых испытуемыми или респондентами, сформированную из большей по численности группы объектов, называемой генеральной совокупностью.

Генеральная совокупность – множество, включающее все однородные объекты, которым присущи (или не присущи) определенные количественные и (или) качественные признаки.

Однако полное (сплошное) обследование генеральной совокупности часто бывает не экономичным или попросту невозможным, поэтому из генеральной совокупности делают выборку, т. е. исследуют только некоторые объекты.

Например, при проверке остаточных знаний в образовательных организациях проводят не сплошную проверку, а выборочную, т. е. тестируют только часть обучающихся, отобранных случайным образом.

Выборочная совокупность (выборка) – совокупность случайно отобранных из генеральной совокупности объектов.

Объем выборки (количество респондентов) обычно обозначается буквой n , причем $n \geq 2$. Объем генеральной совокупности, который может быть сколь угодно большим (зависит от проводимого исследования), обозначается буквой N , $N > n$.

Выборочный метод является основным в экспериментальной работе психолога (педагога) при исследовании генеральной совокупности¹.

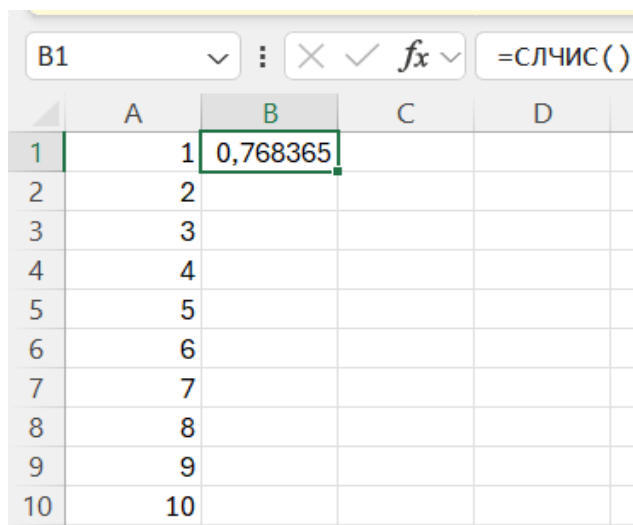
Для того чтобы по объектам выборки можно было достаточно уверенно судить об объектах генеральной совокупности (т. е. можно было

¹ Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов : учебник. М. : Московский психолого-социальный институт ; Флинта, 2004. С. 30.

бы обобщить выводы, полученные по выборке, на всю генеральную совокупность), необходимо, чтобы выборка была *репрезентативной*. Такой она станет, если: каждый объект отобран случайно из генеральной совокупности; все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. Подобная выборка называется *простой случайной выборкой*.

Сформировать ее можно, например, посредством функции СЛЧИС табличного процессора Excel. Данная функция не требует аргумента и возвращает случайное вещественное число, которое больше или равно 0 и меньше 1.

Построим выборку объемом $n = 5$ из генеральной совокупности объемом $N = 10$. В столбец А, в ячейки А1:А10, введем числа от 1 до 10, которые нумеруют объекты генеральной совокупности, а в ячейку В1 введем формулу = СЛЧИС (), скопировав ее (с помощью маркера автозаполнения) в ячейки В2:В10 (рис. 1.2).



	A	B	C	D
1	1	0,768365		
2	2			
3	3			
4	4			
5	5			
6	6			
7	7			
8	8			
9	9			
10	10			

Рис. 1.2. Формирование столбца случайных чисел

Таким образом, получаем столбец случайных чисел¹, который сортируем, например, по возрастанию. Выделяем столбец случайных чисел и правой клавишей мыши вызываем контекстное меню. Выбираем вкладки «Сортировка» – «Сортировка по возрастанию» (рис. 1.3).

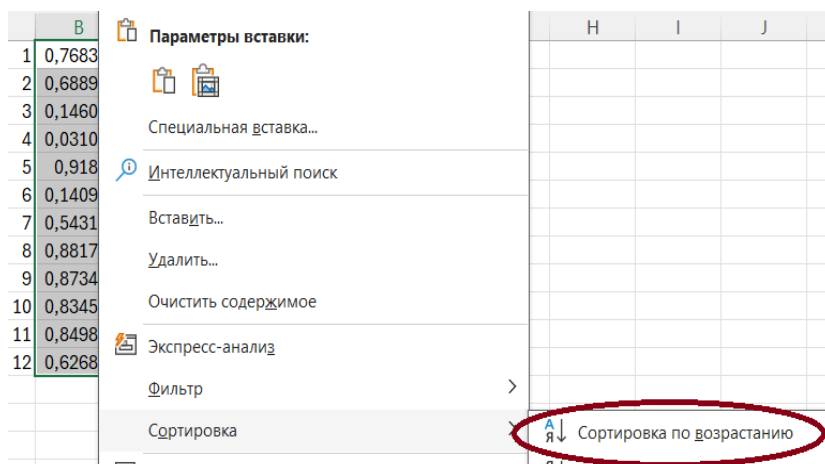


Рис. 1.3. Сортировка столбца случайных чисел

Поскольку данные ячеек A1:A10 не были выделены, то далее появляется соответствующее диалоговое окно (рис. 1.4) с предложением «автоматически расширить выделенный диапазон» (флажок установлен по умолчанию).

¹ При использовании функции СЛЧИС новое случайное число возвращается при каждом вычислении листа, поэтому удобнее скопировать результаты вычисления и вставить вместо них только значения.

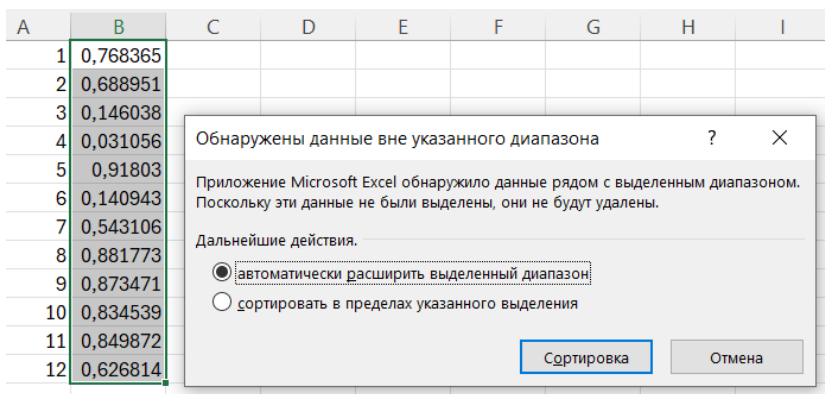


Рис. 1.4. Сортировка столбца случайных чисел и соответствующих номеров объектов генеральной совокупности

Нажимаем кнопку «Сортировка» и получаем отсортированный по возрастанию столбец случайных чисел (ячейки B1:B10) и упорядоченный случайным образом столбец с номерами объектов генеральной совокупности (ячейки A1:A10). Для получения простой случайной выборки берем первые пять номеров: 4, 6, 3, 7, 12 (рис. 1.5).

A	B
4	0,031056
6	0,140943
3	0,146038
7	0,543106
12	0,626814
2	0,688951
1	0,768365
10	0,834539
11	0,849872
9	0,873471
8	0,881773
5	0,91803

Рис. 1.5. Формирование простой случайной выборки

Кроме того, выборка будет репрезентативной, если: вся генеральная совокупность будет разбита на группы в соответствии с некоторыми характеристиками; объекты из каждой группы будут отобраны случайно; объекты каждой группы имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. Такая выборка называется *стратифицированной случайной выборкой*.

Например, при обследовании обучающихся некоторого высшего учебного заведения (далее – вуз) генеральная совокупность – все студенты данного вуза – может быть разбита на две группы: студенты, обучающиеся на бюджетной основе и студенты, обучающиеся на внебюджетной основе.

Следует заметить, что в статистических исследованиях различают также зависимые и независимые выборки.

Зависимыми считаются выборки, если случайным образом из генеральной совокупности были отобраны некие пары объектов (респондентов), из которых, в свою очередь, были сформированы две группы по принципу: брат–сестра; муж–жена и др. (т. е. один респондент в первой группе по какому-либо признаку сопоставляется с соответствующим респондентом во второй группе). Зависимыми считаются и те выборки, которые включают одного и того же респондента до и после эксперимента.

Независимыми считаются выборки, если случайным образом из генеральной совокупности было отобрано какое-либо количество объектов (респондентов), из которых, в свою очередь, случайно были сформированы две группы.

Однородность (отсутствие различия) выборок означает, что их объекты имеют схожие характеристики в соответствии с целями исследования (выборки взяты из одной и той же генеральной совокуп-

ности). Однородность выборок является значимым аспектом психолого-педагогических исследований, обеспечивающим достоверность получаемых результатов.

§ 1.4. Описательная статистика

Описательная статистика, занимающаяся систематизацией, наглядным представлением и количественным описанием статистических данных¹, позволяет сделать первичные предположения о генеральной совокупности, но в отличие от статистического вывода не обосновывает, что свойства и закономерности, выявленные при исследовании объектов выборки, также присущи генеральной совокупности.

Обычно данные, полученные во время статистического наблюдения (эксперимента), т. е. выбора объекта из генеральной совокупности и измерения значения признака, весьма беспорядочны. Их трудно анализировать. Поэтому, как правило, первым шагом любого анализа является систематизация и наглядное представление статистических данных.

Пусть, например, в результате тестирования по математике группа из 28 человек набрала следующие баллы: 3, 3, 3, 2, 2, 5, 2, 3, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 2, 4, 3, 2, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 3, 3, 4, 3².

Очевидно, что в данном случае исследуемый признак – количество баллов за тест, отражающее математические способности. Различные значения признака (варианты): 2, 3, 4, 5. Объем выборки $n = 28$.

¹ Статистические (экспериментальные или эмпирические) данные – данные о том, какие значения принял в результате эксперимента исследуемый признак. Различные значения признака называют вариантами.

² Математика для психологов: элементы теории вероятности и математической статистики : учебное пособие / [Н. В. Задохина и др.]. М. : Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя. 2021. С. 54–57.

Проранжируем, т. е. расположим исходные данные по возрастанию, и сгруппируем их так, чтобы каждая группа соответствовала определенному варианту (x_i). Число элементов в каждой группе называют *частотой* варианта (n_i), а отношение частоты варианта к объему выборки – *относительной частотой* варианта. Сумма всех частот равна объему выборки. Сумма всех относительных частот равна 1.

В итоге, получаем статистическое распределение выборки (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Статистическое распределение выборки

x_i	2	3	4	5	Контроль
n_i	10	12	5	1	$\sum_{i=1}^4 n_i = 28$
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\sum_{i=1}^4 \frac{n_i}{n} = 1$

Ранжированный перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот называют также *дискретным вариационным рядом*.

Дискретный вариационный ряд изображают графически с помощью полигона (рис. 1.6) – ломаной, отрезки которой соединяют точки: $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ... , $(x_k; n_k)$ или $(x_1; \frac{n_1}{n})$, $(x_2; \frac{n_2}{n})$, ... , $(x_k; \frac{n_k}{n})$.

Если число значений признака велико и не удастся выделить характерные черты варьирования ее значений¹, то строят *интервальный вариационный ряд*:

¹ Отдельные значения признака могут мало отличаться друг от друга, а одинаковые значения встречаются редко.

1. Промежуток варьирования наблюдаемых значений признака разбивают на ряд отдельных интервалов и подсчитывают количество значений признака, попадающее в каждый интервал.

2. Количество интервалов может быть определено по формуле Стерджесса: $k = 1 + 3,322 \lg n$, где n – объем выборки.

3. Считают, что отдельные интервалы имеют одинаковую длину h : $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$. Здесь $x_{\max}$ – наибольшее значение признака, а $x_{\min}$ – наименьшее значение признака.

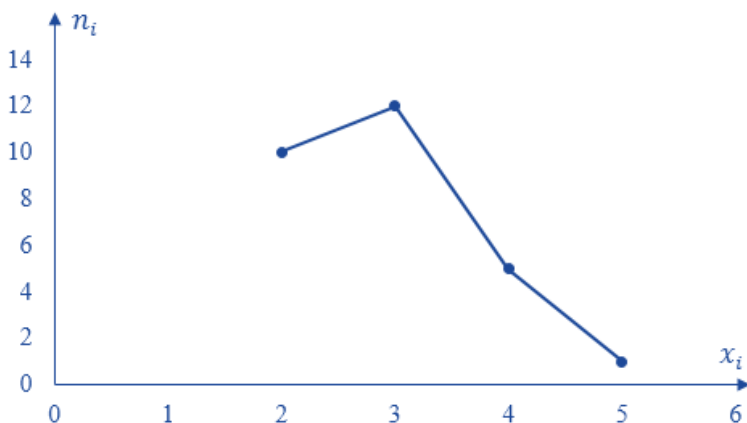


Рис. 1.6. Полигон частот

Пусть, например, средний балл успеваемости по математике в группе из 28 человек имеет следующие значения: 2,58, 2,65, 2,67, 2,72, 2,73, 2,75, 2,84, 2,87, 3,00, 3,06, 3,06, 3,06, 3,06, 3,07, 3,13, 3,13, 3,17, 3,17, 3,36, 3,38, 3,50, 3,60, 3,79, 3,79, 3,92, 4,08, 4,30, 4,77. Построим интервальный вариационный ряд.

Определяем количество интервалов по формуле Стерджесса: $k = 1 + 3,322 \lg n = 5,807 \approx 6$. Определяем длину интервала: $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{4,77 - 2,58}{6} = 0,365$.

В качестве начального значения интервального вариационного ряда используем $x_{min} = 2,58$. Разобьем промежуток изменения признака на шесть интервалов с $h = 0,365$. Например, верхняя граница первого интервала находится так: $x_{min} + h = 2,58 + 0,365 = 2,945$. Подсчитаем, сколько значений признака (вариант) попадает в каждый интервал (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Интервал	n_i
2,580–2,945	8
2,945–3,310	10
3,310–3,675	4
3,675–4,040	3
4,040–4,405	2
4,405–4,770	1

Интервальный вариационный ряд изображают графически с помощью *гистограммы частот* – фигуры, состоящей из прямоугольников с основанием h и высотами n_i (рис. 1.7) или $\frac{n_i}{n}$.

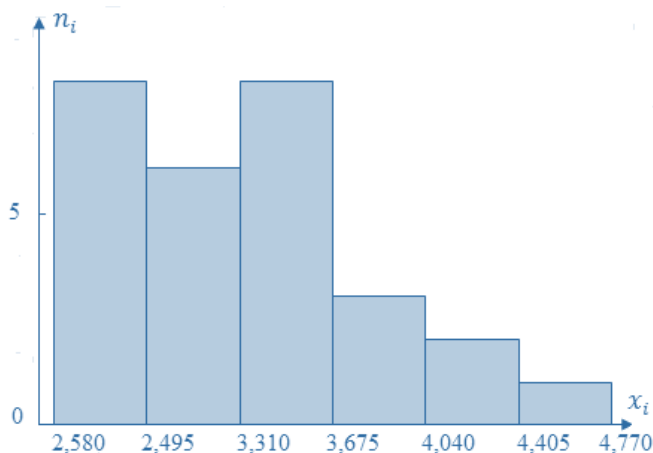


Рис. 1.7. Гистограмма частот

Для количественного описания статистических данных используют статистические показатели, которые можно разделить на три группы:

1. *Меры центральной тенденции* – это статистические показатели, которые дают усредненную характеристику совокупности объектов по определенному признаку. Наиболее используемые в психолого-педагогических исследованиях показатели: *среднее значение* (выборочное среднее), *медиана*, *мода*.

2. *Меры рассеяния* – это статистические показатели, характеризующие различия между отдельными значениями выборки. Наиболее используемые в психолого-педагогических исследованиях показатели: *выборочная дисперсия*, *стандартное отклонение* (выборочное среднее квадратическое отклонение), *размах* (диапазон разброса данных).

3. *Меры отклонения формы распределения* – это статистические показатели, которые позволяют количественно оценить меру отклонения изучаемого распределения от нормального распределения: *асимметрия*, *эксцесс*. Распределение признака – закономерность встречаемости разных его значений. Нормальное распределение играет особую роль при решении прикладных задач из психолого-педагогической сферы. Следует заметить, что уже со второй половины XIX в. измерительные методы в психологии разрабатывались на основе следующего принципа: если индивидуальная изменчивость некоторого свойства есть результат воздействия множества случайных причин, то закономерность встречаемости значений этого свойства соответствует кривой нормального распределения (график кривой симметричен относительно оси Y и имеет колоколообразную форму).

Пусть, например, диагностика физической подготовки выборки студентов некоторого вуза дала следующие результаты (фиксируется

число выполненных упражнений в минуту): 9, 11, 18, 12, 20, 8, 16, 21, 19. Рассчитаем основные статистические показатели.

Для автоматизации процесса нахождения основных статистических показателей используем табличный процессор Excel.

В ячейки C2:C10 вводим результаты девяти измерений и вычисляем выборочное среднее $\bar{X}$: в ячейку C11 вводим =СРЗНАЧ (C2:C10) (рис. 1.8). В результате получаем $\bar{X} = 15,00$. Формула для ручного подсчета: $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{9 + 11 + \dots + 19}{9} = 15,00$.

C11 X fx =СРЗНАЧ(C2:C10)					
	A	B	C	D	E
1		№	X		
2		1	9		
3		2	11		
4		3	19		
5		4	12		
6		5	20		
7		6	8		
8		7	16		
9		8	21		
10		9	19		
11		Среднее	15,00		
12					

Рис. 1.8. Среднее значение

1. Вычисляем моду (мода – значение выборки, наблюдаемое наибольшее число раз) Mo : в ячейку C12 вводим =МОДА (C2:C10). В результате получаем: $Mo = 19,00$.

2. Вычисляем медиану (медиана – значение выборки, которое делит вариационный ряд на две равные части) Me : в ячейку C13 вводим =МЕДИАНА (C2:C10). В результате получаем: $Me = 16,00$.

3. Вычисляем выборочную дисперсию (выборочная дисперсия – это среднее всех квадратов отклонений результатов наблюдений от их среднего значения) S^2 : в ячейку C14 вводим =ДИСП.В(C2:C10). В результате получаем: $S^2 = 25,00$. Формула для ручного подсчета: $S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$. Здесь $\bar{x}$ – среднее значение выборки, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ – соответствующие измерения признака.

4. Вычисляем стандартное отклонение (стандартное отклонение описывает типичное расстояние от среднего значения для отдельных результатов измерений) S : в ячейку C15 вводим =СТАНДОТКЛОН.В(C2:C10). В результате получаем $S = 5,05$. Формула для ручного подсчета: $S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$.

5. Вычисляем размах выборки (размахом выборки называется разность между наибольшим значением и наименьшим значением этой выборки) W : в ячейку C16 вводим =МАКС (C2:C10)-МИН (C2:C10). В результате получаем $W = 13,00$.

6. Вычисляем асимметрию распределения (числовое отображение степени отклонения графика кривой данного распределения от симметричного нормального распределения) A : в ячейку C17 вводим =СКОС (C2:C10). В результате получаем $A = -0,22$. Отрицательное значение асимметрии свидетельствует об отклонении распределения в сторону отрицательных значений по сравнению с нормальным распределением.

7. Вычисляем эксцесс распределения (числовое отображение остроты пика (вершины) кривой данного распределения относительно пика кривой нормального распределения) E : в ячейку C17 вво-

дим =ЭКСЦЕСС (C2:C10). В результате получаем $E = -1,91$. Отрицательное значение эксцесса свидетельствует о более «плоской» вершине по сравнению с вершиной нормального распределения. Для нормального распределения характерно: $\bar{X} = Mo = Me$ и $A = E = 0$.

Итак, основные статистические показатели (рис. 1.9).

	A	B	C	D
1		№	X	
2		1	9	
3		2	11	
4		3	19	
5		4	12	
6		5	20	
7		6	8	
8		7	16	
9		8	21	
10		9	19	
11		Среднее	15,00	
12		Мода	19,00	
13		Медиана	16,00	
14		Дисперсия	25,50	
15		Станд.отклон.	5,05	
16		Размах	13,00	
17		Асимметрия	-0,22	
18		Эксцесс	-1,91	

Рис. 1.9. Статистические показатели

Таким образом, описательная статистика, цель которой – сделать предварительные выводы и принять стратегические (для дальнейшего анализа) решения, использует три основных метода агрегирования данных¹:

- 1) табличное представление;
- 2) графическое изображение;
- 3) расчет статистических показателей.

¹ Агрегирование (от лат. *aggregatio* – «присоединение») – процесс объединения элементов в одну систему.

ГЛАВА 2

Статистическая проверка статистических гипотез

§ 2.1. Этапы проверки статистических гипотез

Метод проверки статистических гипотез позволяет на основе имеющейся информации сделать выбор между двумя альтернативными предположениями, называемыми *гипотезами*. Проверку статистических гипотез можно рассматривать как один из компонентов принятия решений.

Статистическая гипотеза – всякое утверждение о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Нулевая гипотеза – утверждение об отсутствии статистически значимых различий или связи.

Альтернативная гипотеза – утверждение о наличии статистически значимых различий или связи.

Уровень значимости α – вероятность ошибки, связанной с обобщением результата измерения, полученного по выборке, на всю генеральную совокупность. Уровень значимости α – достаточно малое число, которое может принимать значения из промежутка $(0; 1)$. Например, $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$ и т. п.

Статистический критерий – строгое математическое правило, согласно которому отвергается или принимается та или иная статистическая гипотеза с известным уровнем значимости¹.

Различают параметрические и непараметрические критерии. Параметрические критерии предназначены для проверки гипотез

¹ Задохина Н. В. Статистические методы в деятельности эксперта-криминалиста. С. 196.

о параметрах распределений, вид которых известен¹. В частности, многие параметрические критерии опираются на предположение, что распределение, которому принадлежат исследуемые выборки, соответствует нормальному. Расчет статистики параметрического критерия основывается на параметрах распределения (среднее, дисперсия, стандартное отклонение и др.).

Статистика непараметрического критерия основана на оперировании рангами или частотами. Непараметрические критерии могут применяться для распределений, вид которых неизвестен.

Ошибка первого рода, возникающая при проверке статистических гипотез, заключается в отклонении верной гипотезы: нулевую гипотезу отвергают, когда она верна.

Ошибка второго рода, возникающая при проверке статистических гипотез, заключается в принятии ложной гипотезы: нулевую гипотезу не отвергают, когда она ложна.

Смысл данных ошибок хорошо иллюстрирует процесс вынесения судебного приговора. Подсудимый считается невиновным (согласно презумпции невиновности) до тех пор, пока не будет доказано обратное с помощью свидетельских показаний, результатов экспертиз и др. Невиновность подсудимого можно рассматривать в качестве нулевой гипотезы. Если суд признает невиновное лицо виновным, то совершается ошибка первого рода (нулевую гипотезу отвергают, когда она верна). Если суд признает виновное лицо невиновным, то совершается ошибка второго рода (нулевую гипотезу не отвергают, когда она ложна)².

¹ Вид распределения исследуемой величины считается известным, если может быть определено, какова частота тех или иных значений этой величины в общей совокупности.

² Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. С. 453.

Этапы проверки гипотезы:

- 1) сформулировать нулевую (основную) и альтернативную (конкурирующую) гипотезы;
- 2) задать уровень значимости;
- 3) выбрать статистический критерий;
- 4) найти критическое значение критерия и построить критическую область;
- 5) найти эмпирическое значение критерия (статистику);
- 6) сделать вывод. Если эмпирическое значение критерия попало в критическую область, то нулевую гипотезу следует отклонить и принять альтернативную¹.

Указанная последовательность шагов применима ко всем критериям.

§ 2.2. Параметрические критерии различий

F-критерий Фишера используется для сравнения дисперсий двух выборок. На практике данная задача возникает, если требуется сравнить степень изменчивости признака в выборках. Кроме того, *F-критерий Фишера* применяется в качестве предварительного теста при сравнении средних двух выборок с помощью *t-критерия Стьюдента*.

Например, в двух студенческих группах проводилось измерение уровня интеллекта. Средние двух выборок практически не различаются: $\bar{X} = 114,5$ и $\bar{X} = 114,6$.

Есть ли различия в степени однородности показателей интеллекта между группами? Рассмотрим далее в таблице 2.1.

¹ Задохина Н. В. Статистические методы в деятельности эксперта-криминалиста. С. 195.

Таблица 2.1

№	I	II
1	110	98
2	100	116
3	114	128
4	115	120
5	106	100
6	120	134
7	124	112
8	116	100
9	118	128
10	122	110

Задача сводится к сравнению дисперсий двух независимых выборок.

1. *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:*

H_0 : нет различий в степени однородности показателей интеллекта между группами (дисперсии распределений, из которых извлечены выборки равны);

H_1 : есть различия в степени однородности показателей интеллекта между группами (дисперсии распределений, из которых извлечены выборки не равны).

2. *Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$.*

3. *Выбираем статистический критерий: F-критерий. Для его применения необходимо, чтобы выборки извлекались из совокупности, имеющей нормальное распределение, а измерение признака проводилось в шкале интервалов или отношений.*

4. *Находим критическое значение критерия.*

Для нахождения критического значения F-критерия (рис. 2.1) используем функцию табличного процессора ФРАСПОБР (альфа; степени свободы_1; степени свободы_2), которая имеет три аргумента:

уровень значимости α ; степени свободы первой выборки¹; степени свободы второй выборки.

В нашем случае: $\alpha = 0,05$; $n - 1 = 10 - 1 = 9$; $n - 1 = 10 - 1 = 9$.

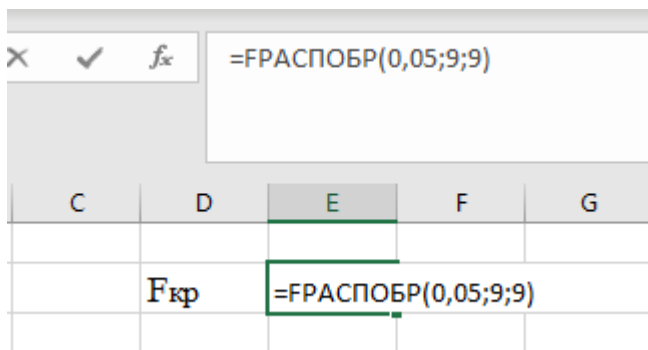


Рис. 2.1. Критическое значение критерия

Получаем: $F_{кр} = 3,18$.

5. Находим эмпирическое значение критерия (статистику):

$F_{эмп} = \frac{S_6^2}{S_M^2}$, где: S_6^2 – большая выборочная дисперсия; S_M^2 – меньшая выборочная дисперсия.

Для нахождения выборочной дисперсии (рис. 2.2) используем функцию ДИСП.В (число 1; число 2...), которая в нашем случае имеет десять аргументов – результаты измерения, входящие в соответствующую выборку.

Вводим в ячейку B12 формулу: `=ДИСП.В(B2:B11)`. Копируем эту формулу в ячейку C12. Получаем: $S_M^2 = 54,94$ и $S_6^2 = 166,27$.

Далее находим эмпирическое значение критерия (рис. 2.3):

$$F_{эмп} = \frac{S_6^2}{S_M^2} = F_{эмп} = \frac{54,94}{166,27} = 3,00.$$

¹ Первой считается та выборка, которая имеет большую дисперсию S^2 .

6. Формулируем вывод: $F_{\text{эмп}} < F_{\text{кр}}$ ($F_{\text{эмп}}$ не попало в критическую область), поэтому H_0 не отклоняется.

B12	:	✕	✓	f_x	=ДИСП.В(B2:B11)
	A	B	C		
1	№	I	II		
2	1	110	98		
3	2	100	116		
4	3	114	128		
5	4	115	120		
6	5	106	100		
7	6	120	134		
8	7	124	112		
9	8	116	100		
10	9	118	128		
11	10	122	110		
12	Дисперсия	54,94	166,27		

Рис. 2.2. Нахождение выборочной дисперсии



Рис. 2.3. Критическое и эмпирическое значения критерия

Вывод: различий в степени однородности показателей интеллекта между группами нет.

Для сравнения средних двух выборок используется *t-критерий Стьюдента*¹. Это общее название для методов статистической проверки гипотез (статистических критериев), которые основаны на распределении Стьюдента. При малом количестве измерений распределение может более или менее отклоняться от нормального. Такая дополнительная ненадежность устраняется с помощью симметричного *t*-распределения. Распределение Стьюдента (*t*-распределение) зависит только от объема выборки (степеней свободы) и не зависит от параметров генеральной совокупности. При увеличении количества измерений вид *t*-распределения приближается к нормальному распределению. Он (*t*-критерий) может применяться для исследования малых выборок ($n < 30$).

Например, выясним повлияла ли программа психологической подготовки, которая была опробована на экспериментальной группе студентов во время подготовки к итоговой аттестации (с целью корректировки психоэмоционального напряжения – снижения пульса). Из исследований известно, что у студентов экспериментальной и контрольной групп, сдававших итоговую аттестацию, сердце билось (уд/мин):

ЭГ	96	93	99	97	100	94	98	95	96
КГ	100	98	110	98	106	112	96	98	108

Задача сводится к проверке равенства средних двух независимых выборок.

1. *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:*

H_0 : Программа психологической подготовки не повлияла на психоэмоциональное напряжение обучающихся (средние распределений, из которых извлечены выборки, равны);

¹ Для применения *t*-критерия необходимо, чтобы выборки извлекались из совокупности, имеющей нормальное распределение, а измерение признака проводилось в шкале интервалов или отношений.

H_1 : Программа психологической подготовки повлияла на психоэмоциональное напряжение обучающихся (средние распределений, из которых извлечены выборки, не равны).

Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$.

Выбираем статистический критерий: t-критерий для разности двух средних независимых выборок (двухвыборочный t-тест).

Проверим выборки с помощью F-критерия (рис. 2.4) и выясним, имеют ли дисперсии статистически значимые различия (см. предыдущий пример).

C15 : ✕ ✓ fx =D13/C13					
	A	B	C	D	E
1					
2		№	ЭГ	КГ	
3		1	96	100	
4		2	93	98	
5		3	99	106	
6		4	97	98	
7		5	100	106	
8		6	94	102	
9		7	98	96	
10		8	95	98	
11		9	96	104	
12		Среднее	96,44	100,89	
13		Дисперсия	5,28	14,11	
14		F _{кр}	3,44		
15		F _{эмп}	2,67		

Рис. 2.4. Проверка дисперсий

$F_{эмп} < F_{кр}$ ($F_{эмп}$ не попало в критическую область), поэтому можем применить двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями.

Находим критическое значение критерия. В нашем случае можно использовать двустороннее значение критерия (нас интересует повлияла программа на психоэмоциональное напряжение или

нет, но вопрос в какую сторону повлияла, не ставится). Для нахождения двустороннего критического значения критерия (рис. 2.5) используем таблицу критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 1). В нашем случае: $\alpha = 0,05$; $k = n_1 + n_2 - 2 = 18 - 2 = 16$, где n_1, n_2 – объемы выборок.

$$t_{KP}(\alpha; k) = t_{KP}(0,05; 16) = 2,12$$

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	4,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92

Рис. 2.5. Нахождение критического значения критерия

Строим двустороннюю критическую область (рис. 2.6).

Замечание. Степени свободы – разность между числом независимых измерений и числом тех связей, которые наложены на эти измерения при дальнейшей обработке. В связи с этим имеем $n_1 + n_2 - 2$ степеней свободы, так как была наложена одна связь на каждую выборку (в процессе проверки вычисляется среднее значение $\bar{X}$ каждой выборки)

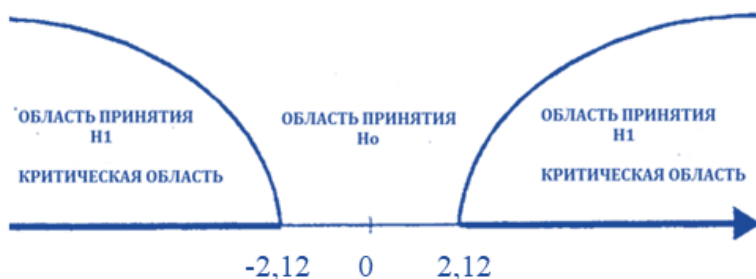


Рис. 2.6. Критическая область

2. Находим эмпирическое значение критерия (статистики).

Чтобы снизить трудоемкость вычислений, используем табличный процессор Excel.

Выбираем пакет «Анализ данных¹», который содержит группа инструментов «Анализ» вкладки «Данные» (рис. 2.7).

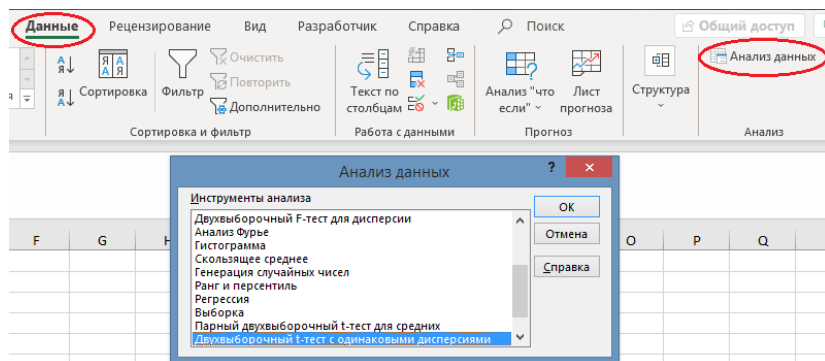


Рис. 2.7. Пакет инструментов Excel «Анализ данных»

А) В диалоговом окне пакета инструментов «Анализ данных» выбираем «Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями» и вводим необходимые данные (рис. 2.8).

¹ Если пакет «Анализ данных» неактивен, то следует выполнить последовательность шагов: Файл-Параметры-Надстройки-Пакет анализа-Перейти...-Пакет анализа-Ок.

№	ЭГ	КГ
1	96	100
2	93	98
3	99	106
4	97	98
5	100	106
6	94	102
7	98	96
8	95	98
9	96	104
Среднее	96,44	100,89
Дисперсия	5,28	14,11
Фкр	3,44	
Эмп	2,67	

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями

Входные данные
 Интервал переменной 1:
 Интервал переменной 2:
 Гипотетическая средняя разность:
☐ Метки
 Дельта:
 Параметры вывода
☐ Выходной интервал:
☒ Новый рабочий дист:
☐ Новая рабочая книга

OK Отмена Справка

Рис. 2.8. Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями

Б) Среди полученных результатов, которые отображаются на новом листе Excel, определяем эмпирическое значение t-критерия (t-статистику): $t_{\text{ЭМП}} = -3,03$; $t_{\text{КР}} = 2,12$ (рис. 2.9).

	А	В	С
1	Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
2			
3		Переменная 1 Переменная 2	
4	Среднее	96,44	100,89
5	Дисперсия	5,28	14,11
6	Наблюдения	9,00	9,00
7	Объединенная дисперсия	9,69	
8	Гипотетическая разность средних	0,00	
9	df	16,00	
10	t-статистика	-3,03	
11	P(T<=t) одностороннее	0,00	
12	t критическое одностороннее	1,75	
13	P(T<=t) двухстороннее	0,01	
14	t критическое двухстороннее	2,12	
15			

Рис. 2.9. Нахождение эмпирического значения двухвыборочного t-критерия

Заметим, что при ручном вычислении эмпирического значения критерия используется формула: $t_{ЭМП} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{d}$,

где $d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$.

Здесь $n_1 = n_2 = 9$ – количество наблюдений в ЭГ и КГ соответственно; $\bar{X}_1 = 96,44$, $\bar{X}_2 = 100,89$ – выборочные средние ЭГ и КГ соответственно; $S_1^2 = 5,28$, $S_2^2 = 14,11$ – выборочные дисперсии ЭГ и КГ соответственно.

3. *Формулируем вывод.* Так как $t_{ЭМП}$ попало в критическую область, H_0 отклоняется (рис. 2.10).

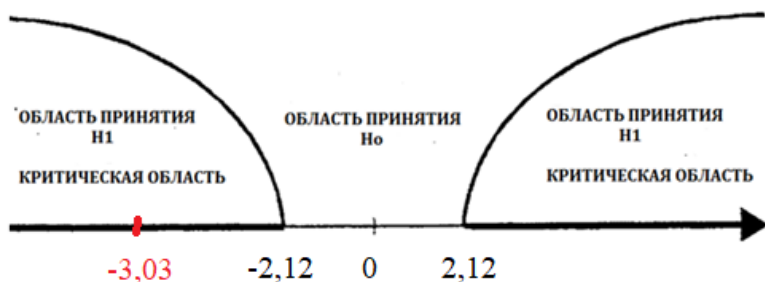


Рис. 2.10. Критическое и эмпирическое значения критерия

Вывод: Программа психологической подготовки повлияла на психоэмоциональное напряжение обучающихся.

Рассмотрим пример применения одностороннего t-критерия. При исследовании скорости реакции двух групп пациентов на звуковой сигнал в различных условиях (условия А и условия В) были получены следующие данные (в сотых долях секунды).

Условия А	11,5	12,5	13,5	12,5	14,0	11,0
Условия В	12,5	14,0	13,5	14,0	16,2	15,0

Проверить, оказала ли разница условий влияние на скорость реакции пациентов (скорость реакции пациентов в условиях *B* статистически значимо ниже, чем в условиях *A*).

Данная задача также сводится к сравнению средних значений двух независимых выборок.

1. *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:*

H_0 : Разница условий не оказала влияние на скорость реакции пациентов (средние распределений, из которых извлечены выборки равны). Среднее распределения – генеральное среднее или математическое ожидание;

H_1 : Разница условий оказала влияние на скорость реакции пациентов (среднее распределения, из которого извлечена выборка, соответствующая условию *B*, больше средней распределения, из которого извлечена выборка, соответствующая условию *A*).

2. *Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$.*

3. *Выбираем статистический критерий: t-критерий для разности двух средних независимых выборок (двухвыборочный t-тест).*

Проверим выборки с помощью F-критерия и убедимся, что дисперсии не имеют статистически значимых различий.

$F_{\text{эмп}} < F_{\text{кр}}$ ($F_{\text{эмп}}$ не попало в критическую область), поэтому можем применить двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями. Если $F_{\text{эмп}} > F_{\text{кр}}$, т. е. дисперсии значимо различаются, то применяют двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями.

4. *Находим критическое значение критерия (рис. 2.11):*

В нашем случае находим правостороннее значение критерия. Для нахождения правостороннего критического значения критерия используем таблицу приложения 2 или выражение Excel = ABS (СТЮДЕНТ.ОБР (альфа; степени свободы). В нашем случае: $\alpha = 0,05$; $k = n_1 + n_2 - 2 = 12 - 2 = 10$, где n_1 и n_2 – объемы выборок. Получаем $t_{\text{кр.пр}} = 1,81$.

11	:	$\times$	$\checkmark$	f_x	=C9/B9
A		B		C	
№ измерения	A	B			
1	11,5	12,5			
2	12,5	14,0			
3	13,5	13,5			
4	12,5	14,0			
5	14,0	16,2			
6	11,0	15,0			
Среднее	12,5	14,2			
Дисперсия	1,3	1,6			
Fкр	5,05				
Fэмп	1,25				

Рис. 2.11. Нахождение эмпирического значения F-критерия

5. Находим эмпирическое и критическое значения критерия (статистику):

1) в диалоговом окне пакета инструментов «Анализ данных» выбираем «Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями» и вводим необходимые данные (рис. 2.12).

	A	B	C
1	№ измерения	A	B
2	1	11,5	12,5
3	2	12,5	14,0
4	3	13,5	13,5
5	4	12,5	14,0
6	5	14,0	16,2
7	6	11,0	15,0
8	Среднее	12,5	14,2
9	Дисперсия	1,3	1,6
10	F _{кр}	5,05	
11	F _{эм}	1,25	

Рис. 2.12. Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями

Среди полученных результатов, которые отображаются на новом листе Excel, определяем эмпирическое значение t-критерия (t-статистику): $t_{\text{ЭМП}} = 2,4368 \dots \approx 2,44$, $t_{\text{КР}} = 1,8124 \approx 1,81$ (рис. 2.13).

	A	B	C	D
1	Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями			
2				
3		<i>Переменная 1</i>	<i>Переменная 2</i>	
4	Среднее	14,2	12,5	
5	Дисперсия	1,62	1,3	
6	Наблюдения	6	6	
7	Объединенная дисперсия	1,46		
8	Гипотетическая разность средних	0		
9	df	10		
10	t-статистика	2,436874261		
11	P(T<=t) одностороннее	0,017517907		
12	t критическое одностороннее	1,812461123		
13	P(T<=t) двухстороннее	0,035035814		
14	t критическое двухстороннее	2,228138852		

Рис. 2.13. Нахождение эмпирического значения двухвыборочного t-критерия

6. *Формулируем вывод:* $t_{\text{ЭМП}} > t_{\text{КР}}$ ($t_{\text{ЭМП}}$ попало в критическую область), поэтому H_0 отклоняется.

Вывод: разница условий оказала влияние на скорость реакции пациентов (пациенты в условиях В медленнее реагируют на звуковой сигнал).

Итак, расчет статистики (эмпирического значения) параметрического критерия основывается на параметрах распределения (среднее, дисперсия и др.). Параметрические критерии являются более мощными, чем непараметрические, но их применимость ограничивается рядом условий:

1. Выборки должны извлекаться из совокупностей, имеющих нормальное распределение.
2. Измерение признака должно проводиться в шкале интервалов или отношений.

§ 2.3. Непараметрические критерии различий

Как было указано выше, непараметрические критерии могут применяться для распределений, вид которых неизвестен, что делает их незаменимыми в психолого-педагогических исследованиях.

Одним из наиболее мощных непараметрических критериев, применяемый для оценки достоверности различий двух независимых выборок объемом n_1 и n_2 ($n_1 \leq n_2$), является ранговый критерий U Вилкоксона-Манна-Уитни. Ранговые критерии – это статистические критерии, в которых вместо выборочных значений признака используются их ранги. Вилкоксон в 1945 г. сформулировал критерий для сравнения двух независимых выборок равного объема, а Манн и Уитни в 1947 г. обобщили данный критерий на выборки различного объема.

Например, выясним, оказала ли влияние новая методика, которая была опробована во время подготовки обучающихся экспериментальной группы к заключительному экзамену по машинописи. Из исследований известно, что у обучающихся экспериментальной и контрольной групп, сдававших заключительный экзамен по машинописи, время безошибочного набора текста (в минутах) составило:

ЭГ	2	5	8	2	4	7	1	3
КГ	3	11	5	12	8	16	10	9

Данная задача сводится к доказательству статистической значимости различий двух независимых выборок (ЭГ и КГ) по уровню выраженности некоторого признака (навык слепого метода печати или машинописи):

1. *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:*

Нулевая гипотеза H_0 : ЭГ и КГ не имеют статистически значимых различий по уровню подготовки к заключительному экзамену по машинописи;

¹ Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов. С. 106–110.

Альтернативная гипотеза H_1 : ЭГ и КГ имеют статистически значимые различия по уровню подготовки к заключительному экзамену по машинописи.

2. Выбираем уровни значимости: $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$.

3. Строим общий вариационный ряд для элементов двух выборок (элементы двух выборок перемешиваем, располагая по возрастанию) и находим ранги каждого значения (табл. 2.2). Элементы и ранги КГ набираем красным шрифтом в отличие от ЭГ. В рассматриваемых выборках, как видно из таблицы (табл. 2.2.), некоторые значения повторяются. В таком случае соответствующим совпадающим величинам присваиваем среднее арифметическое тех рангов (позиций в общем вариационном ряду), которые они занимают.

Таблица 2.2

Общий вариационный ряд элементов двух выборок

Ранги	1	2,5	2,5	4,5	4,5	6	7,5	7,5
Элементы выборок	1	2	2	3	3	4	5	5
Ранги	9	10,5	10,5	12	13	14	15	16
Элементы выборок	7	8	8	9	10	11	12	16

Затем находим сумму рангов (рис. 2.14) значений первой выборки R_1 (ЭГ), сумму рангов второй выборки R_2 (КГ) и обеих выборок R :

$$R_1 = 1 + 2,5 + 2,5 + 4,5 + 6 + 7,5 + 9 + 10,5 = 43,5;$$

$$R_2 = 4,5 + 7,5 + 10,5 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 92,5.$$

Для контроля вычислений использовалась формула:

$$R = R_1 + R_2 = 43,5 + 92,5 = \frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{(8+8)(8+8+1)}{2} = 136.$$

Чтобы снизить трудоемкость вычислений, целесообразно использовать функцию табличного процессора РАНГ.СР(число; ссылка;

порядок), которая имеет три аргумента: число, для которого определяется ранг; ссылка на массив чисел; число, определяющее способ упорядочения (значение 1 упорядочивает ранги по возрастанию).

▼	⌵	⌴	⌵	fx	▼	=РАНГ.СР(Е3;Е\$3:Е\$18;1)									
	В		С		Д		Е		Ф		Г		Н		И
	ЭГ		КГ				Общий ряд		Ранги						
	2		3				1		=РАНГ.СР(Е3;Е\$3:Е\$18;1)						
	5		11				2		РАНГ.СР(число; ссылка; [порядок])						
	8		5				2		2,5						
	2		12				3		4,5						
	4		8				3		4,5						
	7		16				4		6						
	1		10				5		7,5						
	3		9				5		7,5						
							7		9						
							8		10,5						
							8		10,5						
							9		12						
							10		13						
							11		14						
							12		15						
							16		16						

Рис. 2.14. Нахождение рангов

4. Вычисляем $U_{ЭМП}$ – эмпирическое значение критерия U Вилкоксона-Манна-Уитни: $U_{ЭМП} = (n_1 \cdot n_2) + n_x \cdot \frac{n_x + 1}{2} - R_{max} = (8 \cdot 8) + 8 \cdot \frac{(8 + 1)}{2} - 92,5 = 7,5$.

В данной формуле:

R_{max} – наибольшая по величине сумма рангов;

n_1, n_2 – количество элементов первой и второй выборки соответственно;

n_x – количество элементов выборки с большей суммой рангов.

5. По таблице Приложения 2 или по таблице 7 приложения¹ находим критические значения критерия U Вилкоксона-Манна-Уитни (для уровней значимости 0,05 и 0,01): $U_{кр.(0,05;8;8)} = 15$; $U_{кр.(0,01;8;8)} = 9$.

Для $U_{ЭМП}$ строим зону значимости (критическую область) и формулируем вывод. Так, для $U_{ЭМП} = 7,5$ по рисунку 2.15:

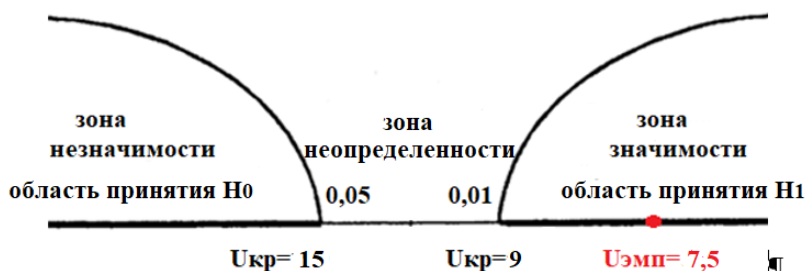


Рис. 2.15. Зона значимости

Вывод: так как значение $U_{ЭМП} = 7,5$ попало в зону значимости, нулевая гипотеза отклоняется, т. е. новая методика оказала влияние на уровень подготовки обучающихся ЭГ к заключительному экзамену

Замечание. Если $U_{ЭМП}$ попадает в зону неопределенности, то исследователь может считать полученные результаты статистически значимыми при $\alpha = 0,05$ (H_0 отклоняется) и незначимыми при $\alpha = 0,01$ (H_0 не отклоняется)

по машинописю (ЭГ и КГ имеют статистически значимые различия по уровню подготовки, так как время безошибочного набора текста у обучающихся ЭГ статистически значимо ниже, чем у обучающихся КГ).

¹ Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов. С. 295.

Условия применимости критерия U Вилкоксона-Манна-Уитни:

1. Нижняя граница для количества измерений (элементов выборки): $n_1 \geq 3$, $n_2 \geq 3$ или $n_1 = 2$, $n_2 \geq 5$; верхняя граница $n_1 \leq 60$, $n_2 \leq 60$.
2. Измерение признака должно проводиться в шкале отношений или интервалов (ряд ученых считает возможным использовать и шкалу порядка).

Для оценки достоверности различий зависимых выборок применяется парный критерий Т-Вилкоксона, основанный на ранжировании абсолютных разностей значений исследуемого признака до и после воздействия (например, до и после применения какой-либо методики или программы).

Например, выясним, оказал ли влияние психологический тренинг личностного роста на уровень сформированности мотивации к успеху выборки студентов ($n = 10$) некоторого вуза, если тестирование дало следующие результаты (тест Т. Элерса¹):

До	10	7	11	13	9	13	9	5	11	8
После	12	15	21	16	20	19	20	14	13	12

Данная задача сводится к доказательству статистической значимости различий по уровню выраженности некоторого признака (уровень мотивации к успеху) у одной и той же выборки до и после воздействия (тренинга):

1. *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:*

Нулевая гипотеза H_0 : выборка (до тренинга) и выборка (после тренинга) не имеют статистически значимых различий по уровню сформированности мотивации к успеху;

¹ Райгородский Д. Я. Практическая психодиагностика. Методики и тесты : учебное пособие. Самара : Бахрах-М, 2019. С. 626–629.

Альтернативная гипотеза H_1 : выборка (до тренинга) и выборка (после тренинга) имеют статистически значимые различия по уровню сформированности мотивации к успеху.

2. Выбираем уровни значимости: $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$.

3. *Строим таблицу*: во второй и третий столбец вносим значения исследуемого признака, полученные до и после воздействия; в четвертый столбец вносим величину сдвига, который определяется как разность соответствующих значений третьего и второго столбцов; в пятый столбец вносим абсолютное значение этого сдвига; в шестой столбец вносим ранги абсолютных значений сдвигов; в седьмой столбец вносим любой знак, позволяющий отметить нетипичный сдвиг (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Нахождение сдвигов и рангов и нетипичных сдвигов

№	До	После	Сдвиг	Абсолютный сдвиг	Ранг	Нетипичный сдвиг
1	10	7	-3	3	3	х
2	7	15	8	8	6	
3	11	21	10	10	8	
4	13	11	-2	2	1,5	х
5	9	20	11	11	9,5	
6	13	19	6	6	5	
7	9	20	11	11	9,5	
8	5	14	9	9	7	
9	11	13	2	2	1,5	
10	8	12	4	4	4	
Сумма					55	$T_{\text{эмп}} = 4,5$

Затем находим сумму рангов: $R = 3 + 6 + 8 + 1,5 + 9,5 + 5 + 9,5 + 7 + 1,5 + 4 = 55$.

Для контроля правильности вычислений использовалась формула:

$$R = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55.$$

4. Вычисляем $T_{ЭМП}$ – эмпирическое значение критерия Т-Вилкоксона: $T_{ЭМП} = 3 + 1,5 = 4,5$.

Заметим, что $T_{ЭМП}$ вычисляется как сумма рангов нетипичных сдвигов.

5. По таблице Приложения 3 или по таблице 2 Приложения 1¹ находим критические значения критерия Т-Вилкоксона (для уровней значимости 0,05 и 0,01): $T_{КР.(0,05;10)} = 10$, $T_{КР.(0,05;10)} = 5$.

Для $T_{ЭМП}$ строим зону значимости (рис. 2.16) и формулируем вывод. Так, для $T_{ЭМП} = 4,5$.

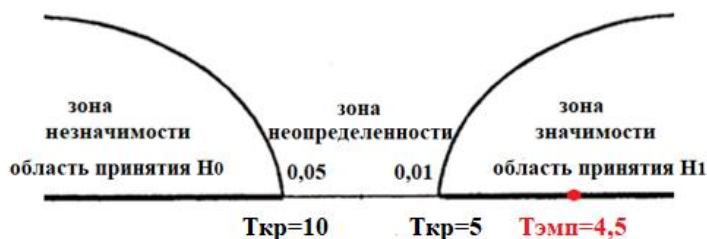


Рис. 2.16. Зона значимости

Вывод: так как значение $T_{ЭМП} = 4,5$ попало в зону значимости, нулевая гипотеза отклоняется, т. е. тренинг личностного роста повлиял на мотивацию студентов к успеху (студенты до и после тренинга имеют статистически значимые различия по уровню сформированности мотивации к успеху).

Условия применимости критерия Т-Вилкоксона:

1. Количества измерений (элементов выборки) до и после воздействия должно быть одинаковым, причем $5 \leq n \leq 50$.
2. Исследуемый признак может быть измерен по шкале отношений, интервалов или порядка.

¹ Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов. С. 291.

§ 2.4. Многофункциональный критерий Фишера – φ

Критерий Фишера – φ используется для оценки достоверности различий двух выборок (как зависимых, так и независимых) по частоте встречаемости (доле) некоторого качественного или количественного признака.

Например, определим, статистически значимы ли (достоверны) различия в успешности сдачи нормативов по физической подготовке у двух групп обучающихся, если в одной группе с нормативами справились 10 человек из 16, а в другой 14 человек из 18.

Задача сводится к доказательству статистической значимости различий двух выборок:

1. *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:*

H_0 : Группы не имеют статистически значимых различий в успешности сдачи нормативов;

H_1 : Группы имеют статистически значимые различия в успешности сдачи нормативов.

2. *Находим процентное соотношение успешности сдачи нормативов для каждой группы соответственно:* $\frac{10}{16} \cdot 100 \% = 62,5 \%$;
 $\frac{14}{18} \cdot 100 \% = 77,8 \%$.

По таблице *Приложения 4* или по *таблице 14 Приложения 1*¹ находились φ_1 и φ_2 – величины углов в радианах, соответствующие большей и меньшей процентной доле. Суть данного критерия состоит в переводе процентных долей в величины центрального угла, которые измеряются в радианах. При увеличении расхождения между углами φ_1 и φ_2 и увеличения численности выборок эмпирическое значение критерия возрастает.

¹ Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов. С. 310.

Так, для 77,8 % величина $\varphi_1 = 2,160$, а для 62,5 % величина $\varphi_2 = 1,823$.

3. Находим эмпирическое значение критерия Фишера – φ :

$$\varphi_{\text{ЭМП}} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} = (2,160 - 1,823) \cdot \sqrt{\frac{18 \cdot 16}{18 + 16}} = 0,98.$$

Здесь $n_1 = 18$ – количество измерений, соответствующее φ_1 , а $n_2 = 16$ – количество наблюдений, соответствующее φ_2 .

4. По таблице 15 приложения 1¹ находим критические значения критерия (для уровней значимости 0,05 и 0,01): $\varphi_{\text{КР.}(P \leq 0,05)} = 1,64$; $\varphi_{\text{КР.}(P \leq 0,01)} = 2,31$.

Для $\varphi_{\text{ЭМП}} = 0,98$ строим зону значимости (рис. 2.17) и формулируем вывод.

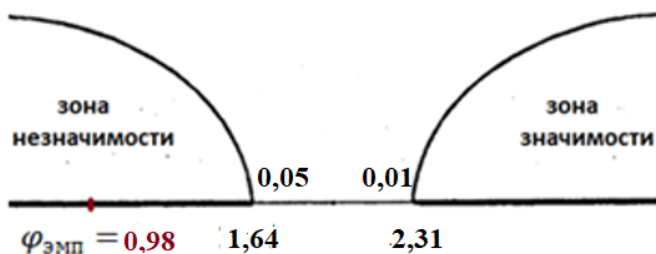


Рис. 2.17. Зона значимости

Вывод: так как значение $\varphi_{\text{ЭМП}} = 0,98$ не попало в зону значимости, нулевая гипотеза не отклоняется, т. е. группы не имеют статистически значимых различий в успешности сдачи нормативов.

Условия применимости критерия Фишера – φ :

1. Нижняя граница для количества измерений (элементов выборки): не менее пяти; верхняя граница: не определена;
2. Измерение признака может проводиться в любой шкале;
3. Характеристики выборок могут быть любыми.

¹ Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов. С. 312.

ГЛАВА 3

Анализ статистических зависимостей

§ 3.1. Понятие корреляционной связи

Статистической называют *зависимость*, при которой изменение одной из случайных величин влечет изменение распределения другой. Статистическую зависимость называют *корреляционной*, если при изменении одной из случайных величин (одного из признаков) изменяется среднее значение другой (другого признака).

Термин «корреляция» впервые употребил Ж. Кювье¹, который вывел закон «корреляции частей и органов животных», позволяющий восстанавливать облик животного по найденным останкам. В статистику данный термин (от англ. *co-relation* – «взаимосвязь») ввел Ф. Гальтон², а алгоритм подсчета коэффициента корреляции разработал К. Пирсон³.

Для психолого-педагогических исследований корреляция представляет особый интерес. Две переменные (два признака) могут быть коррелированы положительно, отрицательно или не коррелированы вовсе.

Две переменные называются *положительно коррелированными*, если при возрастании одной из них другая тоже имеет тенденцию к возрастанию.

Например, у семи обучающихся сначала измерили (табл. 3.1) уровень тревожности (по методике Тейлора), а затем измерили уровень мотивации к успеху (по методике Элерса).

¹ Ж. Кювье – французский ученый-палеонтолог.

² Ф. Гальтон – английский исследователь в области антропологии, психологии, статистики.

³ К. Пирсон – английский математик и биолог.

Таблица 3.1

№	Оценка тревожности	Оценка мотивации
1	10	9
2	15	10
3	20	12
4	20	15
5	30	15
6	35	16
7	40	19

Изобразим табличные данные в виде точечной диаграммы (рис. 3.1), которая дает возможность проиллюстрировать положительную корреляционную связь. Очевидно, что более высоким оценкам по шкале «тревожность» соответствуют более высокие оценки по шкале «мотивация».

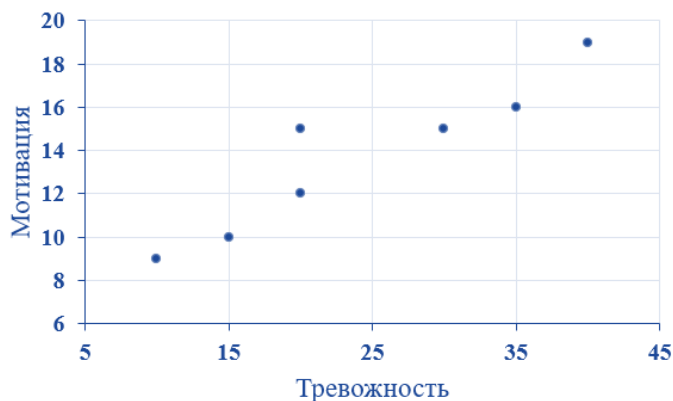


Рис. 3.1. Положительная корреляционная связь

Две переменные называются *некоррелированными*, если при возрастании одной из них другая не показывает никакой определенной тенденции ни к возрастанию, ни к убыванию.

Например, у семи обучающихся сначала измерили рост, а затем – коэффициент интеллекта IQ (табл. 3.2).

Таблица 3.2

№	Рост, см	Коэффициент IQ
1	156	107
2	162	99
3	165	114
4	169	98
5	172	100
6	175	106
7	180	98

Изобразим табличные данные в виде точечной диаграммы (рис. 3.2), которая дает возможность проиллюстрировать отсутствие корреляционной связи.

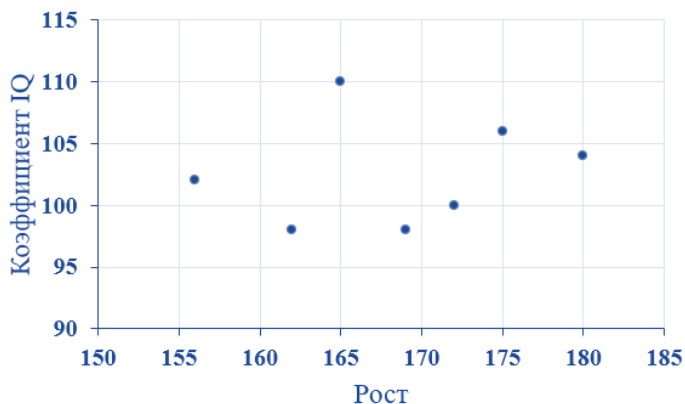


Рис. 3.2. Отсутствие корреляционной связи

Две переменные называются *отрицательно коррелированными*, если при возрастании одной из них другая имеет тенденцию к убыванию. Например, у семи обучающихся сначала по шкале адаптации

измерили уровень приспособленности к внешним условиям, а затем по шкале фрустраций измерили реакцию недовольства на различного рода помехи (табл. 3.3).

Таблица 3.3

№	Оценка по адаптационной шкале	Оценка по шкале фрустраций
1	35	18
2	42	16
3	50	15
4	54	13
5	60	10
6	72	10
7	74	9

Изобразим табличные данные в виде точечной диаграммы (рис. 3.3), которая дает возможность проиллюстрировать отрицательную (обратную) корреляционную связь. Очевидно, что более высоким оценкам по шкале «адаптация» соответствуют более низкие оценки по шкале «фрустрация».

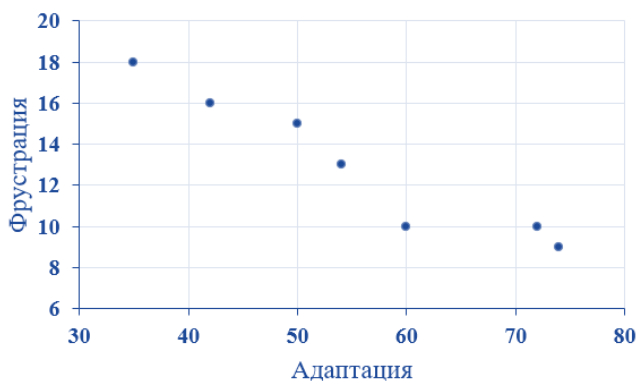


Рис. 3.3. Отрицательная корреляционная связь

Заметим, что корреляция подразумевает только существование тренда и не предполагает неизменности связи. Наличие корреляции двух переменных не утверждает, что между ними существует причинно-следственная связь (связь может быть случайной или представлять собой результат влияния неизвестных внешних факторов), но дает возможность выдвинуть такую гипотезу.

Замечание. Две переменные могут быть коррелированы, даже если взаимосвязь между ними не линейна. С корреляционным анализом тесно связан регрессионный анализ. В корреляционном анализе оценивается сила связи между переменными, в регрессионном форма. Регрессионный анализ позволяет аналитически представить связь между переменными

Для определения направления и степени коррелируемости переменных используют коэффициент корреляции.

§ 3.2. Коэффициент корреляции Пирсона

Коэффициент корреляции Пирсона характеризует наличие только линейной связи между переменными (признаками), поэтому данный коэффициент часто называют *линейным коэффициентом корреляции Пирсона* и обозначают символом r .

Заметим, что $|r| \leq 1$ и чем ближе значение коэффициента корреляции r к 1 (по модулю), тем теснее корреляционная связь.

Если $r = 1$, то наблюдается полная положительная корреляция.

Если $r = -1$, то наблюдается полная отрицательная корреляция.

Если $r = 0$, то линейная корреляция отсутствует.

Случай полной положительной или отрицательной корреляции встречается крайне редко и может интерпретироваться как идеал. На практике обычно наблюдается лишь некоторый уровень положительной или отрицательной корреляции.

Формула для подсчета коэффициента корреляции Пирсона имеет следующий вид: $r = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}}$.

Здесь: $i = 1 \dots n$ – количество наблюдений в каждой выборке; x_i , y_i – значения, принимаемые переменными X и Y соответственно (значения признака в первой и во второй выборке); $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние значения (средние значения признака в первой и во второй выборке); $i = 1 \dots n$ – количество элементов в каждой выборке; Σ – знак суммы.

Например, сделаем вывод о характере корреляционной связи между переменными x и y , если в результате наблюдения составлена таблица зависимости роста и длины стопы:

X	22, 5	22, 8	23, 0	23, 0	23, 0	23, 5	24, 0	24, 0	24, 0	24, 2	24, 5	24, 5	24, 8
Y	164	163	165	163	165	168	175	174	165	175	178	169	179

Чтобы снизить трудоемкость вычисления коэффициента корреляции Пирсона r используем табличный процессор Excel:

1. В ячейки B2:O3 вводим табличные данные (рис. 3.4).
2. Рисунок 3.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2		X	22,5	22,8	23,0	23,0	23,5	24,0	24,0	24,0	24,2	24,5	24,5	24,8		
3		Y	164	163	165	163	165	168	175	174	165	175	178	169	179	
4																

Рис. 3.4. Исходные данные

По данным таблицы строим точечную диаграмму, чтобы наглядно представить исследуемую корреляционную связь (рис. 3.5):

1. Делаем вывод о характере корреляционной связи между переменными x и y . Вычисляем r : в ячейку H4 вводим =PEARSON (C2:O2; C3:O3). Аргументами функции PEARSON (массив 1; массив 2) служат элементы первой и второй выборки соответственно (рис. 3.6).

В результате получаем $r = 0,84$, что свидетельствует о положительной (достаточно сильной) корреляции между переменными x и y .

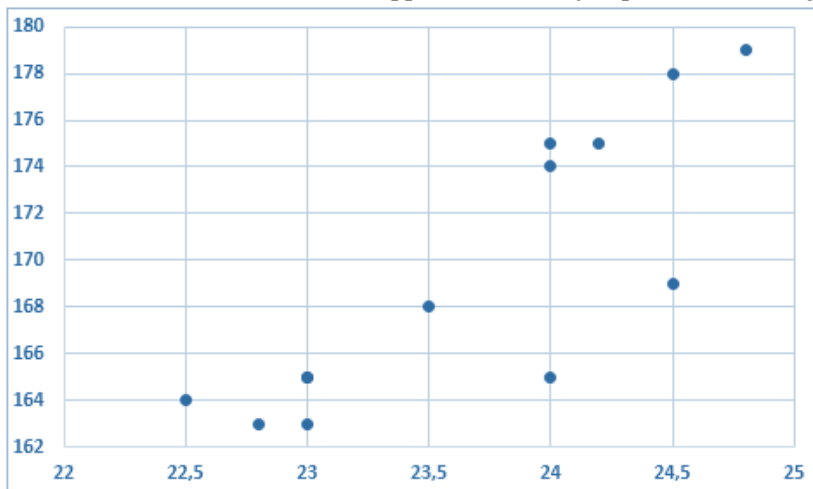


Рис. 3.5. Экспериментальные точки

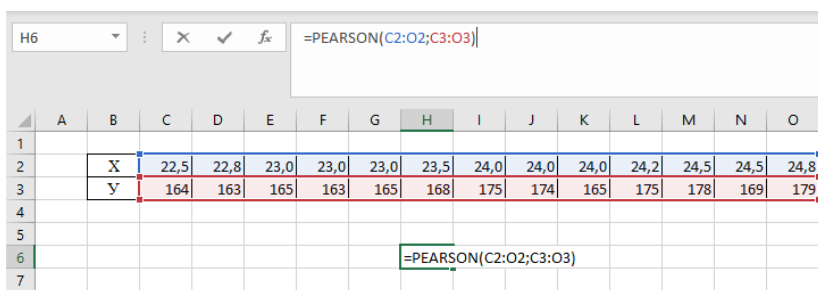


Рис. 3.6. Нахождение коэффициента корреляции Пирсона

Так как исходные данные являются выборочными, то необходимо оценить значимость коэффициента корреляции.

1. *Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы:*

H_0 : корреляционная связь статистически не значима, $r_r = 0$ – коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю;

H_1 : корреляционная связь статистически значима, $r_r \neq 0$ – коэффициент корреляции в генеральной совокупности не равен нулю.

2. Выбираем уровень значимости: $\alpha = 0,05$.

3. Выбираем статистический критерий: t-критерий.

4. Находим критическое значение критерия. В нашем случае: $\alpha = 0,05$; $n - 2 = 13 - 2 = 11$. Получаем: $t_{кр} = 2,2$ (формула=СТЫЮДЕНТ.ОБР.2X (0,05;11)).

5. Находим эмпирическое значение критерия (статистику):

$$t_{\text{ЭМП}} = \frac{|r|}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0,84}{\sqrt{\frac{1-0,84^2}{13-2}}} = 5,13,$$

где: $n = 13$ – число элементов выборки; r – коэффициент корреляции.

Строим двустороннюю критическую область и отмечаем $t_{\text{ЭМП}}$ (рис. 3.7) и формулируем вывод: так как $t_{\text{ЭМП}}$ попало в критическую область, H_0 отклоняется и принимается H_1 .



Рис. 3.7. Критическая область

Коэффициент корреляции Пирсона может применяться при выполнении следующих условий:

1. Выборки должны извлекаться из совокупностей, имеющих нормальное распределение;
2. Измерение признака должно проводиться в шкале интервалов или отношений.
3. Объемы выборок должны быть равны.

§ 3.3. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена

Если вид распределений, откуда извлекаются выборки, неизвестен или измерения проводятся в шкале порядка, то для оценки линейной корреляционной связи применяется *коэффициент ранговой корреляции Спирмена*, часто обозначаемый символом ρ , причем также $|\rho| \leq 1$.

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена вычисляется по формуле¹: $\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$, где d_i^2 – квадраты разности рангов, n – число измерений (пар рангов).

Как было указано выше, ранг – порядковый номер значений признака, расположенных по убыванию или возрастанию. Если значения признака повторяются, то им присваивается среднее арифметическое тех рангов, которые они занимают.

Например, оценим тесноту корреляционной связи между математическими способностями, оцениваемыми баллами, полученными обучающимися по математическому тесту, и коэффициентом IQ (табл. 3.4).

Таблица 3.4

№	Математический тест	Коэффициент IQ
1	9	100
2	11	99
3	12	102
4	17	104
5	14	98
6	16	106
7	18	108
8	18	110

¹ Ермолаев О. Ю. Математическая статистика для психологов. С. 213.

Для вычисления коэффициента корреляции Спирмена находим ранги элементов каждой выборки, разности рангов, их квадраты и суммы (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Вычисление квадратов разности рангов и сумм

№	Тест, x_i	Ранг x_i	IQ, y_i	Ранг y_i	$d = x_i - y_i$	d^2
1	9	1	100	3	-2	4
2	11	2	99	2	0	0
3	12	3	102	4	-1	1
4	17	6	104	5	1	1
5	14	4	98	1	3	9
6	16	5	106	6	-1	1
7	18	7,5	108	7	0,5	0,25
8	18	7,5	110	8	-0,5	0,25
Сумма		36		36	0	16,5

Правильность ранжирования (сумму рангов) проверяем по формуле: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{8(8+1)}{2} = 36$.

$$\text{Подставляем найденные значения и вычисляем } \rho: \rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} \\ = 1 - \frac{6 \cdot 16,5}{8(8^2 - 1)} = 0,804.$$

Для обоснования статистической значимости ρ находим критические значения коэффициента корреляции Спирмена для $n = 8$ (см. Приложение 5) и формулируем вывод: $\rho_{KP.(\alpha = 0,05)} = 0,72$; $\rho_{KP.(\alpha = 0,01)} = 0,88$.

Так как $\rho_{KP.(\alpha = 0,05)} < \rho < \rho_{KP.(\alpha = 0,01)}$, значение $\rho = 0,804$ попадает в зону неопределенности. Таким образом, положительная корреляционная связь между показателем математических способностей

и показателем IQ у обучающихся является статистически значимой при $\alpha = 0,05$ и незначимой при $\alpha = 0,01$.

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена может применяться при выполнении следующих условий:

1. Выборки могут извлекаться из совокупностей, не имеющих нормальное распределение.
2. Измерение признака может проводиться в порядковой шкале, а также в шкале интервалов или отношений.
3. Объемы выборок должны быть равны.
4. Если $n > 40$, то для нахождения критических значений можно использовать таблицу критических значений коэффициента корреляции Пирсона.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бродский, Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика / Я. С. Бродский. – М. : Оникс ; Мир и Образование, 2008. – 544 с.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 1998. – 479 с.
3. Горелова, Г. В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с использованием Excel : учебное пособие для вузов / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 3-е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д. : Феникс, 2005. – 480 с.
4. Ермолаев, О. Ю. Математическая статистика для психологов : учебник / О. Ю. Ермолаев. – 3-е изд., испр. – М. : Московский психолого-социальный институт ; Флинта, 2004. – 336 с.
5. Задохина, Н. В. Статистические методы в деятельности эксперта-криминалиста / Н. В. Задохина // Образование. Наука. Научные кадры. – 2020. – № 3. – С. 195–197.
6. Задохина, Н. В. Эксперимент в психолого-педагогических исследованиях / Н. В. Задохина // Образование. Наука. Научные кадры. – 2024. – № 4. – С. 275–278.
7. Левин, С. Ф. Философские проблемы и статистические методы фундаментальной метрологии / С. Ф. Левин // Метафизика. – 2012. – № 3 (5). – С. 93–94.
8. Кричевец, А. Н. Математическая статистика для психологов : учебник / А. Н. Кричевец, А. А. Корнеев, Е. И. Рассказова. – М. : Академия, 2012. – 400 с.
9. Новиков, Д. А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи) / Д. А. Новиков. – М. : МЗ-Пресс, 2004. – 67 с.

10. Математика для психологов: элементы теории вероятности и математической статистики : учебное пособие / [Н. В. Задохина и др.]. – М. : Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя, 2021. – 89 с.

11. Райгородский, Д. Я. Практическая психодиагностика. Методики и тесты : учебное пособие. – Самара : Бахрах-М, 2019. – 672 с.

Приложение 1

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы к	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	4,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 2

Критические значения критерия

U Вилкоксона-Манна-Уитни

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
n_2	$\alpha = 0,05$																			
2	—																			
3	—	0																		
4	—	0	1																	
5	0	1	2	4																
6	0	2	3	5	7															
7	0	2	4	6	8	11														
8	1	3	5	8	10	13	15													
9	1	4	6	9	12	15	18	21												
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27											
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34										
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42									
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51								
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61							
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72						
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83					
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96				
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109			
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123		
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138	

Критические значения критерия

U Вилкоксона-Манна-Уитни

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
n_2	$\alpha = 0,01$																			
2	—																			
3	—	—																		
4	—	—	—																	
5	—	—	0	1																
6	—	—	1	2	3															
7	—	0	1	3	4	6														
8	—	0	2	4	6	7	9													
9	—	1	3	5	7	9	11	14												
10	—	1	3	6	8	11	13	16	19											
11	—	1	4	7	9	12	15	18	22	25										
12	—	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31									
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39								
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47							
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56						
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66					
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77				
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88			
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101		
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114	

Приложение 3

Критические значения критерия Т-Вилкоксона

n	α		n	α	
	0,05	0,01		0,05	0,01
1	–	–	26	110	84
2	–	–	27	119	92
3	–	–	28	130	101
4	–	–	29	140	110
5	0	–	30	151	120
6	2	–	31	163	130
7	3	0	32	175	140
8	5	1	33	187	151
9	8	3	34	200	162
10	10	5	35	213	173
11	13	7	36	227	185
12	17	9	37	241	198
13	21	12	38	256	211
14	25	15	39	271	224
15	30	19	40	286	238
16	35	23	41	302	252
17	41	27	42	319	266
18	47	32	43	336	281
19	53	37	44	353	296
20	60	43	45	372	312
21	67	49	46	389	328
22	75	55	47	407	345
23	83	62	48	426	362
24	92	69	49	446	379
25	100	76	50	466	397

Приложение 4

Величины угла φ (в радианах) для разных процентных долей

%, до- ля	%, последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значение φ									
10	0,644	0,647	0,650	0,653	0,657	0,660	0,663	0,666	0,670	0,673
20	0,927	0,930	0,932	0,935	0,937	0,940	0,942	0,945	0,947	0,950
30	1,159	1,161	1,164	1,166	1,168	1,170	1,172	1,174	1,177	1,179
40	1,369	1,371	1,374	1,376	1,378	1,380	1,382	1,384	1,386	1,388
41	1,390	1,392	1,394	1,396	1,398	1,400	1,402	1,404	1,406	1,408
42	1,410	1,412	1,414	1,416	1,418	1,420	1,422	1,424	1,426	1,428
43	1,430	1,432	1,434	1,436	1,438	1,440	1,442	1,444	1,446	1,448
44	1,451	1,453	1,455	1,457	1,459	1,461	1,463	1,465	1,467	1,469
45	1,471	1,473	1,475	1,477	1,479	1,481	1,483	1,485	1,487	1,489
46	1,491	1,493	1,495	1,497	1,499	1,501	1,503	1,505	1,507	1,509
47	1,511	1,513	1,515	1,517	1,519	1,521	1,523	1,525	1,527	1,529
48	1,531	1,533	1,535	1,537	1,539	1,541	1,543	1,545	1,547	1,549
49	1,551	1,553	1,555	1,557	1,559	1,561	1,563	1,565	1,567	1,569
50	1,571	1,573	1,575	1,577	1,579	1,581	1,583	1,585	1,587	1,589
51	1,591	1,593	1,595	1,597	1,599	1,601	1,603	1,605	1,607	1,609
52	1,611	1,613	1,615	1,617	1,619	1,621	1,623	1,625	1,627	1,629
53	1,631	1,633	1,635	1,637	1,639	1,641	1,643	1,645	1,647	1,649
54	1,651	1,653	1,655	1,657	1,659	1,661	1,663	1,665	1,667	1,669
55	1,671	1,673	1,675	1,677	1,679	1,681	1,683	1,685	1,687	1,689
56	1,691	1,693	1,695	1,697	1,699	1,701	1,703	1,705	1,707	1,709
57	1,711	1,713	1,715	1,717	1,719	1,721	1,723	1,725	1,727	1,729
58	1,731	1,734	1,736	1,738	1,740	1,742	1,744	1,746	1,748	1,750
59	1,752	1,754	1,756	1,758	1,760	1,762	1,764	1,766	1,768	1,770
60	1,772	1,774	1,776	1,778	1,780	1,782	1,784	1,786	1,789	1,791
61	1,793	1,795	1,797	1,799	1,801	1,803	1,805	1,807	1,809	1,811
62	1,813	1,815	1,817	1,819	1,821	1,823	1,826	1,828	1,830	1,832
63	1,834	1,836	1,838	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,853
64	1,855	1,857	1,859	1,861	1,863	1,865	1,867	1,869	1,871	1,873
65	1,875	1,878	1,880	1,882	1,884	1,886	1,888	1,890	1,892	1,894
66	1,897	1,899	1,901	1,903	1,905	1,907	1,909	1,911	1,913	1,916
67	1,918	1,920	1,922	1,924	1,926	1,928	1,930	1,933	1,935	1,937

Окончание приложения 4

Величины угла φ (в радианах) для разных процентных долей

%, до- ля	%, последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значение φ									
68	1,939	1,941	1,943	1,946	1,948	1,950	1,952	1,954	1,956	1,958
69	1,961	1,963	1,965	1,967	1,969	1,971	1,974	1,976	1,978	1,980
70	1,982	1,984	1,987	1,989	1,991	1,993	1,995	1,998	2,000	2,002
71	2,004	2,006	2,009	2,011	2,013	2,015	2,018	2,020	2,022	2,024
72	2,026	2,029	2,031	2,033	2,035	2,038	2,040	2,042	2,044	2,047
73	2,049	2,051	2,053	2,056	2,058	2,060	2,062	2,065	2,067	2,069
74	2,071	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,085	2,087	2,090	2,092
75	2,094	2,097	2,099	2,101	2,104	2,106	2,108	2,111	2,113	2,115
76	2,118	2,120	2,122	2,125	2,127	2,129	2,132	2,134	2,136	2,139
77	2,141	2,144	2,146	2,148	2,151	2,153	2,156	2,158	2,160	2,163
78	2,165	2,168	2,170	2,172	2,175	2,177	2,180	2,182	2,185	2,187
79	2,190	2,192	2,194	2,197	2,199	2,202	2,204	2,207	2,209	2,212
80	2,214	2,217	2,219	2,222	2,224	2,227	2,229	2,231	2,234	2,237
81	2,240	2,242	2,245	2,247	2,250	2,252	2,255	2,258	2,260	2,263
82	2,265	2,268	2,271	2,273	2,276	2,278	2,281	2,284	2,286	2,289
83	2,292	2,294	2,297	2,300	2,302	2,305	2,308	2,310	2,313	2,316
84	2,319	2,321	2,324	2,327	2,330	2,332	2,335	2,338	2,341	2,343
85	2,346	2,349	2,352	2,355	2,357	2,360	2,363	2,366	2,369	2,372
86	2,375	2,377	2,380	2,383	2,386	2,389	2,392	2,395	2,398	2,401
87	2,404	2,407	2,410	2,413	2,416	2,419	2,422	2,425	2,428	2,431
88	2,434	2,437	2,440	2,443	2,447	2,450	2,453	2,456	2,459	2,462
89	2,465	2,469	2,472	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,495
90	2,498	2,501	2,505	2,508	2,512	2,515	2,518	2,522	2,525	2,529
91	2,532	2,536	2,539	2,543	2,546	2,550	2,554	2,557	2,561	2,564
92	2,568	2,572	2,575	2,579	2,583	2,587	2,591	2,594	2,598	2,602
93	2,606	2,610	2,614	2,618	2,622	2,626	2,630	2,634	2,638	2,642
94	2,647	2,651	2,655	2,659	2,664	2,668	2,673	2,677	2,681	2,686
95	2,691	2,695	2,700	2,705	2,709	2,714	2,719	2,724	2,729	2,734
96	2,739	2,744	2,749	2,754	2,760	2,765	2,771	2,776	2,782	2,788
97	2,793	2,799	2,805	2,811	2,818	2,824	2,830	2,837	2,844	2,851
98	2,858	2,865	2,872	2,880	2,888	2,896	2,904	2,913	2,922	2,931

Приложение 5

Критические значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена

<i>n</i>	α		<i>n</i>	α		<i>n</i>	α	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,94	–	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	–	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,49	0,51	37	0,33	0,43
14	0,54	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

Учебное издание

Задохина Нина Владимировна,
доцент кафедры информатики и математики
Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя,
кандидат педагогических наук

Дубинина Наталья Михайловна,
начальник кафедры информатики и математики
Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя,
кандидат юридических наук, доцент

Страхов Андрей Александрович,
доцент кафедры информатики и математики
Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя

Бубнов Владимир Валерьевич,
доцент кафедры И-15 Московского авиационного института
(национального исследовательского университета) «МАИ»,
кандидат экономических наук, доцент

Статистические методы в психолого-педагогических исследованиях

Редактор *Тарасова Т. С.*
Компьютерная верстка *Тарасова Т. С.*



Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 4,06.

Подписано в печать 29.08.2025. Заказ № 31.

Тираж 64 экз.

Отпечатано в Полиграфическом центре
Московского университета МВД России имени В.Я. Кикотя
<https://мосу.мвд.рф>, e-mail: support_mosu@mvd.ru